5.3 Problemas resueltos

5.3.1 *Análisis A-B-C*

Nos han encomendado la gestión de un stock de diez artículos, de los que conocemos los datos siguientes:

Artículo	Consumo anual medio (unidades)	Valor unitario (PTA/unidad)
A	8.000	50
B	1.750	200
C	50.000	2
D	400	100
E	5.000	7
F	2.000	10
G	4.000	4
H	750	20
I	2.800	5
J	1.000	10

Fig. 5.3.1

¿De cuáles de estos artículos deberíamos recomendar una gestión por punto de pedido, y de cuáles una gestión por aprovisionamiento periódico y cobertura?

En ausencia de otras informaciones, lo mejor que se puede hacer es considerar su importancia económica relativa, para lo cual emplearemos la técnica del análisis *ABC*. Calculemos, por tanto, el valor económico del consumo medio de cada artículo, y el porcentaje que el mismo representa sobre el valor del consumo total:

Artículo	Consumo medio	Valor unitario	Valor consumo medio	% sobre total
A	8.000	50	400.000	40,0
B	1.750	200	350.000	35,0
C	50.000	2	100.000	10,0
D	400	100	40.000	4,0
E	5.000	7	35.000	3,5
F	2.000	10	20.000	2,0
G	4.000	4	16.000	1,6
H	750	20	15.000	1,5
I	2.800	5	14.000	1,4
J	1.800	10	10.000	1,0
		TOTALES:	1,000.000	100,0%

Fig. 5.3.2

En esta tabla se observa que los artículos ya vienen dados en el enunciado en el orden de mayor a menor valor medio; si no fuera así, deberíamos ordenarlos antes de seguir.

Se observa también que la distribución del valor total del consumo entre los diversos artículos sigue muy aproximadamente la distribución de Pareto: tres artículos (el 30% del total) acumulan ellos solos el 85% del valor del consumo. Tal cosa significa que los artículos realmente importantes y que exigen un control minucioso están bien determinados: son en concreto los artículos *A*, *B* y *C*. Para ellos será conveniente una gestión por punto de pedido, y para el resto bastará con una gestión por aprovisionamiento periódico (cobertura), menos cara que la anterior.

En este caso, queda la duda del artículo *C* que podría incluirse entre los de gestión por cobertura, por ser relativamente (respecto a *A* y *B*) poco importante; además, el hecho de que su precio unitario sea bajo y la cantidad consumida alta, puede inducir a abonar esta decisión, aunque debe considerarse que esta clase de razonamiento no es estrictamente correcto, puesto que un error (porcentualmente) pequeño puede significar muchas unidades y por tanto una cantidad de dinero apreciable. Con todo, no es incorrecto en éste caso considerar a *C* como "el primero de los pequeños".

En resumen, la respuesta es:

- Gestión por punto de pedido: *A*, *B* **y (posiblemente)** *C*

- Gestión por aprovisionamiento periódico y cobertura: *D, E, F, G, H, I*, **y** *J*.

5.3.2 *Varios artículos fabricados en la misma máquina*

Un taller trabaja 220 días al año, y puede producir tres clases de artículos, cuyos datos son según sigue:

	Producto *a*	**Producto** *b*	**Producto** *c*
Demanda anual (unidades)	**30.000**	**150.000**	**60.000**
Producción (unidades/día)	**6000**	**1.500**	**600**
Coste producción (PTA/unidad)	**500**	**40**	**4.000**
Tiempo preparación (días/lote)	**2**	**5**	**1**

Fig. 5.3.3

Lanzar un lote cuesta 5.000 PTA independientemente del producto a fabricar, y el coste anual de posesión es el 20% del coste variable de producción.

a) ¿Cuántos lotes y de qué cantidad haríamos en un año si no considerásemos ninguna limitación?

b) Teniendo en cuenta las limitaciones existentes, ¿cuántos lotes y de qué cantidad lanzaríamos de cada producto?

a)
Considerando el problema sin limitaciones, tenemos tres artículos independientes entre sí, para cada uno de los cuales se cumplen las condiciones de la fórmula de Wilson, si bien con la particularidad de que el lote no entra de una vez en el almacén, sino a un ritmo de *P* **unidades por unidad de tiempo. Obviamente, debe cumplirse que** $P > D$, **siendo** *D* **la demanda o consumo por unidad de tiempo. En estas condiciones, la fórmula de Wilson resulta ser:**

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot CL \cdot D}{CS \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right)}}$$ **Tamaño de lote económico**

$$T = \frac{Q}{D} = \sqrt{\frac{2 \cdot CL}{D \cdot CS \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right)}}$$ **Ciclo de stock = Tiempo entre lotes**

$$N = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{D \cdot CS \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right)}{2 \cdot CL}}$$ **Número de lotes por unidad de tiempo**

y, sustituyendo los valores dados, resulta:

Q_a = **1.752 unidades**	Q_b = **18.540 unidades**	Q_c = **1.173 unidades**
T_a = **0,0584 años**	T_b = **0,1236 años**	T_c = **0,0195 años**
N_a = **17,12 lotes/año**	N_b = **8,09 lotes/año**	N_c = **51,17 lotes/año**

Fig. 5.3.4

valores que pueden redondearse para que el número de lotes anuales sea entero:

Producción *a*:	**17**	**lotes de**	**1.765**	**unidades cada uno**
Producción *b*:	**8**	**lotes de**	**18.540**	**unidades cada uno**
Producción *c*:	**51**	**lotes de**	**1.176**	**unidades cada uno**

Fig. 5.3.5

Estos redondeos no son obligatorios (de hecho, esta solución redondeada no es óptima), pero la diferencia con el óptimo es muy pequeña, y parece lógico hacerla, siendo el año la unidad natural de planificación.

b)

La limitación existente en el problema, y que hace inviable la anterior solución, deriva del hecho de que los tres productos han de fabricarse en el mismo taller, y por consiguiente han de competir por el recurso "horas de taller".

Consideremos entonces un ciclo de planificación en el que producimos un lote de cada artículo. Puesto que todos los artículos tienen ahora el mismo ciclo de stock (T), los lotes serán proporcionales a las demandas anuales:

$$Q_j = T \cdot D_j \quad \textbf{para todo } j$$

El valor óptimo de T **es:**

$$T^{0} = \sqrt{\frac{2 \cdot \sum_{j=1}^{n} CL_j}{\sum_{j=1}^{n} D_j \cdot CS_j \cdot \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

Este valor puede, sin embargo, no ser posible; en efecto, el período T **ha de ser suficiente para producir todo lo que haya que producir, y preparar las máquinas para hacer un lote de cada artículo. Debe cumplirse la condición para ello:**

$$\sum_{j=1}^{n} TP_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{P_j} \cdot T \leq T$$

(en rigor, una condición análoga también deben cumplirla en el caso (a) los períodos de cada artículo individualmente). Si T^0 **no cumple la condición, habrá que tomar un ciclo de producción y de stocks que sí la cumpla y sea lo más próximo posible a** T^0**; en este caso,** T^* **deberá ser:**

$$T^{*} = T^{/} = \frac{\sum_{j=1}^{n} TP_j}{1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{P_j}}$$

y tanto en un caso como en el otro, los tamaños de lote serán:

$$Q_j^* = D_j \cdot T^*$$

Resumiendo, el proceso de cálculo será el siguiente:

1) Calcular $$T^I = \frac{\sum_{j=1}^{n} TP_j}{1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{P_j}}$$

2) Calcular $$T^0 = \sqrt{\frac{2 \cdot \sum_{j=1}^{n} CL_j}{\sum_{j=1}^{n} D_j \cdot CS_j \cdot \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}}$$

3) Tomar $T^* = MAX\ (T^I, T^0)$

4) Establecer $Q_j^* = T^* \cdot D_j$

En nuestro caso, los datos numéricos son:

	a	*b*	*c*	
TP_j	$\frac{2}{220}$	$\frac{5}{220}$	$\frac{1}{220}$	**años**
D_j	30.000	150.000	60.000	**unidades/año**
P_j	1.320.000	330.000	132.000	**unidades/año**
CL_j	5.000	5.000	5.000	**PTA/lote**
CS_j	100	8	800	**PTA/unidad-año**

Fig. 5.3.6

Entonces:

$$T^{I} = \mathbf{0{,}5333\ años} \qquad T^{\mathbf{0}} = \mathbf{0{,}0240\ años} \qquad T^{*} = T^{I} = \mathbf{0{,}5333\ años}$$

$$Q_a = \mathbf{0{,}5333 \times 30.000 = 16.000\ unidades}$$

$$Q_b = \mathbf{0{,}5333 \times 150.000 = 80.000\ unidades}$$

$$Q_c = \mathbf{0{,}5333 \times 60.000 = 32.000\ unidades}$$

Fig. 5.3.7

El número de *ciclos / año* **será:** $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{0{,}5333}} = \mathbf{1{,}875}$

5.3.3 *Modelos aleatorios 1-período*

El baile-diversión de moda para el próximo verano será el Squeeze-Woo, para cuya práctica se requiere un adminículo llamado *squeezer*. **Los Grandes Almacenes Servitius planifican su política de adquisición de los** *squeezer* **cara a la temporada, y prevén que la demanda durante la misma será la siguiente:**

Mes	D. esperada	σ
Marzo	200	40
Abril	1.300	200
Mayo	13.500	460
Junio	75.000	1.000
Julio	150.000	3.000
Agosto	115.000	3.000
Septiembre	5.000	1.000

Fig. 5.3.8

La demanda esperada en cada uno de los meses es independiente de la de los demás meses, y en cada uno de ellos se ajustará aceptablemente a una ley normal, con los parámetros que se han indicado. El precio de venta será de 400 PTA/unidad, y los *squeezer* **que queden en stock al final de la temporada se podrán saldar al precio de 200 PTA cada uno.**

Existen dos formas de aprovisionamiento posibles: importar o fabricar en los talleres propios. Si se importa, el precio de compra es de 250 PTA/unidad, con lo que llega la totalidad de la cantidad comprada antes del 1 de marzo. No es posible hacer un segundo pedido, y en concepto de gastos de administración, aduanas, etc se prevé un total de 150.000 PTA.

Por contra, la fabricación propia implica realizar una inversión de 25 millones al inicio del año, la cual debe haber sido recuperada al final de la campaña con un 10% de interés, según las normas financieras de la compañía. Esta inversión permite un ritmo de fabricación de 90.000 unidades/mes, efectuándose la primera entrega (90.000 *squeezer***) en 1 de marzo. Puede fabricarse tanta cantidad como se desee (al ritmo mencionado), pero una vez interrumpida la producción las instalaciones se desmontarán y ya no será posible volver a fabricar más** *squeezer* **dentro del tiempo disponible. El coste unitario de fabricación sería de 150 PTA.**

a) ¿Cuál es la política más adecuada?

b) ¿Qué sucedería si el precio al que se pueden saldar los *squeezer* **sobrantes a fin de campaña fuese sólo de 100 PTA/unidad?**

a)

Examinemos primero el aprovisionamiento por importación.

Puesto que solamente se puede hacer un pedido, se trata de un caso 1-período. La demanda total, por ser suma de demandas normales independientes, será también normal:

$$\text{D. esperada} = 200 + 1.300 + 13.500 + 75.000 + 150.000 + 115.000 + 5.000 = 360.000 \; un.$$

$$\sigma \text{ total} = \left[40^2 + 200^2 + 460^2 + 1.000^2 + 3.000^2 + 3.000^2 + 10.000^2\right]^{\frac{1}{2}} = 4.500 \; un.$$

Entonces, la cantidad a pedir S_i^* será tal que la probabilidad de que la demanda la supere sea:

$$H(S_i^*) = \frac{CA + CS}{V + CS} = \frac{\mathbf{250 - 200}}{\mathbf{400 - 200}} = \mathbf{0{,}25}$$

Buscando en las tablas de la ley normal, se encuentra que:

$$H(t) = \mathbf{0{,}25} \Rightarrow t = \mathbf{0{,}6745}$$

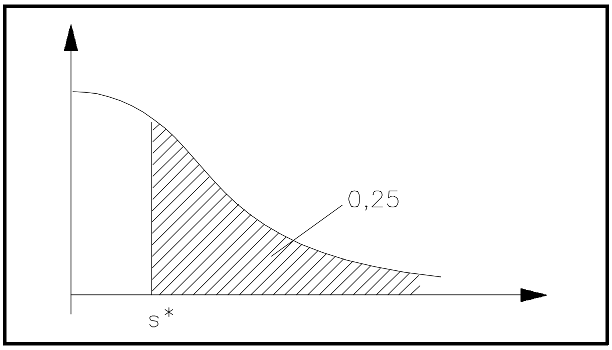

Fig. 5.3.9

Por tanto:

$$S_i^* = \mathbf{360.000} + \mathbf{(0{,}6745 \times 4.500)} = \mathbf{363.035 \text{ unidades}}$$

Si importamos, la cantidad a comprar es de 363.035 unidades.

El beneficio esperado es:

$$B_i = \int_{\mathbf{0}}^{S_i^*} \left[(V \cdot x) - CS \cdot (S_i^* - x) \right] \cdot h(x)\, dx + \int_{S_i^*}^{\infty} V \cdot S_i^* \cdot h(x) \cdot dx - CL - CA \cdot S_i^*$$

donde *h(x)* **es la ley que rige la demanda (aquí aproximadamente normal).**

Veamos cómo calcular estas integrales:

Los ingresos por ventas son:

$$\int_{\mathbf{0}}^{S_i^*} V \cdot x \cdot h(x) \cdot dx + \int_{S_i^*}^{\infty} V \cdot S_i^* \cdot h(x) \cdot dx = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} V \cdot x \cdot h(x) \cdot dx - \int_{S_i^*}^{\infty} V \cdot x \cdot h \cdot (x) \cdot dx + \int_{S_i^*}^{\infty} V \cdot S_i^* \cdot h(x) \cdot dx$$

$$= V \cdot X_m - PV \cdot \int_{S_i^*}^{\infty} (x - S_i^*) \cdot h(x) \cdot dx = V \cdot X_m - V \cdot Y_m(S_i^*)$$

donde X_m es la demanda media total, e $Y_m(S_i^*)$ las ventas que se espera que no podrán realizarse (hemos puesto límite inferior de la primera integral 0 debido a que una demanda negativa no tiene significado físico, por lo que $h(x)$ = 0 para x < 0; al aproximar $h(x)$ por la ley normal podremos considerar que dicho límite es -∞ al buscar los resultados numéricos). Se cumple, en el caso de muchas leyes entre las que está la ley normal, que:

$$Y_m(S_i^*) = \sigma \cdot \ (t) \qquad \textbf{con} \qquad t = \frac{(S_i^* - X_m)}{\sigma}$$

es una función determinable a partir de la ley, en el caso de la ley normal:

$$(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{r}^{\infty} (r - t) \cdot e^{\left(\frac{r^2}{2}\right)}$$

que está tabulada en el Anexo 1 (y un extracto en la tabla de la *figura 5.1.5.3*).

En nuestro caso, X_m = 360.000 y t = 0,6745 => $\Phi(t)$ = 0,1492; por lo tanto, los ingresos esperados son:

$$\mathbf{400 \cdot (360.000 - 4.500 \times 0{,}1492) = 143.731.000\ PTA}$$

Veamos ahora la integral correspondiente al coste de posesión:

$$\int_0^{S_i^*} CS \cdot (S_i^* - x) \cdot h(x) \cdot dx = \int_0^{\infty} CS \cdot (S_i^* - x) \cdot h(x) \cdot dx - \int_{S_i^*}^{\infty} CS(S_i^* - x) \cdot h(x) \cdot dx =$$

$$= CS \int_0^{\infty} S_i^* \cdot h(x) \cdot dx - CS \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot h(x) \cdot dx + CS \int_{S_i^*}^{\infty} (S_i^* - x) \cdot h(x) \cdot dx =$$

$$= CS \cdot \left[S_i^* - X_m + Y_m(S_i^*)\right] = -\mathbf{200 \times [363.035 - 360.000 + 4.500 \times 0{,}1492] = -741.330\ PTA}$$

valor que esperamos recuperar al saldar el sobrante.

Por tanto, el beneficio esperado es:

$$B_i = \mathbf{143.731.440 - 150.000 - 250 \times 363.035 + 741.330 = 53.564.020\ PTA}$$

Estudiemos ahora la *fabricación propia***:**

Estrictamente hablando, este caso no es 1-período, puesto que aún no se han recibido todas las unidades al empezar la campaña y, además, mientras no hayamos interrumpido la producción, existe la posibilidad de lanzar un nuevo lote aunque ya esté iniciada la campaña.

Ahora bien, dado que el costo de fabricación es CA **= 150, y el de posesión de los sobrantes,** CS **= -200; no existe límite a la cantidad que nos interesa fabricar, puesto que aun saldándolo se obtiene beneficio. Fabricaremos, por tanto, todo lo posible, es decir:**

$$S_f^* = \mathbf{8 \times 90.000} = \mathbf{720.000 \text{ unidades}}$$

contando *8 entregas mensuales de 90.000 unidades***, cada día 1 desde marzo hasta octubre.**

El beneficio esperado será entonces:

$$B_f = \int_0^{S_f^*} \left[(V \cdot x) \cdot CS \cdot \left(S_f^* - x \right) \right] \cdot h(x) \cdot dx + \int_{S_f^*}^{\infty} V \cdot S_f^* \cdot h(x) \cdot dx - CL - CA \cdot S_f^*$$

y con razonamientos análogos a los anteriores,

$$B_f = V \cdot X_m - V \cdot Y_m(S_f^*) - CS \cdot \left[S_f^* - X_m + Y_m(S_f^*) \right]$$

Ahora, sin embargo, ocurre que

$$Y_m(S_f^*) = H(S_f^*) = \mathbf{0}$$

ya que producimos tanta cantidad que es prácticamente imposible no servir toda la demanda. Por lo tanto,

$$\mathbf{400 \times 360.000 + 200 \times (720.000 - 360.000) - 25.000.000 \times 1{,}10 - 150 \times 720.0}$$

$$\mathbf{144.000.000 + 72.000.000 - 27.500.000 - 108.000.000 = 80.500.000 \text{ PTA}}$$

Puesto que B_f **=** $\mathbf{80{,}5 \times 10^6}$ **>** $B_i \approx \mathbf{53{,}6 \times 10^6}$ **interesa** *fabricar* **los** *squeezer***.**

¿Es interesante adquirir de *ambos* **orígenes a la vez? Sea y la cantidad importada, y S la cantidad total adquirida. Entonces:**

$$B = \int_0^S [400 \cdot x + 200 \cdot (S - x)] \cdot h(x) \cdot dx + \int_S^\infty 400 \cdot S \cdot h(x) \cdot dx - 150.000 - 250 \cdot y -$$

$$- 25.000.000 \cdot 1{,}1 - 150 \cdot (S - y)$$

Derivando *B* respecto de *S* resulta:

$$200 \cdot H(S) + 50 > 0$$

y derivando respecto de *y*:

$$-250 + 150 = -100 < 0$$

Es decir, que *S* debe ser tan grande como sea posible (derivada positiva), y a la vez, y debe hacerse tan pequeño como se pueda (derivada negativa); por lo tanto:

$$S = 720.000 \qquad y = 0 \qquad \text{No conviene importar}$$

b)

El caso es exactamente igual, sólo que ahora el precio de adquisición es en ambos casos menor que el precio de saldo, y por lo tanto (caso fabricación) ya no interesa hacer tantas unidades como se pueda, sino una cantidad limitada.

Los cálculos son los mismos, y los principales resultados numéricos son (una primera aproximación sólo en el caso de la fabricación, que en rigor no conduce a una decisión única de la cantidad a fabricar, sino adaptable en el tiempo de acuerdo a los resultados):

	FABRICACIÓN	IMPORTACIÓN
$H(S^*)$	0,16667	0,50000
t	0,96740	0,00000
S^*	364.353	360.000
$\Phi(t)$	0,08862	0,39894
$Y_m(S^*)$	398,79	1.795,23
B	62.162.713	53.311.431

Fig. 5.3.10

Sigue siendo más interesante *fabricar*, pese a que el beneficio disminuye mucho más que en el caso de importación, en que casi no varía.

5.3.4 *Modelos aleatorios n-períodos*

Una tienda de venta al detalle desea controlar adecuadamente el stock de diez de los artículos que comercializa. Los datos disponibles son los siguientes:

Artículo	*TP*	**Demanda** *D*	*σ*	**Precio Compra**	*L*
A	**1**	**19.900**	**1.000**	**3,30**	**1,5**
B	**2**	**750**	**25**	**25,00**	**1,0**
C	**1**	**430.200**	**6.500**	**1,60**	**2,5**
D	**2**	**1.860**	**200**	**38,00**	**1,5**
E	**1**	**128.640**	**3.000**	**13,00**	**0,5**
F	**1**	**33.200**	**1.200**	**5,60**	**0,1**
G	**2**	**17.920**	**800**	**2,80**	**3,0**
H	**2**	**1.360**	**190**	**71,00**	**0,5**
I	**1**	**1.860**	**130**	**3,30**	**1,5**
J	**2**	**97.500**	**2.000**	**156,00**	**0,5**

Fig.5.3.11

En la columna *TP* **figura el tipo de proveedor: los de tipo 1 permiten que se les pida telefónicamente en cualquier momento la cantidad que se desee, y lo servirán en un plazo que se indica (en semanas) en la columna** *L***. De los proveedores de tipo 2 pasa el representante cada semana, y el pedido que se le haga será servido también** *L* **semanas más tarde. La demanda semanal es en todos los artículos normal, de media** *D* **unidades/semana y desviación tipo σ. Se sabe que la demanda diaria es asimismo normal, y que no existe estacionalidad alguna dentro de la semana. El coste de pasar un pedido es de 50 PTA para los proveedores de tipo 1, mientras que para los de tipo 2 es de 15 PTA. En concepto de coste de posesión se carga anualmente un 20% del stock medio valorado a coste de compra. La demanda que no se puede servir por falta de stock se pierde.**

1) **Para hacer una primera aproximación al problema, se desea calcular un tamaño de lote y el valor medio del stock mediante la fórmula de Wilson.**

2) **En base a los datos anteriores, calcular la importancia relativa de cada artículo en cuanto al análisis de la composición del stock.**

3) **Para los artículos más importantes hallados en el apartado anterior, determinar la política de stocks más adecuada, y fijar los parámetros de la misma, teniendo en cuenta las limitaciones existentes, y que no se desea que haya más de un 5% de ciclos con ruptura de stock.**

1)

La fórmula de Wilson es la siguiente:

$$Q_w = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot CL}{CS}}$$

En este caso, CS (coste de posesión) es proporcional a CA (coste de adquisición), y debemos establecerlo de manera que sea coherente con las unidades en que se expresa la demanda. Puesto que ésta la conocemos por semana, deberemos tomar $CS = \frac{0{,}2 \cdot CA}{52}$. Como demanda tomaremos, naturalmente, el valor medio, y para el coste de lanzamiento (CL) el que corresponda al tipo de proveedor de que se trate. Con estos datos, el resultado es para cada artículo:

$$Q_w(A) = 12.521;\ Q_w(B) = 484;\ Q_w(C) = 83.611;\ Q_w(D) = 618;\ Q_w(E) = 16.040$$

$$Q_w(F) = 12.415;\ Q_w(G) = 7.065;\ Q_w(H) = 387;\ Q_w(I) = 1.014;\ Q_w(J) = 2.208$$

Podemos preguntarnos acerca de la validez de este tamaño de lote en el caso que nos presenta el enunciado. Desde luego, esto corresponde a la simplificación de prescindir de la naturaleza aleatoria de la demanda y considerarla determinista. Con esta simplificación, ¿cuál será la política a seguir en cada caso?

Para los artículos con $TP = 1$, bastaría con pedir el tamaño de lote Q_w cuando el stock disponible (es decir, el real o físico más los pedidos en curso) sea inferior a la demanda que habrá mientras nos sirven el pedido, es decir la cifra resultante de multiplicar las columnas D y L del enunciado.

Para los artículos con $TP = 2$, la situación es ligeramente distinta: puesto que sólo se puede hacer un pedido por semana, se ha de prever, en cada momento en que se puede cursar un pedido, si el stock bajará de lo necesario para cubrir la demanda en el plazo de entrega, antes de que haya oportunidad de hacer un nuevo pedido. Por lo tanto, si el stock físico más los pedidos pendientes suman una cantidad inferior a la demanda semanal multiplicada por $L+1$, se deberá pasar pedido. ¿Por qué tamaño? Pues por el menor múltiplo entero de Q_w tal que el stock físico más los pedidos pendientes más el nuevo pedido sumen más que $D \cdot (L+1)$.

Con estas políticas de gestión de stocks, el stock físico (supuesto todo determinista) oscilará entre 0 y Q_w, y por lo tanto, el valor medio del stock será $\frac{CA \cdot Q_w}{2}$.

2)

Para determinar la importancia de cada artículo, cara al control de stocks, utilizaremos el análisis *A-B-C*. Para ello, ordenaremos los artículos según el valor de su stock medio, de mayor a menor:

Orden	Artículo	Valor medio	%	Acumulado	% Acumulado
1	*J*	172.219	37,11	172.219	37,11
2	*E*	104.260	22,47	276.479	59,58
3	*C*	66.889	14,41	343.368	74,00
4	*F*	34.763	7,49	378.131	81,49
5	*I*	23.838	5,14	401.969	86,63
6	*A*	20.660	4,45	422.629	91,08
7	*H*	13.722	2,96	436.351	94,04
8	*D*	11.740	2,53	448.091	96,57
9	*G*	9.892	2,13	457.983	98,70
10	*B*	6.047	1,30	464.030	100,00

Fig. 5.3.12

A la vista de la tabla, es claro que los artículos *J* y *E* son los más importantes, pues ellos solos significan casi el 60% del valor total; en consecuencia, constituyen la categoría *A* del stock, y les corresponde la mayor atención.

Menos clara aparece la definición de la categoría *B*. El artículo *C* está sin duda en ella, de la misma forma que del *I* al final se deben catalogar como *C*; el *F* ocupa una posición intermedia: su importancia es relativamente pequeña (prácticamente la mitad que el *C*), pero es necesario su concurso para superar tanto la barrera del 75% como la del 80% del valor total, de manera que tanto puede clasificarse *B* como *C*. Es una cuestión de criterio.

3)
Vamos a establecer una política de stocks para los dos artículos de clase *A*, es decir, para *J* y *E*.

Artículo J:

El artículo *J* tiene un proveedor de tipo 2, y por lo tanto no se puede hacer un pedido en cualquier momento, sino sólo cuando se recibe la visita del vendedor. Ello exige una política de *aprovisionamiento periódico*.

De acuerdo con las condiciones del enunciado, el índice de calidad de servicio (proporción de ciclos con ruptura o, lo que es igual, probabilidad de que en un ciclo cualquiera no se pueda servir por ruptura de stock a los clientes), no debe ser mayor que 0,05. Puesto que la demanda es normal, examinamos las tablas de la ley normal, y hallamos que el valor de t = 1,645. Este valor corresponde a una probabilidad de que la variable normal sea mayor que él precisamente del 5%.

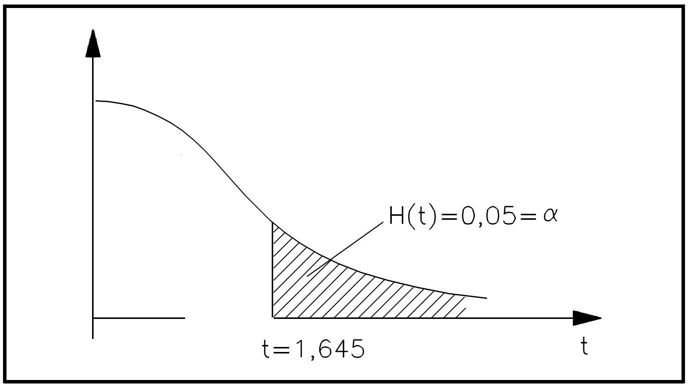

Fig. 5.3.13

La periodicidad con la que podemos aprovisionar es T = 1 semana, y el plazo de entrega, L = 0,5 semanas. Por tanto, la demanda a cubrir en cada pedido (demanda media) es:

$$D\cdot(T+L) = 97.500 \times (1+0,5) = 146.250 \text{ unidades}$$

y el nivel de cobertura será:

$$S = D\cdot(T+L) + t\cdot \mathrm{F}\cdot\sqrt{T+L} = 146.250 + \left(1{,}645\cdot 2.000\cdot\sqrt{1{,}5}\right) = 150.279 \text{ unid}$$

Es decir, que la política de cobertura óptima será *pedir siempre la diferencia entre el stock disponible y 150.279 unidades* **(recuérdese que el stock disponible es la suma del stock físico más los pedidos pendientes de recibir).**

Artículo E:

Para este artículo podemos establecer una política de punto de pedido, puesto que el proveedor permite hacer un pedido telefónico en cualquier momento. La demanda media durante el plazo de entrega es:

$$mL = D\cdot L = \mathbf{128.640 \times 0{,}50} = \mathbf{64.320} \textbf{ unidades}$$

esta demanda es normal, puesto que la demanda de cada día lo es también, y su desviación tipo vale:

$$\sigma L = \sigma\cdot\sqrt{L} = \mathbf{3.000}\cdot\sqrt{\mathbf{0{,}5}} = \mathbf{2.121{,}32} \textbf{ unidades}$$

También en este caso se desea que la proporción de ciclos con ruptura (α) no supere el 5%, y ya se ha visto anteriormente que el valor correspondiente en las tablas de la ley normal es t **= 1,645. Por tanto, el punto de pedido será:**

$$s = mL + t\cdot\sigma L = \mathbf{64.320} + \mathbf{1{,}645}\cdot\mathbf{2.121{,}32} = \mathbf{67.809{,}57} \approx \mathbf{67.810} \textbf{ unidades}$$

Luego la política de punto de pedido óptima será *pedir 16.040 unidades cada vez que el stock disponible descienda de 67.810 unidades*.

El tamaño de lote es el de Wilson porque, al no haberse especificado coste de ruptura, no hay ningún factor de coste aparte de los definidos al calcular dicha fórmula; el nivel de servicio sólo influye en el nivel de reaprovisionamiento (punto de pedido).

5.3.5 *Plazo de entrega aleatorio. Método heurístico*

QUASIMODO SPORTS estudia la gestión de algunos productos de consumo constante durante los días laborables (250 días al año) pero con aprovisionamiento incierto debido a la fluctuación del plazo de entrega. En todos los casos puede considerarse que el plazo de entrega L **resulta de la suma de dos valores** $L1$ **y** $L2$**, donde** $L1$ **es una constante y** $L2$

es una variable aleatoria. El coste fijo asociado a pasar un pedido es de 2.000 *um*. La demanda llegada en ruptura de stock es atendida a partir de fuentes de aprovisionamiento más caras y a envíos urgentes; se considera que en dichas circunstancias no existe coste fijo de aprovisionamiento pero el variable se incrementa, respecto al normal, en un 100%. El coste de posesión de stock se calcula mediante la tasa del 25% anual.

Considérense los cuatro artículos siguientes cuya gestión desea llevarse por punto de pedido:

Artículo	Consumo diario (unidades)	Precio compra	Precio venta	L1 (días)	)))))))) L2))))))))) Ley	media (días)
		(*um*/un)				
ALFA	10	250	400	3	POISSON	2
BETA	8	300	500	3	UNIFORME (0 a 4)	2
GAMMA	6	350	600	3	LEY DISCRETA DADA (*)	2
DELTA	5	400	650	3	BINOMIAL (w = 0,2 ; n = 10)	2

(*)					
valor (días)	0	1	2	3	4
probabilidad	0,15	0,2	0,25	0,3	0,1

Fig.5.3.14

Determinar para cada uno de los cuatro artículos el punto de pedido y el lote de pedido que conducen a la gestión de coste mínimo así como el número medio anual de unidades suministradas por el procedimiento extraordinario, el número anual medio de rupturas y el stock medio, correspondientes.

ALFA:

disponemos de los siguientes datos:

$$D = 250 \text{ x } 10 = 2.500; \; CL = 2.000; \; CA = 250; \; CR = CA = 250; \; CS = 0{,}25 \text{ x } 250 = 62{,}5$$

puesto que $EM[L] = L1 + EM[L2] = 3 + 2 = 5$ días, $mL = 5 \times 10 = 50$

La demanda durante el plazo de entrega es aleatoria ya que, a pesar de que el consumo diario es constante, el plazo de entrega es aleatorio:

$$x = \mathbf{10 \times (3} + l\mathbf{)} = \mathbf{30} + \mathbf{10} \cdot l$$

donde / sigue una ley de Poisson de media 2. Deducimos:

$$H(s) = \textbf{Prob } \{x > s\} = \textbf{Prob } \{30 + 10 \cdot l > s\}$$

$$= \textbf{Prob } \left\{ l > -3 + \frac{s}{10} \right\} = HP\left(-3 + \frac{s}{10} \right)$$

siendo *HP(k)* **la probabilidad de sobrepasar** *k* **en una distribución de Poisson de media 2 (que no tendrá mucho significado si s no es múltiplo de 10 mayor, o igual, que 30). Análogamente:**

$$y(s) = \sum_{x=s}^{\infty} (x - s) \cdot h(x) = \sum_{l=-3+\frac{s}{10}}^{\infty} (30 + 10 \cdot l - s) \cdot h(30 + 10 \cdot l) = 10 \cdot \sum_{l=-3+\frac{s}{10}}^{\infty} \left[l - \left(-3 + \frac{s}{10} \right) \right] \cdot hP(l)$$

$$= 10 \cdot \left[2 \cdot HP\left(-4 + \frac{s}{10} \right) - \left(-3 + \frac{s}{10} \right) \cdot HP\left(-3 + \frac{s}{10} \right) \right]$$

De donde:

s	**=**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**
l	**=**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
H(s)	**=**	**0,8647**	**0,5940**	**0,3233**	**0,1429**	**0,0527**	**0,0166**	**0,0045**	**0,0011**
y(s)	**=**	**20**	**11,354**	**5,414**	**2,179**	**0,750**	**0,224**	**0,062**	**0,013**

iteración 0

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 2.500 \times 2.000}{62{,}5}} = 400$$

$$H(s) \leq \frac{400 \times 62{,}5}{2.500 \times 250 + 400 \times 62{,}5} = 0{,}03846 \Rightarrow s = 80$$

$$y(80) = 0{,}224$$

iteración 1

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 2.500 \times [2.000 + 250 \times 0{,}224]}{62{,}5}} = 405{,}56$$

suponiendo que Q debe coincidir razonablemente con el consumo durante un número entero de días tomaremos 410

$$H(s) \le \frac{410 \times 62{,}5}{2.500 \times 250 + 410 \times 62{,}5} = 0{,}03939 \Rightarrow s = 80$$

ya hemos alcanzado la convergencia.

$Q = 410$

$s = 80$

$$\text{nº medio anual de unidades extra} = \frac{2.500}{410 + 0{,}224} \times 0{,}224 = 1{,}3651$$

$$\text{nº medio anual de rupturas} = \frac{2.500}{410 + 0{,}224} \times 0{,}0166 = 0{,}1037$$

$$sm = 80 - 50 + 0{,}224 + \frac{410}{2} = 235{,}224$$

BETA:

$D = 250 \text{ x } 8 = 2.000$; $CL = 2.000$; $CA = 300$; $CR = 300$; $CS = 75$; $mL = (3 + 2)\cdot 8 = 40$

En este caso la ley es más simple de establecer:

s	=	24	32	40	48	56
l	=	0	1	2	3	4
$H(s)$	=	0,8	0,6	0,4	0,2	0,0
$y(s)$	=	16,0	9,6	4,8	1,6	0,0

iteración 0

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 2.000 \times 2.000}{75}} = 326{,}60 \Rightarrow 328$$

$$H(s) \le \frac{328 \times 75}{2.000 \times 300 + 328 \times 75} = 0{,}03939 \Rightarrow s = 56$$

$$y(56) = 0$$

ya hemos alcanzado la convergencia

$Q = 328$
$s = 56$

$$\text{nº medio anual de unidades extra} = \frac{2.000}{328+0} \times 0 = 0$$

$$\text{nº medio anual de rupturas} = \frac{2.000}{328+0} \times 0 = 0$$

$$sm = 56 - 40 + 0 + \frac{328}{2} = 180$$

GAMMA:

$D = 250 \text{ x } 6 = 1.500$; $CL = 2.000$; $CA = 350$; $CR = 350$; $CS = 87{,}5$; $mL = (3+2)\cdot 6 = 30$

s	=	18	24	30	36	42
l	=	0	1	2	3	4
$H(s)$	=	0,85	0,65	0,4	0,1	0,0
$y(s)$	=	12	6,9	3,0	0,6	0,0

iteración 0

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 1.500 \times 2.000}{87{,}5}} = 261{,}86 \Rightarrow 264$$

$$H(s) \le \frac{264 \times 87{,}5}{1.500 \times 350 + 264 \times 87{,}5} = 0{,}0421 \Rightarrow s = 42$$

$$y(42) = 0$$

ya hemos alcanzado la convergencia

$Q = 264$
$s = 42$
nº medio anual de unidades extra = 0
nº medio anual de rupturas = 0

$$sm = 42 - 30 + 0 + \frac{264}{2} = 144$$

DELTA:

$D = 1.250$; $CL = 2.000$; $CA = 400$; $CR = 400$; $CS = 100$; $mL = (3 + 2)\cdot 5 = 25$

La ley es sencilla de calcular a partir de la expresión binomial

x/s	=	15	20	25	30	35	40	45
l	=	0	1	2	3	4	5	6
h(x)	=	0,10737	0,26844	0,30199	0,20133	0,08808	0,02642	0,00551
H(s)	=	0,89263	6,2419	0,32220	0,12087	0,03279	0,00637	0,00087
y(s)	=	10,00	5,54	2,42	0,80	0,20	0,037	0,005

iteración 0

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 1.250 \times 2.000}{100}} = 223{,}61 \Rightarrow 225$$

$$H(s) \leq \frac{225 \times 100}{1.250 \times 400 + 225 \times 100} = 0{,}04306 \Rightarrow s = 35$$

$$y(35) = 0{,}20$$

iteración 1

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 1.250 \times [2.000 + 240 \times 0{,}20]}{100}} = 228{,}03 \Rightarrow 230$$

ya hemos alcanzado la convergencia

$$Q = 230$$
$$s = 35$$

$$\text{nº medio anual de unidades extra} = \frac{1.250}{230 + 0{,}20} \times 0{,}20 = 1{,}086$$

$$\text{nº medio anual de rupturas} = \frac{1.250}{230 + 0{,}20} \times 0{,}0328 = 0{,}178$$

$$sm = 35 - 25 + 0{,}20 + \frac{230}{2} = 125{,}2$$

5.3.6 *Método heurístico de cálculo*

La demanda semanal de un artículo se distribuye aproximadamente siguiendo una ley normal de media 200 unidades y variancia 800 unidades^2. El artículo se adquiere a 400 PTA/unidad y se vende a 550 PTA/unidad; la demanda llegada en ruptura de stock se pierde. El coste fijo de aprovisionamiento se estima en 750 PTA/pedido y el plazo de

entrega es de 2 semanas. Los stocks se consideran una carga que se evalúa en el 20% anual del inmovilizado medio correspondiente a los mismos. Se desea llevar una gestión por punto de pedido. Determinar los parámetros de gestión (punto de pedido y lote), los indicadores de nivel de servicio (stock medio, stock de seguridad, volumen anual medio de demanda perdida y número anual medio de rupturas) así como el coste anual medio de gestión (que se desea minimizar, dentro de los condicionantes indicados posteriormente) en los siguientes supuestos:

a) El lote de pedido se fija, por razones externas al coste, en 1.000 unidades como mínimo.

b) El punto de pedido se fija, por razones externas al coste, en 500 unidades como mínimo.

c) El stock de seguridad se fija, por razones externas al coste, en 100 unidades como mínimo.

d) No existe ningún condicionante externo al coste.

e) El número esperado de ventas perdidas al año se limita, por razones externas al coste, a 5 unidades como máximo.

Utilizaremos el método heurístico de resolución. Los datos normalizados son:

Demanda media anual: $D = 52 \times 200 =$ **10.400 unidades/año**

Coste de posesión: $CS = i \cdot CA = 0{,}20 \times 400 =$ **80 PTA/un-año**

Coste de ruptura: $CR = V - CA = 550 - 450 = 150$ **PTA/un.**

Demanda durante el plazo de entrega ($L = 2$ **semanas):**

Media: $mL = 2 \times 200 = 400$

Variancia: $3 \times 800 = 1.600$

Desviación tipo: $\sigma L = 40$

Fig.5.3.15

a)

Supondremos que el lote de pedido que conduce al coste mínimo es inferior a 1.000 (tendremos ocasión de comprobarlo en (d)), por lo que la restricción indicada es activa y por tanto:

$$Q = 1.000 \text{ unidades}$$

consecuentemente, para minimizar el coste deberá cumplirse:

$$H(s) = \frac{Q \cdot CS}{D \cdot CR + Q \cdot CS} = \frac{1.000 \times 80}{10.400 \times 150 + 1.000 \times 80} = 0{,}04878$$

en las tablas de la ley normal centrada y reducida hallamos $t = 1{,}6546$ de donde:

$$s = 400 + 1{,}6546 \times 40 = 466{,}184$$

En la tabla de la función Φ hallamos $\Phi(1{,}6546) = 0{,}02064$ de donde:

- *Ventas perdidas en promedio/ciclo*:

$$y(s) = 40 \times 0{,}02064 = 0{,}8256$$

- *Stock de seguridad*:

$$ss = s - mL + y(s) = 67{,}01$$

- *Stock medio*:

$$sm = ss + ss + \frac{Q}{2} = 567{,}01$$

- *Nº medio de pedidos anuales* $= \dfrac{10.400}{1.000 + 0{,}8256} = 10{,}4$

- *Demanda anual perdida media* $= 10{,}4 \times 0{,}8256 = 8{,}59$ unidades

- *Nº medio anual de rupturas* $= 10{,}4 \times 0{,}04878 = 0{,}51$

- *Coste anual medio óptimo*:

$$= 10{,}4 \times 750 + 567{,}01 \times 80 + 8{,}59 \times 150 = 7.800 + 45.360{,}8 + 1.288{,}5 = 54.449{,}3$$

b)

Supondremos que el punto de pedido que conduce al coste mínimo es inferior a 500 (tendremos ocasión de comprobarlo en (d)), por lo que la restricción indicada es activa y por tanto:

$$s = mL + t \cdot \sigma L = 500$$

de donde $t = 2{,}5$**. En las tablas de la ley normal y de la función Φ hallamos:**

$$H(500) = 0{,}006 \quad ; \quad \Phi(2{,}5) = 0{,}002$$

y por consiguiente:

$$y(500) = 40 \times 0{,}002 = 0{,}08$$

Por tanto, para minimizar en lo posible el coste:

$$Q = \frac{\sqrt{[2 \cdot D \cdot (CL + CR \cdot y(s))]}}{CS} = \frac{\sqrt{[2 \times 10.400 \times (750 + 150 \times 0{,}08)]}}{80} = 445{,}1$$

$$ss = 500 - 400 + 0{,}08 = 100{,}08$$

$$sm = 322{,}63$$

- *Nº medio de pedidos anuales* $= \dfrac{10.400}{445{,}1 + 0{,}08} = 23{,}4$

- *Demanda anual perdida media* $= 23{,}4 \times 0{,}08 = 1{,}872$ **unidades**

- *Nº medio anual de rupturas* $= 23{,}4 \times 0{,}002 = 0{,}1404$

- *Coste anual medio óptimo***:**

$$23{,}4 \times 750 + 322{,}63 \times 80 + 1{,}872 \times 150 = 17.550 + 25.810{,}4 + 280{,}5 = 43.641{,}2$$

c)

Supondremos que el stock de seguridad que conduce al coste mínimo es inferior a 100 (tendremos ocasión de comprobarlo en (d)), por lo que la restricción indicada es activa y por tanto:

$$ss = s - mL + y(s) = t \cdot \sigma L + \sigma L \cdot \Phi(t) = 100$$

de donde:

$$t + \Phi(t) = \frac{100}{40} = 2{,}5$$

Deberíamos buscar en las tablas de Φ un valor de *t* que cumpliera la ecuación anterior, pero dado el nivel de aproximación obtenible, la solución hallada coincidirá con la del caso anterior (en el que el stock de seguridad calculado era prácticamente 100).

d)

Partiremos para iterar del valor de *Q* obtenido en (b):

$$Q = 445{,}1$$

$$H(s) = \frac{445{,}1 \times 80}{(10.400 \times 150) + (445{,}1 \times 80)} = 0{,}02227$$

y de las tablas *t* = 2,001 ; Φ(2,001) = 0,00847 ; de donde:

$$y(s) = 40 \times 0{,}00847 = 0{,}3388$$

En la 2ª iteración:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 10.400 \times [750 + 150 \times 0{,}3388]}{80}} = 456{,}4$$

$$H(s) = \frac{456{,}4 \times 80}{(10.400 \times 150) + (456{,}4 \times 80)} = 0{,}0229$$

y de las tablas *t* = 1,9973 ; Φ(1,9973) = 0,00855 ; de donde:

$$y(s) = 40 \times 0{,}00855 = 0{,}342$$

y consideramos la aproximación suficiente.

$$s = 400 + (40 \times 1{,}9973) = 479{,}9$$

$$ss = (40 \times 1{,}9973) + 0{,}342 = 80{,}234$$

$$sm = 308{,}434$$

- *Nº medio de pedidos anuales* = $\dfrac{10.400}{456{,}4 + 0{,}342} = 22{,}76$

- *Demanda anual perdida media* = $22{,}76 \times 0{,}342 = 7{,}78$ unidades

- *Nº medio anual de rupturas* = $22{,}76 \times 0{,}0229 = 0{,}5212$

- *Coste anual medio óptimo*:

$$22{,}76 \times 750 + 308{,}434 \times 80 + 7{,}78 \times 150 = 17.070 + 24.674{,}72 + 1.165 = 4291{,}72$$

Vistos los valores óptimos, de acuerdo al coste de *Q*, *s* y *ss*, comprobamos que las hipótesis adoptadas en (a), (b) y (c) respecto a la actividad de las restricciones eran correctas.

e)

La restricción es activa, puesto que respecto a los costes el valor óptimo del número medio de unidades perdidas es 7,78 > 5.

$$\beta = \frac{5}{10.400} \quad \text{y} \quad \beta' = \frac{y}{Q} = \frac{5}{10.395}$$

Tomamos como valor inicial de *H(s)* el deducido en (d), 0,0229,

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot CL}{CS \cdot \left[1 - \dfrac{2 \cdot \beta' \cdot (1 - H(s))}{H(s)}\right]}} = 450{,}9$$

$$y(s) = \beta' \cdot Q = 0{,}2169 \quad ; \quad \Phi(t) = \frac{0{,}2169}{40} = 0{,}00542$$

de las tablas $t = 2{,}163$; *H(s)* = 0,0153. Con este valor de *H(s)* iteramos de nuevo:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot CL}{CS \cdot \left[1 - \dfrac{2 \cdot \beta' \cdot (1 - H(s))}{H(s)}\right]}} = 455{,}9$$

$$y(s) = \beta' \cdot Q = 0{,}2193 \quad ; \quad \Phi(t) = \frac{0{,}2193}{40} = 0{,}00548$$

y de las tablas t **= 2,161 ;** $H(s)$ **= 0,0154. Volvemos a iterar (aunque no es necesario):**

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot CL}{CS \cdot \left[1 - \frac{2 \cdot \beta' \cdot (1 - H(s))}{H(s)} \right]}} = 455{,}8$$

$$y(s) = \beta' \cdot Q = 0{,}2193 \quad ; \quad \Phi(t) = \frac{0{,}2193}{40} = 0{,}00548$$

Damos por terminadas las iteraciones.

$$s = 400 + (40 \times 2{,}161) = 486{,}44$$
$$ss = 86{,}6592$$
$$sm = 314{,}5592$$

- *Nº medio de pedidos anuales* **= 22,81**

- *Demanda anual perdida media* **=** $= 22{,}81 \times 0{,}2192 = 4{,}99952 \approx 5$ **unidades**

- *Nº medio anual de rupturas* **=** $22{,}81 \times 0{,}0154 = 0{,}3513$

- *Coste anual medio óptimo*:

$$22{,}81 \times 750 + 314{,}5592 \times 80 + 5 \times 150 = 17.107{,}5 + 24.164{,}736 + 750 = 43.022{,}236$$

TABLA RESUMEN

Parámetro	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Q	1.000,0000	445,1000	445,1000	456,4000	455,8000
s	466,0000	500,0000	500,0000	479,9000	486,4000
ss	67,0000	100,1000	100,0000	80,2000	86,6000
sm	567,0000	322,8000	322,8000	308,4000	314,6000
$H(s)$	0,0488	0,0060	0,0060	0,0229	0,0154
$y(s)$	0,8260	0,0800	0,0800	0,3420	0,2190
Nº pedidos/año (*)	10,4000	23,4000	23,4000	22,7600	22,8100
Demanda perdida/año (*)	8,5900	1,8720	1,8720	7,7800	5,0000
Nº rupturas/año (*)	0,5100	0,1404	0,1404	0,5200	0,3513
Coste anual óptimo (*)	54.449,3000	43.641,2000	43.641,2000	42.911,7000	43.023,2000

(*) **valores medios**

Fig. 5.2.16

5.3.7 La empresa QUASIMODO SPORTS (QS) sigue poniendo orden en su sistema de aprovisionamiento. Considera un grupo de productos, de demanda estabilizada, cuyo plazo de entrega, muy regular, es de 2 semanas. El coste fijo de aprovisionamiento es de 2.000 PTA/pedido, y para los stocks se considera una tasa de posesión del 26% anual sobre la cuantía media del stock en pesetas. La demanda que se produce durante ruptura de stock se pierde. Los artículos considerados son los siguientes:

Cód.	Unidad	Precio compra (PTA/un.)	Precio venta (PTA/un.)	Demanda semanal		
				Ley	Media	Variancia
M	pieza	400	650	uniforme entre 4 y 11 unidades		
N	kg	300	500	uniforme entre 5 y 15 kg		
O	pieza	600	1000	Poisson	6	
P	l	250	500	exponencial	6	
Q	kg	400	700	normal	6	4

Fig. 5.3.17 Datos del ejemplo Quasimodo Sports

QS desea establecer para estos artículos una gestión por punto de pedido, en las mejores condiciones de coste, pero satisfaciendo algunas condiciones adicionales. Ha solicitado nuestra ayuda, y debemos determinar los parámetros de gestión en algunos casos. Desgraciadamente los directivos no se han puesto de acuerdo en las condiciones, y tenemos dos bloques distintos:

Bloque 1:

a_1) El artículo *M* se adquiere en lotes de 100 unidades cada uno, y no se desea que el número anual medio de ventas perdidas por ruptura de stock supere las 6 unidades.

b_1) El artículo *N* tiene fijado un punto de pedido de 25 kg y se desea que en promedio no se produzca más de una ruptura de stock anual.

c_1) El artículo O se desea aprovisionar a un ritmo medio mínimo de una vez al mes (12 veces al año).

d_1) En el artículo *P* no se desea una pérdida de ventas superior al 2% de la demanda.

e_1) No existen condicionantes para el artículo *Q*.

Bloque 2:

a_2) El artículo *M* tiene fijado el punto de pedido en 18 unidades y no se desea que la proporción anual media de ventas perdidas por ruptura de stock supere el 2% de la demanda.

b_2) El artículo *N* tiene fijado un lote de pedido de 100 kg y se desea que en promedio no se pierdan ventas anuales superiores a 15 kg.

c_2) En el artículo *O* se desea que el número máximo de rupturas (en promedio) sea de 1 al año.

d_2) No existen condicionantes adicionales para el artículo *P*.

e_2) En el artículo *Q* se desea que el stock de seguridad no sea inferior al 50% del consumo medio semanal.

Consideraciones preliminares:

Del enunciado deducimos, $L = 2$ semanas, $CL = 2.000$ PTA, $i = 0,26$ (por año) y puesto que la demanda llegada en ruptura se pierde $CR = V - CA$. Necesitamos las leyes de la demanda durante el plazo de entrega, que debemos determinar componiendo las leyes de la demanda semanal, cosa extraordinariamente fácil.

a_0)

La demanda semanal del artículo *M* es uniforme y discreta:

4	5	6	7	8	9	10	11
1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Fig.5.3.18 Ley de la demanda semanal de M

y por tanto:

$$\text{Demanda media semanal} = 7{,}5$$

$$mL = 2 \times 7{,}5 = 15 \quad \text{y} \quad D = 52 \times 7{,}5 = 390 \text{ unidades}$$

$$CA = 400\,; \quad V = 650\,; \quad CR = 250\,; \quad CS = 104$$

Durante el plazo de entrega (2 semanas) la ley de la demanda será triangular entre 8 y 22 unidades; podemos determinarla componiendo efectivamente dos leyes discretas idénticas:

x/s	h(x)	H(s)	y(s)
8	1/64	63/64	448/64
9	2/64	61/64	385/64
10	3/64	58/64	324/64
11	4/64	54/64	266/64
12	5/64	49/64	212/64
13	6/64	43/64	163/64
14	7/64	36/64	120/64
15	8/64	28/64	84/64

y(s)	*h(x)*	*H(s)*	*y(s)*
16	7/64	21/64	56/64
17	6/64	15/64	35/64
18	5/64	10/64	20/64
19	4/64	6/64	10/64
20	3/64	3/64	4/64
21	2/64	1/64	1/64
22	1/64	0	0
23	0	0	0

Fig. 5.3.19 Ley de la demanda semanal M

Téngase presente que:

$$H(s) = H(s-1) - h(s) = H(s+1) + h(s+1)$$
$$y(s) = y(s-1) - H(s-1) = y(s+1) + H(s)$$

b_0)

La demanda semanal del artículo *N* es uniforme y continua entre 5 y 15; por tanto, la media semanal es 10. En consecuencia:

$$mL = 2 \times 10 = 20;\ D = 52 \times 10 = 520;\ CA = 300;\ PV = 500;\ CR = 200;\ CS = 78.$$

La demanda durante dos semanas seguirá una ley triangular entre 10 y 30, de la forma:

Para $10 \le x \le 20$	Para $10 \le s \le 20$
$h(x) = \dfrac{x-10}{100}$	$H(s) = 1 - \dfrac{(s-10)^2}{200}$ $y(s) = (20-s) + \dfrac{(s-10)^3}{600}$
Para $20 \le x \le 30$	**Para $20 \le s \le 30$**
$h(x) = \dfrac{30-x}{100}$	$H(s) = \dfrac{(30-s)^2}{200}$ $y(s) = \dfrac{(30-s)^3}{600}$

c_0)

La demanda semanal de *O* sigue una ley discreta de Poisson de media 6; por tanto:

$D = 52 \times 6 = 312;$

La demanda durante el plazo de entrega seguirá una ley de Poisson de media:
$mL = 2 \times 6 = 12$

$CA = 600;\ V = 1.000;\ CR = 400;\ CS = 156.$

En las tablas la ley de Poisson de parámetro 12 nos conduce a:

s	...	15	16	17	18	19	20	...
H(s)		0,1555	0,1012	0,0629	0,0374	0,0213	0,0116	
y(s)		0,4023	0,2468	0,1451	0,0816	0,0441	0,0236	

Fig. 5.3.20 Ley de la demanda durante el plazo de entrega de P

d_0)

La demanda semanal de *P* es exponencial de media 6. Por tanto:

$mL = 2 \times 6 = 12;\ D = 52 \times 6 = 312.\ CA = 250;\ V = 500;\ CR = 250;\ CS = 65.$

La demanda durante el plazo de entrega será una ley de Erlang o Gamma-1 (tal como ocurre con la suma de variables independientes que siguen la misma ley exponencial), con la siguiente expresión:

$$h(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{6} \cdot e^{\left(-\frac{x}{6}\right)} \qquad \text{para } x \geq 0$$

$$H(s) = \left(\frac{s}{6} + 1\right) \cdot e^{\left(-\frac{s}{6}\right)}$$

$$y(s) = (s + 12) \cdot e^{\left(-\frac{s}{6}\right)}$$

(el desarrollo de las últimas expresiones, obtenidas aplicando la definición de *H* y de *y*, se obtiene a través de integraciones elementales)

e_0)

La demanda semanal de *Q* sigue una ley normal de media 6 y variancia 4 (desviación tipo $\sigma = 2$). Por tanto:

$$mL = 2 \times 6 = 12; \; D = 52 \times 6 = 312. \; CA = 400; \; V = 700; \; CR = 300; \; CS = 104.$$

La demanda durante el plazo de entrega seguirá una ley normal de media 12 y desviación tipo $2 \cdot \sqrt{2} = 2{,}8284$.

bloque 1:

a_1)

Puesto que *Q* está fijado, para minimizar costes sólo cabe determinar *s*:

$$H(s) = \frac{100 \times 104}{(390 \times 250) + (100 \times 104)} = 0{,}09639$$

y como:

$$H(18) = \frac{10}{64} > 0{,}09639 > 0{,}6084 = H(19) \qquad s = 19$$

$$y(19) = \frac{10}{64} > 0{,}15625$$

por tanto las ventas perdidas en promedio por año son:

$$\frac{390}{100 + 0{,}15625} \times 0{,}15625 = 0{,}6084 < 6$$

La condición adicional no es activa, y con *s* = 19 obtendremos lo que buscábamos.

b_1)

Puesto que *s* está fijado, también lo están *H(s)* e *y(s)*:

$$H(25) = \frac{5 \times 5}{200} = 0{,}125; \quad y(25) = \frac{5 \times 5 \times 5}{600} = 0{,}2083$$

por lo que se puede calcular *Q* en la forma tradicional:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 520 \times [200 + (200 \times 0{,}2083)]}{78}} = 165$$

Calculemos ahora el número medio de rupturas por año:

$$\frac{520}{165 + 0{,}2083} \times 0{,}125 = 0{,}3934 < 1$$

La condición adicional no es activa y por tanto $Q = 165$.

c_1)

Determinemos los parámetros a partir de la minimización de costes:

$$Q \cdot (Q - 1) < \frac{2 \times 312 \times 2.000}{156} \leq Q \cdot (Q + 1) \Rightarrow Q = 89$$

$$H(s) \leq \frac{89 \times 156}{(312 \times 400) + (89 \times 156)} = 0{,}1001 < H(s - 1) \Rightarrow s = 17;$$

$$y(17) = 0{,}1451$$

segunda iteración

$$Q \cdot (Q - 1) < \frac{2 \times 312 \times [2.000 + 400 \times 0{,}1451]}{156} \leq Q \cdot (Q + 1) \Rightarrow Q = 91$$

$$H(s) \leq \frac{91 \times 156}{(312 \times 400) + (91 \times 156)} = 0{,}1021 < H(s - 1) \Rightarrow s = 16;$$

$$y(16) = 0{,}2468$$

en la tercera iteración obtenemos:

$$Q = 92; \; H(s) \leq 0{,}1031 < H(s - 1); \; s = 16$$

con lo que el proceso ya se ha estabilizado. El número medio de pedidos al año es:

$$\frac{312}{92 + 0{,}2468} = 3{,}38 < 12$$

No se satisface la condición adicional, que de esta forma se convierte en activa:

$$Q + y(s) \leq \frac{312}{12} = 26$$

lo cual nos llevará a un valor de *Q* del orden de 26, en rigor, ya que *y(s)* es mayor que 0, pero muy pequeño, el valor de *Q* a probar es 25.

$$H(s) \leq \frac{25 \times 156}{(312 \times 400) + (25 \times 156)} = 0{,}0303 < H(s-1) \Rightarrow s = 19;$$

$$y(19) = 0{,}0441$$

probablemente si tomáramos *Q* = 26, dada la pequeñez de *y(s)* (se mantiene *s* = 19) no se produciría ningún trauma: el número anual medio de pedidos sería de 11,980 en lugar de 12,458 (con *Q* = 25).

d_1)

Primero calculamos *Q* y *s*, que minimizan costes:

primera iteración

$$Q = \sqrt{2 \times 312 \times \frac{2.000}{65}} = 138{,}56$$

$$H(s) = \frac{138{,}56 \times 65}{(312 \times 250) + (138{,}56 \times 65)} = 0{,}1035;$$

por tanto:

$$0{,}1035 = \left(1 + \frac{s}{6}\right) \cdot e^{\left(-\frac{s}{6}\right)}$$

hagamos $z = \frac{s}{6}$**, debemos resolver la ecuación:**

$$e(z) = \frac{1 + z}{0{,}1035}$$

(puede resolverse iterativamente a partir de z = 0)

con lo que obtenemos:

$$z = 3{,}84642; \quad s = 23{,}08; \quad y(23{,}08) = 0{,}7492$$

segunda iteración

$$Q = \sqrt{2 \times 312 \times \frac{[2.000 + 250 \times 0{,}7492]}{65}} = 144{,}91$$

$$H(s) = \frac{144{,}91 \times 65}{(312 \times 250) + (144{,}91 \times 65)} = 0{,}1077;$$

ahora tenemos que resolver:

$$e(z) = \frac{1 + z}{0{,}1077}$$

(puede hacerse iterativamente a partir de z = 3,84642)

obtendremos:

$$z = 3{,}79626; \quad s = 22{,}77; \quad y(22{,}77) = 0{,}7807$$

tercera iteración

$$Q = 145{,}17; \quad H(s) = 0{,}1079; \quad z = 3{,}79272; \quad s = 22{,}76;$$

cuarta iteración

$$Q = 145{,}19$$

consideramos que hemos alcanzado la convergencia; calculemos el valor asociado a la condición adicional:

$$\beta = \frac{0{,}7833}{145{,}19 + 0{,}7833} = 0{,}0054 < 0{,}02$$

por tanto no es activa.

e_1)

Aplicamos el procedimiento tradicional:

primera iteración

$$Q = \sqrt{2 \times 312 \times \frac{2.000}{104}} = 109,54$$

$$H(s) = \frac{109,54 \times 104}{(312 \times 300) + (109,54 \times 104)} = 0,1085;$$

segunda iteración

$$Q = \sqrt{2 \times 312 \times \frac{[2.000 + 300 \times 0,14776]}{104}} = 110,75$$

$$H(s) = \frac{110,75 \times 104}{(312 \times 300) + (110,75 \times 104)} = 0,1096;$$

$$t_H = 1,2287;$$

$$\Phi(1,2287) = 0,05288;$$

$$y(s) = 0,05288 \times 2,8284 = 0,14957;$$

tercera iteración

$Q = 110,77$; $H(s) = 0,1096$; **se ha estabilizado**

$$s = 12 + 1,2287 \times 2,8284 = 15,4753$$

bloque 2

a$_2$)

El punto de pedido está fijado, $s = 18$, **y por tanto conocemos** $H(s)$ **e** $y(s)$**:**

$$H(18) = \frac{10}{64} = 0,15625 \quad ; \quad y(18) = \frac{20}{64} = 0,3125$$

podemos calcular la Q **que minimiza los costes:**

$$Q \cdot (Q - 1) < \frac{2 \times 390 \times [2000 + (250 \times 0,3125)]}{104} \leq Q \cdot (Q + 1) \Rightarrow Q = 125$$

Analicemos la condición adicional:

$$\beta = \frac{0,3125}{125 + 0,3125} = 0,0025 < 0,02$$

La condición adicional no es activa; por tanto $Q = 125$.

b_2)

Tenemos el valor de Q fijado en 100; el valor de s que minimiza los costes es:

$$h(s) = \frac{100 \times 78}{(520 \times 200) + (100 \times 78)} = 0{,}06977 \quad \Rightarrow \quad s = 26{,}2646; \quad y(26{,}2646) = 0{,}0868$$

las ventas perdidas en promedio por año serán:

$$\frac{520}{100 + 0{,}08687} \times 0{,}08687 = 0{,}4513 < 15$$

La condición adicional no es activa.

c_2)

Recuperamos los valores de Q y s que minimizan los costes de (c_1):

$$Q = 92; \quad s = 16; \quad h(16) = 0{,}1012; \quad \text{Ciclos al año} = 3{,}38$$

número medio de rupturas por año:

$$3{,}38 \times 0{,}1012 = 0{,}3421 < 1$$

La condición adicional no es activa.

d_2)

Recuperamos de (d_1) los valores que minimizan el coste, ya que no hay restricciones adicionales:

$$Q = 145{,}19 \quad ; \quad s = 22{,}76$$

e_2)

Tomemos la solución que minimiza los costes obtenida en (e_1):

$$Q = 110{,}77 \quad ; \quad s = 15{,}4753$$

y veamos qué stock de seguridad comporta:

$$ss = 15{,}4753 - 12 + 0{,}14957 = 3{,}6249 > \frac{6}{2}$$

Por tanto, también satisface la condición adicional.

5.3.8 La empresa QUASIMODO SPORTS sigue poniendo orden en su sistema de aprovisionamiento. Considera un grupo de productos, de demanda estabilizada, cuyo plazo de entrega, muy regular, es de 1 semana. El coste fijo de aprovisionamiento es de 2.000 PTA/pedido, y para los stocks se considera una tasa de posesión del 26% anual sobre la cuantía media del stock en pesetas. La demanda que se produce durante ruptura de stock se pierde. Los artículos considerados son los siguientes:

Cód.	Unidad	Precio compra (PTA/un.)	Precio venta (PTA/un.)	Demanda semanal		
				Ley	Media	Variancia
R	pieza	400	650	discreta [1]		
S	pieza	600	1.000	POISSON	6	
T	kg	400	700	normal	6	4
U	pieza	300	500	discreta [2]	6	
V	l	250	500	exponencial		

Fig.5.3.21 Datos del ejemplo Quasimodo Sports

Cantidad	0	1	2	3	4	5	6	7
frecuencia	0	0	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Fig. 5.3.22 Ley discreta [1]

Cantidad	3	4	5	6	7	8	9
frecuencia	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1

Fig. 5.3.23 Ley discreta [2]

QS desea establecer para estos artículos una gestión por aprovisionamiento periódico con revisión semanal, en las mejores condiciones de coste, pero satisfaciendo algunas condiciones adicionales. Ha solicitado nuestra ayuda, y debemos determinar la cobertura en los siguientes casos:

a) En el artículo *R* se desea que la proporción anual media de ventas perdidas por ruptura de stock no supere el 2% de la demanda.

b) En el artículo *S* se desea que, a lo sumo, se produzca, en promedio, una ruptura de stock anual.

c) En el artículo *T* se desea que las ventas perdidas no superen los 5 kg/año.

d) En el artículo *U* se desea que el stock de seguridad sea como mínimo el 50% de la demanda media semanal.

e) No existen condicionantes adicionales para el artículo *V*.

Consideraciones preliminares:

Los sistemas de gestión solicitados utilizan el procedimiento de revisión periódica con $T = 1$ semana; el plazo de entrega es de $L = 1$ semana; por tanto, $T + L = 2$ semanas. Necesitamos conocer la ley de la demandas durante 2 semanas, a partir de la suministrada, ley de la demanda semanal. Por otra parte ($CL + CI$) = 2.000; $i = 0{,}26$ anual y la demanda insatisfecha se pierde.

a_0)

$$CA = 400; \quad V = 650; \quad CR = 250; \quad CS = 104$$

$$mL = 4{,}7; \quad D = 52 \times 4{,}7 = 244{,}4$$

(Ver *figura 5.3.24***)**

b_0)

$$CA = 600;\ V = 1.000;\ CR = 400;\ CS = 156;\ mL = 6;\ D = 52 \times 6 = 312$$

Demanda durante $L + T$: Ley de Poisson de media $2 \times 6 = 12$

$$\ldots\ H(20) = 0{,}01160\ ;\ H(21) = 0{,}00607\ ;\ H(22) = 0{,}00305\ ;\ \ldots$$

c_0)

$CA = \mathbf{400};\ V = \mathbf{700};\ CR = \mathbf{300};\ CS = \mathbf{104};\ mL = \mathbf{6};\ D = \mathbf{52 \times 6} = \mathbf{312}$

Demanda durante $L + T$: Ley de normal de media $\mathbf{2 \times 6 = 12}$

y desviación tipo $\sqrt{\mathbf{2 \times 4}} = \mathbf{2{,}8284}$

d_0)

$CA = \mathbf{300};\ V = \mathbf{500};\ CR = \mathbf{200};\ CS = \mathbf{78};\ mL = \mathbf{6};\ D = \mathbf{52 \times 6} = \mathbf{312}$

(Ver *figura 5.3.25***)**

e_0)

$CA = \mathbf{250};\ V = \mathbf{500};\ CR = \mathbf{250};\ CS = \mathbf{65};\ mL = \mathbf{6};\ D = \mathbf{52 \times 6} = \mathbf{312}$

Ley de la demanda durante $L + T$: *gamma*$-\mathbf{1}$

LEY DEMANDA SEMANAL		
x	*f(x,1)*	*x·f(x,1)*
2	**0,1**	**0,2**
3	**0,1**	**0,3**
4	**0,2**	**0,8**
5	**0,3**	**1,5**
6	**0,2**	**1,2**
7	**0,1**	**0,7**

media = 4,7

LEY DEMANDA DURANTE $T + L$			
x/s	*h(x)*	*H(s)*	*y(s)*
4	**0,01**	**0,99**	**5,40**
5	**0,02**	**0,97**	**4,41**
6	**0,05**	**0,92**	**3,44**
7	**0,10**	**0,82**	**2,52**
8	**0,14**	**0,68**	**1,70**
9	**0,18**	**0,50**	**1,02**
10	**0,19**	**0,31**	**0,52**
11	**0,16**	**0,15**	**0,21**
12	**0,10**	**0,05**	**0,06**
13	**0,04**	**0,01**	**0,01**
14	**0,01**	**0,00**	**0,00**

Fig.5.3.24 Ley de la demanda semanal y durante $T + L$ para R

LEY DEMANDA SEMANAL		
x	$f(x,1)$	$x \cdot f(x,1)$
3	**0,1**	**0,3**
4	**0,1**	**0,4**
5	**0,2**	**1,0**
6	**0,2**	**1,2**
7	**0,2**	**1,4**
8	**0,1**	**0,8**
9	**0,1**	**0,9**
	media	**= 6,0**

LEY DEMANDA DURANTE $T+L$			
x/s	$h(x)$	$H(s)$	$y(s)$
6	**0,01**	**0,99**	**6,00**
7	**0,02**	**0,97**	**5,01**
8	**0,05**	**0,92**	**4,04**
9	**0,08**	**0,84**	**3,12**
10	**0,12**	**0,72**	**2,28**
11	**0,14**	**0,58**	**1,56**
12	**0,16**	**0,42**	**0,98**
13	**0,14**	**0,28**	**0,56**
14	**0,12**	**0,16**	**0,28**
15	**0,08**	**0,08**	**0,12**
16	**0,05**	**0,03**	**0,04**
17	**0,02**	**0,01**	**0,01**
18	**0,01**	**0,00**	**0,00**

Fig.5.3.25 Ley de la demanda semanal y durante T + L para V

Determinación de la cobertura

a)

$$H(S-1) > \frac{\frac{104}{52}}{250 + \frac{104}{52}} = 0{,}00794 \geq H(S) \;\Rightarrow\; S = 14$$

$$\beta = \frac{y(14)}{6} = 0 < 0{,}02$$

la condición adicional no es activa.

b)

$$H(S-1) > \frac{\frac{156}{52}}{400 + \frac{156}{52}} = 0{,}0074 \geq H(S) \;\Rightarrow\; S = 21$$

número medio de rupturas anuales:

$$52 \times H(21) = 52 \times 0{,}00607 = 0{,}3156 < 1$$

la condición adicional no es activa.

c)

$$H(S) = \frac{\frac{104}{52}}{300 + \frac{104}{52}} = 0{,}0066; \quad tH = 2{,}4573$$

$$S = 12 + 2{,}4573 \times 2{,}8284 = 18{,}9565$$

$$y(12,1) = 0{,}00310 \times 2{,}8284 = 0{,}00877$$

demanda media perdida por año:

$$52 \times 0{,}00877 = 0{,}456 < 5 \ kg$$

la condición adicional no es activa.

d)

$$H(S-1) > \frac{\frac{78}{52}}{200 + \frac{78}{52}} = 0{,}00744 \geq H(S) \quad \Rightarrow \quad S = 18$$

$$ss = 18 - 6 - 6 + y(18,1) = 6 + 0 > \frac{6}{2}$$

la condición adicional no es activa.

e)

$$H(S) = \frac{\frac{65}{52}}{200 + \frac{65}{52}} = 0{,}004975$$

debemos resolver la ecuación:

$$e^{\left(\frac{S}{6}\right)} = \frac{1 + \frac{S}{6}}{0{,}004975}$$

y, aplicando el procedimiento iterativo tradicional, llegaremos a S = 44,615.