Capítulo 10 Asignación de máquinas

10.1 Conceptos

10.1.1 Introducción

La asignación de máquinas a operarios es un tema clásico de la Organización Industrial. Poco y mal tratado desde un tiempo a esta parte, la reciente evolución de la tecnología y de la gestión le ha devuelto actualidad y espacio en las páginas de las publicaciones especializadas.

Se trata de responder la cuestión de qué o cuántas máquinas ha de tener a su cargo un operario o, más en general, cuántas unidades de un cierto recurso (digamos máquinas) hay que asignar a un recurso de otro tipo (que puede ser una persona, pero también un robot, pongamos por caso) indispensable para que funcionen las unidades del primer tipo. Como resulta más cómodo hablar de máquinas y operarios así se hará en lo sucesivo, pero no se ha de perder de vista este carácter más general del problema.

Si el número de máquinas asignadas es bajo, las máquinas funcionarán con el mismo rendimiento que si cada una de ellas tuviera un operario exclusivo a su servicio, pero la carga de trabajo de los operarios será escasa; en cambio, será alta si el número de máquinas asignadas es elevado, pero entonces aparecen las *interferencias*, es decir, un aumento de tiempo inactivo de las máquinas a causa de que hay un tiempo de espera desde que la máquina requiere una intervención hasta que el operario, ocupado con otra máquina, vuelve a estar disponible. En el primer caso, los costes de la mano de obra serán relativamente altos y lo mismo ocurrirá con los costes de las máquinas en el segundo caso.

Las opiniones que se podría llamar, forzando el término, vulgares sostienen que la asignación debe hacerse de forma que el tiempo de inactividad del operario o de las máquinas resulte tan bajo como sea posible. Evidentemente, ambas opiniones no pueden ser correctas puesto que son contradictorias, tal como se apuntaba un poco más arriba:

saturar al operario puede implicar la aparición de interferencias; si lo que se pretende conseguir es la saturación de la máquina, muchas veces sólo será posible alcanzar este objetivo a costa de una baja ocupación del operario. De hecho, ninguno de estos criterios es, en general, adecuado; ni la saturación de los operarios ni la de las máquinas son objetivos deseables por sí mismos, por más enojoso que resulte que un recurso productivo esté inactivo durante una cierta proporción del tiempo.

El problema de asignación de máquinas tiene un objetivo económico; se trata de maximizar el beneficio, lo que según las circunstancias, los costes, etc. puede conducir a una proporción de tiempo inactivo más o menos grande de la mano de obra o de las máquinas.

10.1.2 Máquinas idénticas

El problema de asignación es muy difícil de plantear de forma completamente general.

Una hipótesis habitual, que se asume en lo sucesivo, es la de suponer que todas las máquinas a asignar son idénticas. En el punto anterior se ha dicho que se trataba de determinar qué o cuántas máquinas ha de tener a su cargo cada operario. De hecho, cuando se hace referencia únicamente a cuántas máquinas, se está suponiendo implícitamente que todas son iguales y que para definir la solución basta con establecer el número de las asignadas al operario.

Para formalizar el problema, se utilizará la notación siguiente:

t: tiempo de máquina necesario para obtener una unidad de producto

H: coste, por unidad de tiempo, de un operario

M: coste, por unidad de tiempo, de posesión de una máquina

m: coste de funcionamiento de la máquina correspondiente a la obtención de una unidad de producto

N: número de máquinas asignadas al operario

u: diferencia entre el precio de venta de una unidad de producto y todos sus costes, salvo los correspondientes a maquinaria y mano de obra del proceso objeto de estudio.

Si las N máquinas funcionaran ininterrumpidamente, la producción, por unidad de tiempo, del grupo formado por las máquinas y el operario sería N/t (ya que $1/t$ es la producción de una máquina que funcione ininterrumpidamente durante una unidad de tiempo). A causa de los tiempos de preparación, resolución de incidencias e interferencias, las máquinas no funcionan todo el tiempo, de lo cual resulta que el número medio de máquinas en funcionamiento, A(N), es siempre menor que N y que la producción por unidad de tiempo del grupo es:

$$P = \frac{A(N)}{t}$$

Resulta fácil entonces expresar el coste por unidad de producto del proceso en cuestión (c) o el margen por máquina y unidad de tiempo (b) o por operario y unidad de tiempo (b'), puesto que el coste por unidad de tiempo del grupo es H + NM:

$$c = \frac{H + N{\cdot}M}{A(N)} \cdot t + m$$

$$b = \frac{1}{N}\left[\frac{A(N)}{t} \cdot (u - m) - H\right] - M$$

$$b' = N{\cdot}b = \frac{A(N)}{t} \cdot (u - m) - H - N{\cdot}M$$

En general, habrá limitaciones en el número de unidades a fabricar, en la disponibilidad de máquinas y en la de operarios. Si decimos que son de tipo N los grupos operario-máquinas con N máquinas, se tratará de determinar cuántos grupos de cada tipo hay que formar para maximizar el margen total. Dados los valores de b'(N), el problema se puede plantear, de una forma muy general, como un programa lineal entero. Pero no siempre es necesario recurrir a esta técnica.

Si el número de unidades a producir es fijo y lo es también u, la maximización del margen es equivalente a la minimización del coste unitario. Si lo fijo es el número de máquinas o el de operarios, equivale a la maximización del margen por máquina y unidad de tiempo o por operario y unidad de tiempo, respectivamente. Obsérvese que, si los recursos son limitados, pero no el número de unidades a producir, y el precio es constante (es decir, se puede vender toda la producción realizable a un precio determinado) en general no se debe minimizar el coste unitario, puesto que interesa maximizar el producto del margen por la cantidad: muchas veces lo óptimo es elevar el valor del factor cantidad por encima del que corresponde al coste óptimo, aunque ello sea en detrimento del factor margen. En todos estos casos, suelen bastar unos tanteos sencillos para la optimización, sin recurrir a la programación lineal entera.

En definitiva, el problema se reduce al cálculo de A(N), el cual, desde luego, exige una mayor concreción del problema.

Por otra parte, lo que hasta aquí se ha denominado, sin mayor formalización, carga del operario (C) se puede definir como la proporción de tiempo en que éste está activo y es igual al tiempo requerido para una intervención por el número de intervenciones por unidad de tiempo de funcionamiento de la máquina (λ), es decir:

$$C = \lambda \cdot \tau \cdot A(N)$$

10.1.2.1 Caso determinista

La hipótesis que define este caso es que los tiempos y las secuencias son fijos. En este marco cabe una gran diversidad de situaciones, Aquí se considerarán únicamente ciclos en que hay un tiempo de trabajo manual que no tiene solución de continuidad y un tiempo de máquina, que puede o no solaparse parcialmente, o incluso totalmente, con el tiempo de trabajo manual.

Si se denomina τ al tiempo de trabajo manual en un ciclo (y τ' y τ'', respectivamente al tiempo de trabajo manual con la máquina parada y con la máquina en marcha), *t* al tiempo de máquina y T a la duración de un ciclo, se cumple (*fig. 10.1.2.1.1*):

$$\tau = \tau' + \tau''$$

$$T = \tau' + t$$

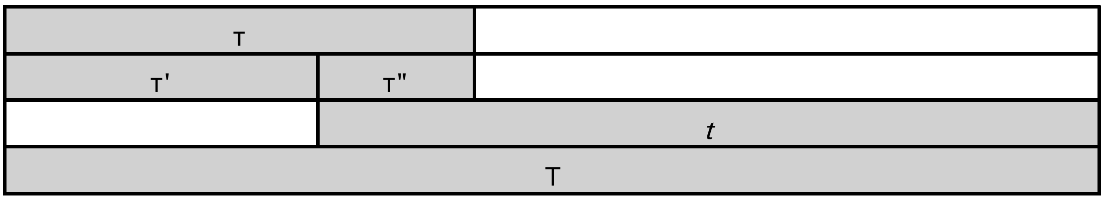

Fig. 10.1.2.1.1 Relaciones entre los tiempos de un ciclo

Las figuras siguientes (*10.1.2.1.2* a *10.1.2.1.4*) reflejan la secuencia de actividades del operario y las máquinas en diversos supuestos.

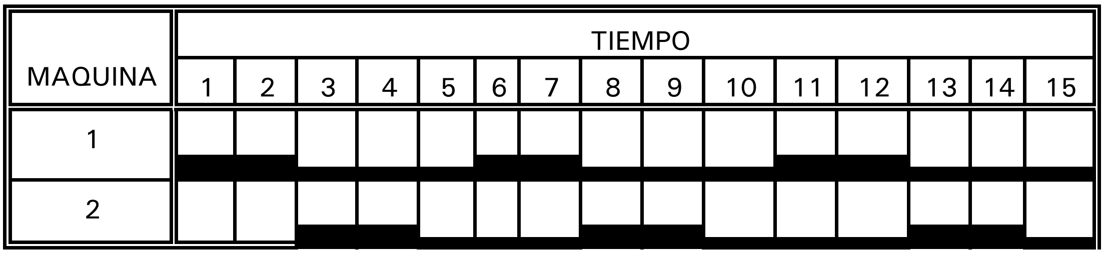

Fig. 10.1.2.1.2 Secuencia de actividades de un operario ($) y dos máquinas (( ) con J'= 2, J"=0 y t=3. El ciclo del sistema tiene una duración de 5 unidades de tiempo. Las máquinas no han de esperar; en cambio, el operario permanece inactivo 1 de cada 5 unidades de tiempo.

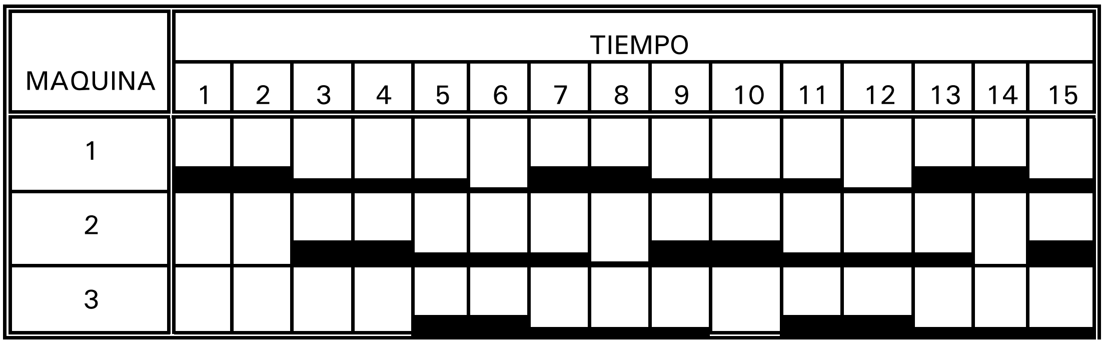

Fig. 10.1.2.1.3 Secuencia de actividades de un operario ($) y tres máquinas (( ) con J'= 2, J"=0 y t=3. El ciclo del sistema tiene una duración de 6 unidades de tiempo. El operario actúa sin interrupción, pero hay interferencias: las máquinas han de esperar una unidad de tiempo a ser atendidas, una vez han finalizado su ciclo.

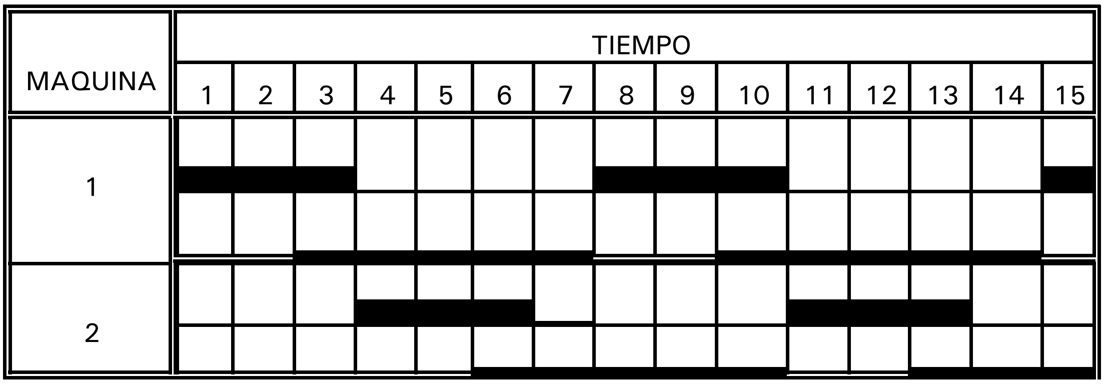

Fig. 10.1.2.1.4 Secuencia de actividades de un operario ($) y dos máquinas (( ) con J'= 2, J"=1 y t=5. El ciclo del sistema tiene una duración de 7 unidades de tiempo. Las máquinas no han de esperar; en cambio, el operario permanece inactivo 1 de cada 7 unidades de tiempo.

El número máximo de máquinas que puede atender un operario sin que aparezcan interferencias es:

$$[T/\tau]$$

(donde [x] denota la parte entera de x).

Entonces, para $N \leq [T/\tau]$:

$$A(N) = \frac{N \cdot t}{T}$$

Por lo cual:

$$c = \left[\frac{H}{N} + M\right] \cdot T + m$$

$$b = \frac{u - m}{T} - \frac{H}{N} - M$$

$$b' = N \cdot b = N \cdot \frac{u - m}{T} - H - N \cdot M$$

$$C = \frac{N \cdot \tau}{T}$$

Si el cociente T/τ es entero, el número máximo de máquinas que tiene sentido asignar al operario es precisamente este cociente; si no lo es, el entero inmediatamente superior. Asignar un número mayor de máquinas aumenta los costes del grupo, pero no la producción, ya que a causa de las interferencias, la producción es la misma que para dicho número de máquinas. En el caso de cociente T/τ no entero, para el entero inmediatamente superior, la duración del ciclo para el conjunto del operario y las N máquinas es τN, por lo cual:

$$A(N) = N \cdot \frac{t}{N \cdot \tau} = \frac{t}{\tau}$$

y, en consecuencia:

$$c = (H + N \cdot M) \cdot \tau + m$$

$$b = \frac{1}{N} \cdot \left[\frac{u - m}{\tau} - H\right] - M$$

$$b' = N \cdot b \cdot \frac{u - m}{\tau} - H - N \cdot M$$

$$C = 1$$

10.1.2.2 Caso aleatorio

En éste las máquinas requieren una intervención con una probabilidad que puede depender del tiempo que llevan funcionando desde la última vez que se han puesto en marcha. El tiempo para resolver la incidencia también es, en general, aleatorio.

Salvo para ciertas distribuciones particulares de los tiempos, las interferencias aparecen aunque el operario sólo tenga asignadas dos máquinas; en efecto, una máquina puede requerir una intervención mientras el operario está trabajando para resolver una incidencia en otra.

En el caso determinista, la saturación del operario no es siempre la mejor solución; en este caso aleatorio, suele ser una pésima solución porque las interferencias reducen entonces muchísimo el rendimiento de las máquinas. Dicho de otro modo, al aumentar N, A(N) crece menos que proporcionalmente e incluso tiende a estabilizarse, con lo cual al asignar más máquinas al operario aumentan los costes pero no la producción.

El cálculo de A(N) sólo puede hacerse, generalmente, por simulación. No obstante, en algunos casos particulares se puede recurrir a fórmulas o procedimientos de cálculo o a tablas o gráficos obtenidos a partir de ellos. Desde luego, tales instrumentos sólo tienen validez para situaciones que se ajusten razonablemente a las hipótesis de cada modelo, pero su aplicación es rápida y por consiguiente económica y pueden resultar muy útiles aunque sólo sea para una primera aproximación y cernido de las soluciones. Debe tenerse en cuenta, por otra parte, que los valores que proporcionan tales modelos corresponden al funcionamiento del sistema en régimen permanente (que de hecho es un límite al que se aproxima el sistema cuando funciona un tiempo suficientemente elevado como para que la probabilidad de que se encuentre en uno u otro estado no dependa prácticamente del estado inicial; la aproximación es tanto más rápida cuanto menos propenso a la congestión sea el sistema).

Los modelos más sencillos tienen en común las hipótesis siguientes:

- la intervención del operario se realiza con la máquina parada (por consiguiente, mientras el operario la atiende, no puede generar una nueva incidencia)

- la aparición de incidencias en una máquina que funcione es independiente de lo que sucede en las otras máquinas

- el tiempo de funcionamiento de una máquina hasta la aparición de una incidencia se distribuye exponencialmente con un parámetro, λ, de valor constante a lo largo del tiempo (el valor de λ es inverso del tiempo medio de funcionamiento ininterrumpido y coincide con el número medio de incidencias por unidad de tiempo de funcionamiento de la máquina).

La última de estas hipótesis equivale a que la probabilidad de aparición de una incidencia es independiente del tiempo que lleva funcionando la máquina.

Entonces, si el tiempo para resolver una incidencia tiene asimismo una distribución exponencial, se trata de un caso particular de los procesos denominados de nacimiento y muerte, que es uno de los modelos elementales de la teoría de colas (un canal, centro emisor finito); las fórmulas correspondientes pueden encontrarse en cualquier introducción a la Investigación Operativa (ver **anexo 10.1.1**) y todos los paquetes informáticos no especializados de esta disciplina, incluso los más elementales, incluyen los correspondientes programas. Ashcroft estudió el caso en que el tiempo de resolución de una incidencia es constante y estableció fórmulas con las que se han obtenido y publicado tablas o gráficos; las tablas son de doble entrada y contienen el número medio de máquinas en funcionamiento (denominado, en este contexto, número de Ashcroft) correspondiente a un número, N, de máquinas a cargo de un operario y a un parámetro, *p*, igual al producto del número medio de incidencias por unidad de tiempo de funcionamiento y el tiempo requerido para una intervención, supuesto constante, como se ha dicho, en el modelo de Ashcroft (ver **anexos 10.1.2** y **10.1.3**). Si la ley a que obedecen los tiempos de intervención no es exponencial o constante las cosas se complican ligeramente, pero aún resulta relativamente sencillo el cálculo de A(N).

Como se ha dicho, todos los modelos citados suponen que $\tau''=0$ (o, lo que es lo mismo, $\tau=\tau'$). Si $\tau''>0$ se puede utilizar la aproximación que se describe a continuación:

En primer lugar se calcula el factor:

$$f = \frac{1}{1-\lambda\tau''}$$

que constituye una aproximación de la proporción que representa el tiempo total de máquina en relación al tiempo de máquina no solapado con trabajo manual. Con el modelo que corresponda se determina A'(N), para el valor $\lambda' = f\lambda$. Finalmente, se calcula:

$$A(N) = f \cdot A'(N)$$

La corrección del valor de λ es para tener en cuenta que pueden aparecer incidencias durante la parte de trabajo manual que se realiza con la máquina en marcha y la de A'(N) para tener en cuenta que la máquina está en marcha durante el tiempo τ'' (en realidad, si hay una incidencia en este intervalo, el tiempo τ'' será menor). Por supuesto, la aproximación es tanto mejor cuanto menor sea τ''; si τ'' es relativamente grande, los resultados no sólo son inexactos, sino que pueden llegar a ser absurdos (tales como A(N) > N).

En todos estos casos la carga del operario se puede calcular mediante la expresión general:

$$C = \lambda \cdot \tau \cdot A(N)$$

que nos dará la carga ocasionada por las incidencias; si es muy baja, se puede aumentar asignando al operario un trabajo interrumpible (en el supuesto de que la atención a las incidencias es prioritaria, por lo cual este trabajo complementario no tiene repercusión sobre las interferencias).

10.1.3 Sistemas que no se ajustan a los modelos anteriores

Si las máquinas son distintas, los modelos anteriores, desde luego, no son válidos. Pero también pueden no serlo aunque las máquinas sean iguales; en el caso determinista, porque el ciclo de trabajo tenga una estructura distinta de la supuesta en **10.1.2**; en el caso aleatorio, porque las averías o incidencias no se presenten según un proceso exponencial.

En general, el problema es complejo. Existen, por supuesto modelos, para ciertos casos particulares que no cabe tratar aquí. En un contexto determinista, se puede recurrir a la utilización de diagramas hombre-máquina y el caso aleatorio, en general, se puede tratar por medio de la simulación.

ANEXO 10.1.1

Cálculo del número medio de máquinas en funcionamiento con incidencias y tiempos de reparación exponenciales

La expresión que permite calcular el número medio de máquinas, en régimen permanente, en este caso es:

$$A(N) = \frac{(1 - P_0)}{p}$$

con $p = \lambda \cdot \tau$

y $$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \left[\frac{N!}{(N-n)!} \cdot p^n \right]}$$

que se puede programar fácilmente, incluso en una calculadora de bolsillo.

ANEXO 10.1.2

Fórmulas de Ashcroft

Se designará por p, *parámetro de Ashcroft*, el producto $\lambda\tau$.

Si observamos el sistema formado por el operario y las N máquinas veremos que se suceden ciclos, de duración diversa, cada uno de los cuales consta de una fase de inactividad del operario y de una fase activa en que éste repara, sin solución de continuidad, un cierto número de máquinas.

La duración media de las fases inactivas es la media del tiempo que transcurre hasta que, estando todas las máquinas en funcionamiento, se produce una avería, es decir:

$$\frac{1}{N \cdot \lambda}$$

Y la duración media de las fases activas es igual a τ por el número medio de máquinas reparadas en una fase activa, X_N.

Por consiguiente, la proporción de tiempo en que el operario está activo es:

$$\frac{\tau \cdot X_N}{\dfrac{1}{N \cdot \lambda} + \tau \cdot X_N}$$

De donde, el número medio de máquinas reparadas por el operario por unidad de tiempo es:

$$\frac{1}{\tau} \cdot \frac{\tau \cdot X_N}{\dfrac{1}{N \cdot \lambda} + \tau \cdot X_N}$$

que, en régimen permanente, es igual al número medio de averías que se producen en una unidad de tiempo, es decir a:

$$\lambda \cdot A(N)$$

Por lo cual:

$$A(N) = \frac{1}{p + \dfrac{1}{N \cdot X_N}}$$

Por consiguiente, para calcular A(N) basta conocer el valor de X_N.

Este se puede determinar como sigue:

X_1 es, evidentemente, igual a 1. Considérese ahora el caso N = 2; el operario inicia su actividad cuando se avería una máquina y cuando termina la reparación de la misma se puede encontrar en dos situaciones distintas: o bien no se ha averiado la segunda máquina, lo cual tiene una probabilidad igual a $e^{-\lambda\tau}$ (es decir, igual a e^{-p}), o bien se ha averiado (probabilidad igual a $1-e^{-p}$) y la situación es exactamente la misma que en el instante inicial de la fase activa; así pues:

$$X_2 = e^{-p} \cdot 1 + (1 - e^{-p}) \cdot (1 + X_2)$$

de donde resulta que:

$$X_2 = e^{p}$$

En general, con N máquinas, la fase de actividad del operario se inicia con la reparación de la primera máquina averiada; al terminar esta reparación, puede haberse averiado un número cualquiera k ($k = 1,\ldots,N-1$) de las N-1 máquinas restantes, con una probabilidad:

$$\pi_k(N) = \binom{N-1}{k}(1-e^{-p})^k \cdot e^{-(N-k-1)\cdot p}$$

Por lo tanto, el número medio de reparaciones hasta alcanzar de nuevo la fase de inactividad es:

$$X_N = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \pi_k(N) \cdot x_k(N)$$

donde $x_k(N)$ es el número medio de reparaciones para volver a la fase activa, desde el estado definido por *k* máquinas averiadas; evidentemente:

$$x_1(N) = X_N$$

Cuando hay *k* máquinas averiadas el conjunto de las N máquinas puede considerarse partido en dos subconjuntos, uno de ellos con N-*k*+1 máquinas (con una averiada) y el otro con *k*-1 máquinas, todas ellas averiadas; si consideramos que el operario actúa inicialmente en el primero de estos subconjuntos hasta que todas las máquinas del mismo funcionen, se habrá pasado entonces de tener *k* máquinas averiadas en total a tener *k*-1 (y se puede considerar entonces un subconjunto con N-*k*+2 máquinas, una de ellas averiada, y otro con *k*-2 máquinas averiadas, y así sucesivamente), por lo cual se puede escribir:

$$x_k(N) = x_1(N-k+1) + x_{k-1}(N)$$

de donde (o directamente):

$$x_k(N) = \sum_{j=N-k+1}^{N} X_j$$

y de ello se deduce que:

$$X_N = \frac{1}{\pi_0(N)}\left\{1 + \sum_{k=2}^{N-1} \pi_k(N)\left[\sum_{j=N-k+1}^{N-1} X_j\right]\right\}$$

o, lo que es lo mismo:

$$X_N = \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j-1}\binom{N-1}{j} X_{N-j} + \prod_{j=1}^{N-1}\left(e^{jp}-1\right)$$

Expresiones que permiten el cálculo recurrente de las X_N, el cual como se ve no es especialmente difícil, aunque puede presentar problemas de tipo numérico si no se cuida la precisión.

Anexo 10.1.3

Tablas de Ashcroft

p	N = 1	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5	N = 6	N = 7	N = 8	N = 9	N = 10
0'00	1'00	2'00	3'00	4'00	5'00	6'00	7'00	8'00	9'00	10'00
0'01	0'99	1'98	2'97	3'96	4'95	5'94	6'93	7'92	8'91	9'90
0'02	0'98	1'96	2'94	3'92	4'90	5'88	6'85	7'83	8'81	9'78
0'03	0'97	1'94	2'91	3'88	4'84	5'81	6'77	7'74	8'70	9'66
0'04	0'96	1'92	2'88	3'84	4'79	5'74	6'69	7'64	8'58	9'52
0'05	0'95	1'90	2'85	3'79	4'74	5'67	6'61	7'53	8'45	9'37
0'06	0'94	1'88	2'82	3'75	4'68	5'60	6'51	7'42	8'31	9'19
0'07	0'93	1'86	2'79	3'71	4'62	5'52	6'42	7'29	8'15	8'99
0'08	0'93	1'85	2'76	3'67	4'56	5'44	6'31	7'16	7'98	8'76
0'09	0'92	1'83	2'73	3'62	4'50	5'36	6'20	7'01	7'78	8'50
0'10	0'91	1'81	2'70	3'58	4'44	5'28	6'08	6'85	7'57	8'21
0'11	0'90	1'79	2'67	3'53	4'38	5'19	5'96	6'68	7'33	7'89
0'12	0'89	1'77	2'64	3'49	4'31	5'10	5'83	6'50	7'08	7'55
0'13	0'88	1'76	2'61	3'44	4'24	5'00	5'69	6'31	6'81	7'19
0'14	0'88	1'74	2'58	3'40	4'18	4'90	5'55	6'10	6'53	6'83
0'15	0'87	1'72	2'55	3'35	4'11	4'80	5'40	5'90	6'25	6'48
0'16	0'86	1'71	2'52	3'31	4'04	4'70	5'25	5'68	5'97	6'14
0'17	0'85	1'69	2'50	3'26	3'97	4'59	5'10	5'47	5'70	5'82
0'18	0'85	1'67	2'48	3'22	3'90	4'48	4'94	5'26	5'44	5'52
0'19	0'84	1'66	2'44	3'17	3'83	4'37	4'79	5'05	5'19	5'24
0'20	0'83	1'64	2'41	3'12	3'75	4'26	4'63	4'85	4'95	4'99
0'21	0'83	1'62	2'38	3'08	3'68	4'15	4'48	4'66	4'73	4'75
0'22	0'82	1'61	2'35	3'03	3'61	4'04	4'33	4'47	4'53	4'54
0'23	0'81	1'59	2'33	2'98	3'53	3'94	4'18	4'30	4'34	4'34
0'24	0'81	1'58	2'30	2'94	3'46	3'83	4'04	4'13	4'16	4'16
0'25	0'80	1'56	2'27	2'89	3'39	3'73	3'90	3'98	4'00	4'00

p	N = 11	N = 12	N = 13	N = 14	N = 15	N = 16	N = 17	N = 18	N = 19	N = 2 0
0'000	11'00	12'00	13'00	14'00	15'00	16'00	17'00	18'00	19'00	20'00
0'005	10'94	11'94	12'93	13'93	14'92	15'92	16'91	17'91	18'90	19'89
0'010	10'88	11'87	12'86	13'85	14'84	15'83	16'82	17'80	18'79	19'78
0'015	10'82	11'80	12'79	13'77	14'75	15'73	16'71	17'69	18'69	19'65
0'020	10'76	11'73	12'71	13'68	14'65	15'62	16'59	17'56	18'53	19'50
0'025	10'69	11'66	12'62	13'58	14'54	15'50	16'46	17'41	18'37	19'32
0'030	10'62	11'57	12'53	13'48	14'42	15'37	16'31	17'24	18'17	19'10
0'035	10'54	11'48	12'42	13'36	14'29	15'21	16'13	17'04	17'94	18'82
0'040	10'46	11'39	12'31	13'23	14'13	15'03	15'92	16'79	17'64	18'48
0'045	10'37	11'28	12'18	13'08	13'95	14'82	15'66	16'48	17'27	18'03
0'050	10'27	11'16	12'04	12'91	13'75	14'57	15'35	16'10	16'81	17'45
0'055	10'17	11'04	11'89	12'71	13'51	14'27	14'98	15'64	16'25	16'75
0'060	10'05	10'90	11'71	12'49	13'23	13'92	14'54	15'09	15'56	15'93
0'065	9'93	10'74	11'51	12'24	12'91	13'52	14'04	14'47	14'80	15'04
0'070	9'80	10'57	11'29	11'96	12'55	13'06	13'47	13'78	14'00	14'14
0'075	9'65	10'38	11'05	11'65	12'15	12'56	12'87	13'08	13'20	13'28
0'080	9'50	10'18	10'79	11'30	11'72	12'03	12'25	12'38	12'45	12'48
0'085	9'33	9'96	10'50	10'94	11'27	11'49	11'63	11'71	11'74	11'76
0'090	9'15	9'72	10'19	10'55	10'80	10'96	11'05	11'09	11'10	11'11
0'095	8'96	9'47	9'87	10'16	10'34	10'45	10'49	10'52	10'52	10'52
0'100	8'76	9'21	9'54	9'76	9'89	9'96	9'98	9'99	10'00	10'00
0'105	8'55	8'94	9'21	9'38	9'46	9'50	9'52	9'52	9'52	9'52
0'110	8'34	8'67	8'88	9'00	9'06	9'08	9'09	9'09	9'09	9'09
0'115	8'12	8'39	8'56	8'64	8'68	8'69	8'69	8'69	8'69	8'69
0'120	7'89	8'12	8'24	8'30	8'32	8'33	8'33	8'33	8'33	8'33
0'125	7'67	7'85	7'94	7'98	7'99	8'00	8'00	8'00	8'00	8'00

p	**N = 21**	**N = 22**	**N = 23**	**N = 24**	**N = 25**	**N = 26**	**N = 27**	**N = 28**	**N = 29**	**N = 30**
0'0000	21'00	22'00	23'00	24'00	25'00	26'00	27'00	28'00	29'00	30'00
0'0025	20'95	21'94	22'94	23'94	24'94	25'93	26'93	27'93	28'92	29'92
0'0035	20'92	21'92	22'92	23'91	24'91	25'90	26'90	27'90	28'89	29'89
0'0045	20'90	21'90	22'89	23'89	24'88	25'88	26'87	27'87	28'86	29'86
0'0055	20'88	21'87	22'87	23'86	24'85	25'85	26'84	27'83	28'83	29'82
0'0065	20'85	21'85	22'84	23'83	24'82	25'82	26'81	27'80	28'79	29'78
0'0075	20'83	21'82	22'81	23'80	24'79	25'78	26'77	27'77	28'76	29'75
0'0085	20'80	21'79	22'78	23'77	24'76	25'75	26'74	27'73	28'72	29'71
0'0095	20'78	21'77	22'76	23'74	24'73	25'72	26'71	27'69	28'68	29'67
0'0105	20'75	21'74	22'73	23'71	24'70	25'68	26'67	27'65	28'64	29'62
0'0115	20'73	21'71	22'70	23'68	24'66	25'65	26'63	27'61	28'59	29'58
0'0125	20'70	21'68	22'66	23'65	24'63	25'61	26'59	27'57	28'55	29'53
0'0135	20'67	21'65	22'63	23'61	24'59	25'57	26'55	27'53	28'50	29'48
0'0145	20'64	21'62	22'60	23'58	24'55	25'53	26'50	27'48	28'45	29'43
0'0155	20'61	21'59	22'57	23'54	24'51	25'48	26'46	27'43	28'40	29'37
0'0165	20'58	21'55	22'53	23'50	24'47	25'44	26'41	27'38	28'34	29'31
0'0175	20'55	21'52	22'49	23'46	24'43	25'39	26'36	27'32	28'28	29'24
0'0185	20'51	21'48	22'45	23'42	24'38	25'34	26'30	27'26	28'22	29'17
0'0195	20'48	21'44	22'41	23'37	24'33	25'29	26'24	27'20	28'15	29'10
0'0200	20'46	21'43	22'39	23'35	24'31	25'26	26'21	27'17	28'11	29'06
0'0205	20'44	21'41	22'37	23'32	24'28	25'23	26'18	27'13	28'08	29'02
0'0210	20'43	21'39	22'34	23'30	24'25	25'20	26'15	27'10	28'04	28'97
0'0215	20'41	21'36	22'32	23'27	24'23	25'17	26'12	27'06	28'00	28'93
0'0220	20'39	21'34	22'30	23'25	24'20	25'14	26'08	27'02	27'95	28'88
0'0225	20'37	21'32	22'27	23'22	24'17	25'11	26'05	26'98	27'91	28'83

p	N = 21	N = 22	N = 23	N = 24	N = 25	N = 26	N = 27	N = 28	N = 29	N = 30
0'0230	20'35	21'30	22'25	23'20	24'14	25'08	26'01	26'94	27'86	28'78
0'0235	20'33	21'28	22'22	23'17	24'11	25'04	25'97	26'90	27'81	28'73
0'0240	20'81	21'25	22'20	23'14	24'07	25'00	25'93	26'85	27'76	28'67
0'0245	20'29	21'23	22'17	23'11	24'04	24'97	25'89	26'81	27'71	28'61
0'0250	20'26	21'21	22'14	23'08	24'01	24'93	25'85	26'76	27'66	28'55
0'0255	20'24	21'18	22'12	23'05	23'97	24'89	25'80	26'71	27'60	28'43
0'0260	20'22	21'16	22'09	23'02	23'94	24'85	25'76	26'65	27'54	28'41
0'0265	20'20	21'13	22'06	22'99	23'90	24'81	25'71	26'60	27'48	28'34
0'0270	20'17	21'10	22'03	22'95	23'86	24'76	25'66	26'54	27'41	28'26
0'0275	20'15	21'08	22'00	22'91	23'82	24'72	25'61	26'48	27'34	28'18
0'0280	20'12	21'05	21'97	22'88	23'78	24'67	25'55	26'42	27'27	28'10
0'0285	20'10	21'02	21'93	22'84	23'74	24'62	25'49	26'35	27'19	28'01
0'0290	20'07	21'00	21'90	22'80	23'69	24'57	25'43	26'28	27'11	27'92
0'0295	20'04	20'96	21'86	22'76	23'65	24'51	25'37	26'21	27'03	27'80
0'0300	20'02	20'93	21'83	22'72	23'60	24'46	25'31	26'14	26'94	27'72
0'0305	19'99	20'90	21'79	22'68	23'55	24'40	25'24	26'06	26'85	27'61
0'0310	19'96	20'86	21'75	22'63	23'50	24'34	25'17	25'97	26'75	27'49
0'0315	19'93	20'83	21'71	22'59	23'44	24'28	25'10	25'89	26'65	27'37
0'0320	19'90	20'79	21'67	22'54	23'39	24'22	25'02	25'80	26'54	27'25
0'0325	19'87	20'76	21'63	22'49	23'33	24'15	24'94	25'70	26'43	27'11
0'0330	19'84	20'72	21'59	22'44	23'27	24'08	24'86	25'60	26'31	26'98
0'0335	19'80	20'68	21'54	22'39	23'21	24'00	24'77	25'50	26'19	26'83
0'0340	19'77	20'64	21'50	22'33	23'14	23'93	24'68	25'39	26'06	26'68
0'0345	19'73	20'60	21'45	22'27	23'08	23'85	24'58	25'28	25'93	26'52
0'0350	19'70	20'55	21'40	22'22	23'01	23'77	24'49	25'16	25'79	26'35
0'0355	19'66	20'51	21'35	22'15	22'93	23'68	24'38	25'04	25'64	26'18

p	N = 21	N = 22	N = 23	N = 24	N = 25	N = 26	N = 27	N = 28	N = 29	N = 30
0'0360	19'63	20'47	21'29	22'09	22'86	23'59	24'28	24'91	25'49	26'00
0'0365	19'59	20'45	21'24	22'03	22'78	23'50	24'16	24'78	25'33	25'82
0'0370	19'55	20'38	21'18	21'96	22'70	23'40	24'05	24'64	25'17	25'63
0'0375	19'51	20'33	21'13	21'89	22'62	23'30	23'93	24'50	25'00	25'43
0'0380	19'46	20'28	21'07	21'82	22'53	23'19	23'80	24'35	24¡83	25'23
0'0385	19'42	20'23	21'00	21'74	22'44	23'09	23'68	24'20	24'65	25'02
0'0390	19'38	20'17	20'94	21'67	22'35	22'98	23'54	24'04	24'46	24'81
0'0395	19'33	20'12	20'87	21'59	22'25	22'86	23'40	23'88	24'28	24'60
0'0400	19'28	20'06	20'80	21'50	22'15	22'74	23'26	23'71	24'08	24'38
0'0405	19'24	20'00	20'73	21'42	22'05	22'62	23'12	23'54	23'89	24'15
0'0410	19'19	19'94	20'66	21'33	21'94	22'50	22'97	23'37	23'69	23'93
0'0415	19'13	19'88	20'59	21'24	21'83	22'36	22'81	23'19	23'48	23'70
0'0420	19'08	19'82	20'51	21'15	21'72	22'23	22'66	23'01	23'28	23'47
0'0425	19'03	19'75	20'43	21'05	21'61	22'09	22'50	22'82	23'07	23'25
0'0430	18'97	19'69	20'35	20'95	21'49	21'95	22'33	22'63	22'86	23'02
0'0435	18'92	19'62	20'26	20'85	21'37	21'81	22'15	22'44	22'65	22'79
0'0440	18'86	19'55	20'18	20'75	21'24	21'66	21'99	22'25	22'43	22'56
0'0445	18'80	19'47	20'09	20'64	21'11	21'51	21'82	22'06	22'22	22'33
0'0450	18'74	19'40	20'00	20'53	20'98	21'36	21'65	21'86	22'01	22'10
0'0460	18'61	19'24	19'81	20'30	20'72	21'04	21'29	21'47	21'59	21'66
0'0470	18'48	19'08	19'61	20'07	20'44	20'73	20'94	21'08	21'17	21'22
0'0480	18'34	18'91	19'41	19'82	20'15	20'40	20'57	20'69	20'76	20'80
0'0490	18'19	18'73	19'19	19'57	19'86	20'07	20'21	20'30	20'36	20'38
0'0500	18'04	18'54	18'97	19'31	19'56	19'74	19'86	19'93	19'96	19'98

10.2 Bibliografía

[1] CHANDRA, M. J; SHANTIKUMAR, J. G. *On a Machine Interference Problem with Several Types of Machines Attended by a Single Repairman*. International Journal of Production Research, vol. 21, n. 4, 1983, pp. 529-541.

[2] COROMINAS, A. *Cálculo del número medio de máquinas activas en un grupo de un operario y N máquinas con incidencias poissonianas y tiempos de servicio aleatorios idéntica e independientemente distribuidos*. Qüestiió, vol. 12, n.2, 1988, pp. 251-257.

[3] EILON, S.- *La producción: planificación, organización y control*. Labor, 1976.

[4] HILLIER F. S; LIEBERMAN, G. J. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill, 1982.

[5] STAFFORD, E. F, Jr. *An Optimal Solution Technique for the Operator-Machine Assignment Problem*. Production and Inventory Management Journal, Third Quarter, 1988, pp. 25-31.

[6] STECKE, K. E. *Machine Interference: Assignment of Machines to Operators*, en G. Salvendy, ed., Handbook of Industrial Engineering, J. Wiley, 1982.

[7] STECKE,K. E; ARONSON, J. E. *Review of Operator/Machine Interference Models*. International Journal of Production Research, vol. 23, n. 1, 1985, pp. 129-151.

Comentarios

En [3] se incluye una exposición general sobre la asignación de máquinas, una demostración de las fórmulas de Ashcroft y las tablas correspondientes. En [4], o en cualquier otro texto semejante de introducción a la Investigación Operativa se puede encontrar el desarrollo del modelo correspondiente al caso de averías y tiempos de reparación exponenciales. En [6] y [7], un panorama más actual sobre el tema. En [5] una introducción elemental para el caso determinista, con máquinas iguales. En [2], un procedimiento para el cálculo del número medio de máquinas activas cuando las averías son exponenciales y los tiempos de reparación son independientes, con cualquier distribución de probabilidad. Finalmente, en [1], un modelo para máquinas distintas.

10.3 Problemas resueltos

10.3.1 Caso PIRMOSA

La empresa La Pirotécnica Moderna S.A. (PIRMOSA), con vistas a la campaña de verbenas, ha alquilado, por un mes, 18 máquinas destinadas a llenar y cerrar automáticamente cajas de los denominados fósforos garibaldi.

La máquina invierte 0'1 minutos por caja, pero cuando hay una incidencia se para; las incidencias aparecen siguiendo una ley de Poisson con una media de 3 por hora de funcionamiento de la máquina; el tiempo que necesita el operario encargado de la máquina para resolver una incidencia es de 5 minutos.

El alquiler de una máquina es de 20.000 PTA/mes y además el proveedor le cobra a PIRMOSA 1 PTA por cada caja que sea llenada por la máquina. El coste de un operario es de 128.000 PTA/mes, el mes tiene 160 horas laborables, las cajas se venden a 25 PTA/unidad y el coste de los materiales que entran en una caja es de 5 PTA. Otros costes se pueden considerar insignificantes.

a) Con tres operarios:
¿Cuál es la producción mensual?
¿Cuánto le cuesta cada caja a PIRMOSA?
¿Cuál es la carga de los operarios?

b) ¿Cuántos operarios debería haber para que el coste de cada caja fuera mínimo?

c) El departamento comercial de PIRMOSA está seguro de que la demanda desbordará ampliamente la capacidad de producción de fósforos garibaldi de PIRMOSA, la cual, de todas formas, no tiene posibilidad de alquilar más máquinas. ¿Cuántos operarios debería tener la empresa en este caso y qué beneficio obtendría en el mes?

Las hipótesis sobre la ley de aparición de averías y sobre el tiempo de reparación (constante) corresponden al modelo de Ashcroft. En este caso el parámetro *p* del modelo (que corresponde al tiempo dedicado a reparaciones -o resolución de incidencias- por cada unidad de tiempo de funcionamiento de la máquina), vale:

$$p = 3 \cdot \frac{5}{60} = 0'25$$

a) El número medio de máquinas en funcionamiento en cada grupo de 6 máquinas (las que corresponden a un operario) se encuentra en las tablas de Ashcroft (para p = 0'25, N = 6):

$$A(N) = 3'73$$

La producción mensual es, por tanto:

$$\frac{3'73 \times 3 \times 160 \times 60}{0'1} = 1.074.240 \text{ cajas}$$

El coste de una caja:

$$5 + 1 + \frac{(18 \times 20000) + (3 \times 128000)}{1074240} = 6'69 \text{ PTA/caja}$$

(el beneficio, por consiguiente, 19.666.560 PTA)

La carga de cada operario (proporción del tiempo total dedicado a la reparación de averías) es:

$$p \cdot A(N) = 0'25 \times 3'73 = 0'9325 \quad (93'25\%)$$

b) Los costes de alquiler de maquinaria y de mano de obra imputables a cada caja, únicos que dependen del número de operarios (o, lo que es lo mismo, del número de máquinas asignadas a cada operario) se pueden calcular así:

$$(800 + 125N) \cdot \frac{1}{600 \cdot A(N)}$$

puesto que el paréntesis expresa los costes indicados más arriba correspondientes a un grupo de N máquinas y 1 operario (800: coste horario del operario; 125: coste horario del alquiler de una máquina) y 600 A(N) es la producción horaria del grupo.

Para N = 6 esta expresión vale 0'69, como ya sabíamos (ver apartado a); para N = 5, 0'70 y para N = 7, 0'71. Luego el valor óptimo de N es 6 y los operarios que debería haber, 18/6 = 3, es decir, exactamente los que hay.

c) Si la demanda es muy fuerte puede convenir la contratación de más operarios, ya que, a pesar de que el coste de cada caja aumentará, el beneficio puede incrementarse como consecuencia de las mayores ventas.

Si se prescinde del alquiler de la maquinaria, que es un coste fijo en este caso, el beneficio por caja es de 25 - 5 - 1 = 19 PTA menos el coste que le corresponda de mano de obra. Por consiguiente, si un operario tiene asignadas N máquinas el beneficio por máquina y hora (salvo el alquiler), es:

$$\frac{[\ 19 \times 600 \cdot A(N)\ ] - 800}{N}$$

expresión cuyos valores para N = 1, 2... son los que se incluyen en la tabla siguiente:

N	A(N)	Benef.
1	0'80	8320
2	1'56	8492
3	2'27	8359
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Luego el valor óptimo corresponde a N = 2, es decir, 9 operarios. El beneficio es, en este caso:

$$18 \times (8492 - 125) \times 160 = 24.096.960$$

la producción 9 x 1'56 x 600 x 160 = 1.347.840 cajas, cuyo coste unitario es:

$$6 + \frac{(9 \times 128000) + (18 \times 20000)}{1347840} = 7'12 \text{ PTA/caja}$$

La carga de un operario sería ahora:

$$0'25 \times 1'56 = 39\%$$

10.3.2 Caso INOLORSA

La empresa mixta nipocatalana INOLORSA (Iniciativas Olímpicas Orientales S.A.) estudia el establecimiento de una planta para la fabricación de mascotas de los Juegos Olímpicos de Seúl, cuya celebración está programada para 1988.

La planta empezará a funcionar un año antes del inicio de los Juegos y en este tiempo tiene que producir unos 100 millones de mascotas.

Una vez hechos los estudios previos pertinentes, se consideran las tres posibilidades siguientes:

1) Planta ubicada en el cinturón industrial de Lavinia, con máquinas de producción nominal 300 mascotas/hora y, coste de 70 *um*/hora con averías al azar, con un tiempo medio de funcionamiento entre averías de 100 horas y tiempo de reparación de 2 horas y media. El coste del trabajo es de 65 *um*/hora. Se organizarán turnos para que la planta funcione ininterrumpidamente las 8760 horas del año.

2) Planta ubicada en Singapur con máquinas de producción nominal 125 mascotas/hora y coste de 20 *um*/hora con incidencias al azar, con una media de una incidencia por cada hora de funcionamiento de la máquina y con un tiempo para resolver la incidencia de 12 minutos (10 minutos con la máquina parada y 2 minutos con la máquina en marcha). El coste del trabajo es de 12 *um*/hora. Se organizarán turnos, de manera que la planta funcione ininterrumpidamente las 8760 horas del año.

3) Planta ubicada en el cinturón industrial de Lavinia, igual que en el caso 1 y con características técnicas y económicas idénticas a las descritas más arriba. La diferencia es que solamente habrá operarios 16 de las 24 horas del día. Las otras 8 horas (las nocturnas) la fábrica trabajará en modalidad U, es decir, sin hombres, de tal forma que cuando una máquina se estropee no podrá ser reparada hasta el inicio del primer turno de la mañana; evidentemente, cabe que en este momento haya una acumulación de máquinas averiadas que no pueda ser resuelta en un tiempo razonable por los operarios habituales: por este motivo se prevé que las reparaciones de las máquinas estropeadas a primera hora de la mañana sean hechas por operarios adicionales en número variable cada día, igual al de máquinas averiadas, con una retribución de 200 *um*/reparación; puesto que no hay personas, la fábrica puede quedar a oscuras y sin calefacción con un ahorro de energía de 2 *um*/máquina en el conjunto de las horas nocturnas.

El coste de transporte de cada mascota a los mercados es de 0'01 *um* desde Singapur y de 0'02 *um* desde Lavinia.

La carga de trabajo de los operarios no puede superar el 80%.

Se trata de comparar las tres posibilidades consideradas por INOLORSA, teniendo en cuenta: costes, número de máquinas, número de operarios en un instante dado, número de puestos de trabajo, carga de los operarios.

En la alternativa 1 para alcanzar la producción deseada se requiere un mínimo de:

$$\frac{100 \times 10^6}{8760 \times 300} = 38'05 \text{ máquinas}$$

funcionando ininterrumpidamente.

A causa de las averías, el número de máquinas debe ser mayor.

Puesto que el volumen de producción está fijado, se trata de formar grupos de máquinas que en conjunto sean capaces de producir dicho volumen a un coste unitario mínimo.

El coste unitario de las mascotas producidas por un grupo de 1 operario y N máquinas es (salvo los costes de materia prima y de funcionamiento de las máquinas, supuestos proporcionales a la cantidad producida):

$$c_u = \frac{c_o + c_m \cdot N}{A(N) \cdot \pi_h}$$

donde:

C_o: Coste horario de la mano de obra

C_m: Coste horario de una máquina

A(N): Número medio de máquinas en funcionamiento

π_n: Producción de una máquina en una hora de funcionamiento.

Por consiguiente:

$$c_u = \frac{65 + 70 \cdot N}{300\ A(N)}\ um\ /\ \text{pieza}$$

Las características del sistema descritas en el enunciado corresponden al modelo de Ashcroft y, por consiguiente, A(N) se puede encontrar en tablas con el parámetro *p* igual a 0'025 ($p = t_n$ = 0'01 averías/hora x 2'5 horas/avería = 0'025)

c_u es mínimo para N = 25; A(N) vale entonces 24'01 y

$$c_u = \frac{65 + 70 \times 25}{300 \times 24'01} = 0'252\ um\ /\ \text{pieza}$$

y, si se tiene en cuenta el transporte:

$$0'252 + 0'020 = 0'272\ um\ /\ \text{pieza}$$

Con dos grupos de 25 máquinas la capacidad de producción es excesiva; el óptimo corresponde a dos grupos iguales de 20 máquinas cada uno:

$$A(20) = 19'32 \quad \text{y} \quad 2 \times 19'32 = 38'64 > 38'05$$

$$\text{y} \quad c_u + 0'20 = \frac{65 + 70 \times 20}{300 \times 19'32} = 0'253 + 0'020 = 0'273\ um\ /\ \text{pieza}$$

con una producción algo superior a los 100 millones de mascotas.

En definitiva, para la alternativa 1:

- 40 máquinas
- 10 puestos de trabajo (2 operarios por equipo y 5 equipos para cubrir las 8760 horas de funcionamiento al año)
- Carga de los operarios: 19'32 x 0'025 = 0'483 (48'3%)
- Coste: 0'273 *um*/pieza

Para la alternativa 2, los razonamientos son similares. Como hay un tiempo de trabajo manual que se superpone con el de máquina en marcha, el parámetro de las tablas de Ashcroft se calcula como sigue:

$p = \dfrac{12/60}{1 - 2/60} = \dfrac{12}{58} = 0'207$ y $A(N) = A'(N)\cdot\dfrac{60}{58}$ donde A'(N) es el valor obtenido en la tabla.

En este caso se requiere un número medio de máquinas en funcionamiento no inferior a:

$$\frac{100 \times 10^6}{8760 \times 125} = 91'32$$

El coste es:

$$c_u + 0'010 = \frac{12 + 20 \cdot N}{125 \cdot A(N)} + 0'010$$

cuyo valor óptimo, 0'239 *um*/pieza se obtiene para N = 4, con A(N) = 3'21.

Por lo cual, una configuración adecuada puede constar de 29 grupos de 4 máquinas (lo que corresponde a un número medio de máquinas en funcionamiento de 93'09, con lo cual en rigor bastaría con 28 grupos de 4 máquinas cada uno y 1 grupo de 3, pero la diferencia es de poca consideración).

En definitiva para la alternativa 2:

- 116 máquinas

- 116 puestos de trabajo (29 operarios por equipo y 4 equipos para cubrir las 8760 horas anuales)

- Carga de los operarios: $3'21 \times \frac{12}{60} = 0'642 \quad (64'2\%)$

- Coste: 0'239 *um*/pieza

Por lo que respecta a los costes, la alternativa 2 es la preferible, pero se ha de tener presente que no han sido considerados los costes de la materia prima ni los de funcionamiento de la maquinaria (que tal vez sean distintos en ambas alternativas) puesto que el enunciado no proporciona esta información.

La evaluación de la alternativa 3 es más compleja, ya que ciertos aspectos del funcionamiento del sistema son difíciles de modelizar en este caso.

La ley de supervivencia de las máquinas es:

$$v(t) = e^{-\lambda t} \quad (\text{con } \lambda = 0'01)$$

por lo que

$$v(8) = e^{-0'08} = 0'9231$$

El tiempo medio de funcionamiento hasta la avería:

$$\int_0^8 v(t)\,dt = \int_0^8 e^{-0'01t}\,dt = \left[-\frac{1}{0'01}\cdot e^{-0'01}\right]_0^8 = 100\cdot(1-0'9231) = 7'69 \text{ horas}$$

Como el número de máquinas en funcionamiento en la alternativa 1 es de 38'64, una aproximación válida es suponer que al empezar el turno de noche ése es el número de máquinas en funcionamiento, por lo que la producción en horario de noche será:

$$7'69 \times 38'64 \times 300 \times 365 = 32'5 \text{ millones de mascotas}$$

Al finalizar el turno de noche, el número medio de máquinas averiadas será, aproximadamente:

$$(40 - 38'64) + 38'64\cdot(1 - 0'9231) = 4'33$$

por lo cual, a la producción que correspondería a las 40 máquinas (38'64 x 16 x 365 x 300 = 67'7 millones de piezas) se le ha de restar la correspondiente a la reparación de las máquinas averiadas:

$$\frac{19'32}{20} \times 4'33 \times 2'5 \times 300 \times 365 = 1'1 \text{ millones}$$

La producción total es, por consiguiente de:

$$32'5 + 67'7 - 1'1 \approx 99 \text{ millones}$$

por lo que habría añadir una máquina más.

En definitiva, los costes, en relación a la alternativa 1 sufren, aproximadamente (para mayor precisión se debería tener en cuenta otras repercusiones de la máquina adicional) las siguientes modificaciones:

+	1 máquina: 70 x 8.760 =	613.200
+	reparaciones a cargo de operarios adicionales: 4'33 x 365 x 200 =	316.090
-	costes personal turno de noche: 2 x 365 x 8 x 65 =	- 379.600
-	ahorro energético: 365 x 8 x 40 x 2 =	- 233.600
		316.090 *um*

El coste es superior, y la capacidad de producción prácticamente la misma, por lo que parece preferible la alternativa 1 frente a la 3 y la mejor de todas es, por tanto, la 2.

10.4 Enunciados

10.4.1 En una sección de un taller hay un cierto número de máquinas idénticas con las que se hace una operación de mecanizado de unas piezas. Cada operación exige un trabajo manual de preparación que dura 10 minutos a actividad normal, seguido del proceso automático de la máquina, que dura 11 minutos.

El coste de un operario es de 800 PTA/hora; el coste fijo de una máquina es de 200 PTA/hora y el de funcionamiento, de 50 PTA/pieza; el coste de las primeras materias y otros costes imputables es de 100 PTA/pieza.

a) ¿Cuántas máquinas hay que asignar a cada operario, a actividad normal, para que el coste de una pieza sea mínimo? ¿Cuál es este coste? ¿Y el beneficio por máquina y hora?

b) ¿A partir de qué valor del factor de actividad sería óptimo asignar una máquina más a cada operario? ¿A qué actividad correspondería en la escala centesimal? ¿Y en la escala Bedaux?

c) En el supuesto de que el factor de actividad fuese conocido a priori y que, para cada valor de la actividad se asignase a cada operario el número óptimo de máquinas, dibujar un gráfico que dé el número de piezas por operario y turno (7'5 horas de trabajo efectivo) en función del factor de actividad.

10.4.2 Una sección de una empresa consta de 12 máquinas idénticas que realizan, sobre las piezas que fabrica la empresa, una determinada operación.

Para realizar dicha operación, el operario alimenta la máquina (2 minutos), la pone en marcha y controla, durante medio minuto, el inicio de la actividad de la máquina. Ésta realiza la operación en 7 minutos y, al final de la misma, se para automáticamente y expulsa la pieza.

¿Cuántos operarios deben trabajar en dicha sección teniendo en cuenta que el coste horario de cada uno de ellos es de 800 *um*, el de cada máquina 1200 *um* y que el número de piezas a procesar por año no supondrá una limitación a la actividad del taller?

El gerente propone substituir la mano de obra por robots que alimenten las máquinas, lo cual supondría, únicamente, la eliminación del control del inicio de la actividad de la máquina una vez alimentada. Es decir, una vez alimentada una máquina, el robot puede, inmediatamente, pasar a alimentar la siguiente.

¿Es rentable la introducción de los robots si el coste horario de cada uno de ellos es superior en un 25% al coste horario de un operario?

¿Cuál es el incremento (porcentual) de beneficio obtenido por pieza si el precio de venta unitario de las mismas es de 1000 *um* y el coste del material y otras operaciones asciende a 580 *um* por pieza?

¿Es rentable la introducción de los robots para una producción anual (1600 horas de trabajo) de 120.000 piezas? ¿y para 110.000? ¿Por qué?

10.4.3 Una sección de una fábrica está constituida por un número indeterminado de máquinas iguales que producen todas ellas la misma pieza. Las piezas se obtienen unitariamente en cada máquina y suponen una cantidad de trabajo de la máquina de 2328 diezmilésimas de hora. Para la obtención de cada pieza, el operario debe realizar una serie de elementos de trabajo manual, de los cuales unos lo son a máquina parada y otros a máquina en marcha, y cuya duración, a un ritmo de actividad normal, es de 528 diezmilésimas de hora para los primeros y de 312 para los segundos.

Sabiendo que el coste, para la empresa, de los operarios de esta sección es de 1000 PTA/h y que es cuatro veces superior al coste horario de la máquina, determinar el número de máquinas a asignar a cada operario.

En la negociación del convenio colectivo, los trabajadores han ofrecido a la empresa la posibilidad de garantizar un ritmo de actividad 120 (frente al ritmo actual de 100) si la contrapartida empresarial es suficiente.

¿Debería modificar la empresa el número de máquinas a asignar a cada operario?

Suponiendo que el sindicato acepte la nueva asignación de máquinas, ¿cuál es el máximo incremento, en el coste horario por operario, que puede admitir la empresa sin encarecer el coste por pieza?

Los sindicatos y la empresa deciden pactar la actividad 120 junto con una prima fija tal que el incremento del beneficio horario que la empresa obtiene de cada trabajador sea igual al incremento del coste horario del trabajador que supone dicha prima. ¿Cuál es dicho incremento, teniendo en cuenta que el margen de beneficio de la pieza sin considerar el coste de la operación en estas máquinas, es de 200 PTA?

10.4.4 Dé su opinión, con el apoyo de los modelos matemáticos que considere oportunos, sobre las afirmaciones contenidas en los siguientes textos:

a) "Las primeras industrias espaciales serán más convencionales. Materias primas compradas en la Tierra o en asentamientos humanos del espacio serán transformadas por máquinas supervisadas por personas y vendidas con beneficios. El alto coste de mantener personas en el espacio asegurará que haya siempre más máquinas por persona en el espacio que en la Tierra. A medida que las máquinas resulten más capaces, la economía favorecerá una relación máquina/persona más alta todavía. El número de personas no disminuirá necesariamente, pero las máquinas se multiplicarán más deprisa"

b) "Cuando se verifican las hipótesis de Ashcroft, se podrá determinar fácilmente, de una manera aproximada, el número óptimo de máquinas de las cuales se ha de encargar el operario en el supuesto de que éste desarrolle la actividad óptima (140, en la escala centesimal): sólo hará falta multiplicar por el factor de actividad, 1'4, la inversa de parámetro p de Ashcroft calculado con el tiempo normal representativo. Este procedimiento se basa en el hecho de que p expresa la proporción del tiempo de trabajo manual en relación al tiempo de máquina, para $N=1$, para cuyo caso $1/p$ es el número que satura aproximadamente al operario (de hecho la saturación será inferior al 100%, porque las máquinas averiadas no pueden generar nuevas averías hasta que no son reparadas)."