Capítulo 5 Gestión de stocks

5.1 Conceptos

5.1.1 Introducción

La planificación y el control de stocks (o de inventarios) deben suministrar los procedimientos que garanticen la disponibilidad oportuna de las cantidades requeridas de materiales y productos, y que a la vez protejan contra los excesivos costos de inmovilizado en tales conceptos.

La gestión de stocks constituye una función vital en la producción y distribución de artículos en nuestro sistema económico. Una economía moderna y dinámica no podría funcionar sin stocks; pero una economía primitiva tampoco.

En este capítulo describimos los procedimientos clásicos de gestión de stocks, adecuados especialmente cuando el comportamiento de la demanda o del consumo puede considerarse independiente, es decir, no es función directa de decisiones propias. En el capítulo 4 hemos descrito el procedimiento MRP que está indicado para los casos de demanda dependiente.

En el apartado 5.1.7 tratamos el procedimiento JIT, ya que habitualmente se define como un funcionamiento del sistema productivo sin stocks (o por lo menos, con los stocks reducidos al mínimo). Aunque algunos aspectos desbordan el marco del presente capítulo, muchas de las ideas, por inverosímil que parezca, están en perfecta sintonía con las expuestas en el resto del mismo, y por ello juzgamos que esta ubicación del tema no es excesivamente incoherente.

5.1.1.1 Definición de stocks: clasificación

Un stock es una reserva cualquiera no empleada que posee valor económico. Dos son las motivaciones principales que llevan a constituir un stock: la especulación y la regulación.

No trataremos en este capítulo de los stocks constituidos con fines especulativos y sí de aquéllos que tienen como objeto regular (amortiguando desajustes) los movimientos de entrada y salida de dos subsistemas en serie no sincronizados exactamente. En este caso los stocks resultan de una situación de hecho, como indica A. Ramboz, y no, contrariamente a una creencia muy extendida, de una decisión. Si en un punto del circuito de producción o de distribución las tasas instantáneas del subsistema que proporciona un artículo y del subsistema que lo consume no son idénticas, en dicho punto aparecerá un stock. Puede negarse el hecho, bautizarlo con otro nombre, o decir voluntariosamente "no queremos stocks", pero la situación no se alterará. Los procedimientos denominados de "stock cero", intentan sincronizar las tasas, como único medio de eliminar stock.

Lo que sí es el resultado de una decisión es el que dicho stock se controle o no, y el nivel de control o de gestión que se adopte. Naturalmente, antes de poder gestionar habrá que reconocer la existencia del stock, pero la gestión es algo más que la mera contabilidad de entradas, salidas y existencias (aunque ésta sea indispensable para la gestión). La gestión consiste en la toma de decisiones, dando a las variables de acción los valores que mantienen a la función objetivo en el intervalo de valores "óptimo".

La definición que hemos dado de stock permite considerar stocks formados por bienes tangibles tanto como los formados por bienes intangibles. Aunque estamos habituados a asociar, al concepto de stock, un almacén con piezas o artículos diversos que se van sirviendo a medida que se solicitan, muchos otros tipos de bienes y otras situaciones poseen la estructura que hemos descrito: el dinero existente en la caja de una sucursal de un banco o de una empresa para hacer frente a los pagos de un determinado día; en otra dimensión, el capital circulante de una empresa; las plazas de un determinado vuelo, crucero, hotel; las horas del *pool* de mecanógrafas de una empresa de estudios; el personal en formación para una empresa altamente tecnificada como una compañía aérea; el agua contenida en un embalse; etc.

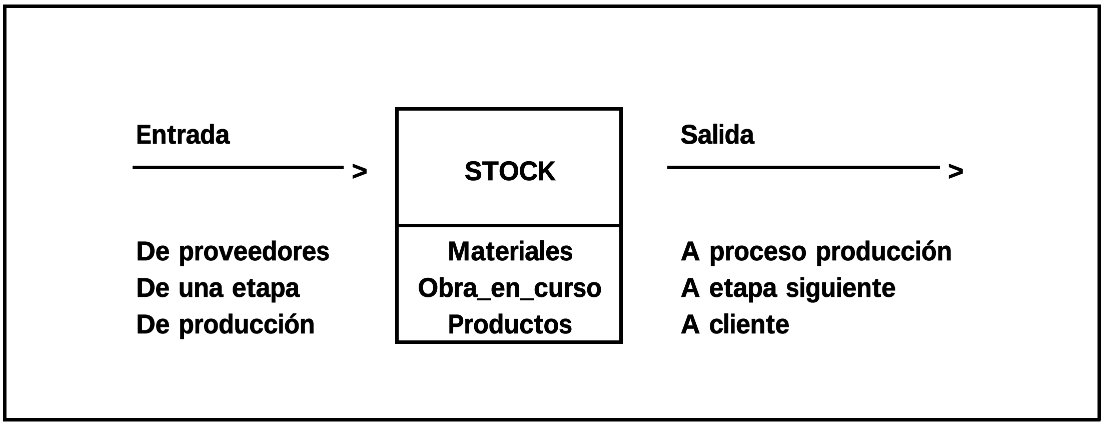


Fig. 5.1.1.1 El stock como un depósito con entradas y salidas

El stock es alimentado por entradas (*inputs*) y vaciado por salidas (*outputs*),lo que da como resultado un cierto nivel de stock. Normalmente las decisiones de gestión actúan sobre las entradas o sobre las salidas.

Si tanto las entradas como las salidas son incontrolables, la única variable sobre la que se podrá actuar es la capacidad de almacenaje, que adquirirá un carácter crítico sobre todo por su relativa inflexibilidad. En algunos casos las variables sobre las que podemos actuar influyen en las salidas únicamente, ya que las entradas están fuera de control (embalses). Normalmente, sin embargo, en los sistemas de producción y distribución consideraremos la situación inversa: las variables de acción son susceptibles de influenciar las entradas, pero las salidas están ampliamente fuera de control, deben adaptarse a una demanda. En lo que sigue consideraremos este caso exclusivamente, salvo indicación en contra.

En los sistemas de producción y distribución se producen stocks por cinco motivos principales:

- **Stocks de tránsito (o *pipeline*), debido a que el material debe llevarse de un sitio a otro**
- **Stocks amortiguadores (*buffer*) para proteger contra la incertidumbre (stocks de seguridad)**
- **Stocks de anticipación, para poder atender picos de consumo o de demanda que se producirán más adelante**
- **Stocks de desacoplamiento para independizar subsistemas operativos dentro del mismo flujo (stock en curso)**
- **Stocks de ciclo (o de lote) ocasionados por el intento de reducir los costes totales, repartiendo las cargas fijas entre los elementos del lote y no en un número más reducido de unidades que son las que estrictamente se necesitan de momento.**

Estos tipos de stocks y las causas que los producen deberán tenerse en cuenta muy cuidadosamente cuando se busquen formas de reducir los stocks.

En cuanto a la naturaleza de los artículos, los stocks pueden ser de cuatro clases:

- **Materia prima (incluyendo piezas o conjuntos comprados)**
- **Repuestos y suministros (que no se incorporan al producto fabricado, pero que también son de procedencia exterior)**
- **Obra en curso**
- **Productos terminados (y subconjuntos que se venden como recambios).**

5.1.1.2 Características de los elementos de los stocks

Dada la situación descrita en el apartado anterior, el sistema de stock que consideraremos tiene las salidas definidas por una variable ingobernable, la demanda, mientras que las entradas se producen influenciadas parcial o totalmente, por nuestras decisiones en virtud de unos pedidos u órdenes de reaprovisionamiento. Tanto las entradas como las salidas pueden ser continuas o intermitentes; en el primer caso las describiremos mediante unas tasas, variables o no con el tiempo, mientras que en el segundo será pertinente hablar del tamaño del lote, del instante de entrada o salida, y en su caso de la forma de dicha entrada o salida, si no es instantánea.

El instante de las entradas puede ser previsible perfectamente a partir del conocimiento del instante de emisión del pedido, o bien puede estar sometido a un cierto grado de incertidumbre (averías del sistema productivo, incumplimientos de los proveedores, incidencias en los transportes, etc.). Denominaremos plazo de entrega al tiempo que transcurre desde que se detecta la necesidad de efectuar un pedido y el instante en que disponemos de éste para su consumo o utilización. El plazo de entrega es uno de los parámetros esenciales para la gestión del sistema, y según lo dicho puede ser constante o una variable aleatoria.

Las salidas corresponderán a entregas a los consumidores internos o externos en virtud de la solicitud de estos que conocemos como demanda. La demanda o solicitud de salidas es otro parámetro esencial en la gestión, y puede considerarse así mismo determinista o aleatoria; y en ambos casos homogénea o no en el tiempo. Si la demanda es conocida sólo en probabilidad, existe la posibilidad de equivocarse al efectuar las previsiones y por tanto al tomar las decisiones de reaprovisionamiento; puede suceder que la demanda supere las existencias y se produzca la ruptura de stock: no se puede atender a la demanda de un artículo debido a que no disponemos en stock del mismo (carencia). Esta carencia tendrá un significado completamente distinto según la empresa pueda o no servir con retraso a sus clientes (es decir según si los clientes aceptan esperar o no).

Como las entradas la demanda, que modela las salidas, pueden ser unidad a unidad o bien por lotes. En este último caso la aleatoriedad, si existe, se referirá tanto al instante como al volumen.

Las decisiones para la gestión de los stocks dependen naturalmente del tipo de acción que pueda realizarse y de las posibilidades de información:

- si es fácil conocer regularmente (por ejemplo cada día, por no decir continuamente) la situación de los stocks, se puede adoptar la regla de hacer un pedido cuando el stock de un artículo sea inferior a cierto valor crítico (punto de pedido), siendo el volumen del pedido fijo (lote económico) o bien función de la situación de los stocks y de las previsiones de consumo o ventas,

- si por el contrario es costoso conocer regularmente la situación de stocks, es preferible efectuar una revisión (inventario) periódico y pedir después del mismo una cantidad función de las existencias (por ejemplo, la diferencia entre una cantidad prefijada, la cobertura, y la cantidad existente).

Las decisiones de gestión de stocks pueden ser por su naturaleza únicas o repetitivas, aunque caben situaciones intermedias. Si fijamos la capacidad de almacenaje entre dos subsistemas al diseñar el sistema productivo, esta decisión puede considerarse como única. Cierto es que puede modificarse más tarde con motivo de una remodelación o ampliación, pero esta nueva decisión estará habitualmente lo suficientemente alejada en el tiempo y los costes de la transformación serán tan importantes que ambas decisiones se podrán considerar independientemente en su momento. Para ciertos artículos de moda y/o de temporada las constantes de tiempo impiden una corrección de la decisión inicial, un pedido suplementario durante la temporada; todo el volumen del artículo debe encargarse de una vez y frecuentemente mucho antes de que se inicie su consumo. Al contrario, en muchas otras situaciones existe una sucesión de ciclos con pedidos y consumo del mismo artículo a lo largo del tiempo, por lo que constituye un proceso secuencial.

En el proceso secuencial, las consecuencias de una decisión influyen en forma inmediata en las decisiones siguientes, y es preciso tener en cuenta este efecto en el análisis; el análisis debe ser dinámico. En la decisión única, el análisis es estático.

5.1.1.3 Costes

La gestión de stocks presenta problemas debido a que están asociados a los stocks diversos costes, algunos de los cuales aumentan si el nivel de stocks crece mientras que otros disminuyen, por lo que encontrar el punto adecuado que equilibre los costes dando un coste global mínimo puede ser muy difícil.

Los tipos de coste que consideraremos son los siguientes:

5.1.1.3.1 Coste de posesión

Está asociado a la existencia del stock, y lo producen cinco aspectos fundamentales:

- La creación y el mantenimiento de la capacidad de almacenaje: alquiler de locales, electricidad, acondicionamientos especiales, maquinaria, entretenimiento, vigilancia, etc. Si existe una utilización alternativa del espacio, este coste se considerará variable en las decisiones de gestión de stocks, en caso contrario es un coste fijo, función de la capacidad potencial de almacenaje, y no intervendrá en las decisiones de gestión (si en la de tener o no el almacén).

- Coste de entrada y salida de los artículos en el stock, en el caso de que éstos no pasen necesariamente al mismo. Son esencialmente los gastos de manipulación, administrativos, inclusión en fichero, etc.

- Variación de valor de los bienes en stock. Muchas mercancías almacenadas pierden valor, lo que puede ser debido a un desgaste real, a obsolescencia o incluso a robos. Esta pérdida de valor debe tenerse en cuenta en el coste de existencia del stock.

- Cargas financieras correspondientes al capital inmovilizado. El capital invertido en el stock habría podido utilizarse en otra parte productivamente; puesto que está inmovilizado no se dispone de él, lo que ocasiona una pérdida de oportunidad medible mediante un coste. Este coste depende de la utilización que se habría podido dar al capital de estar disponible, por ejemplo, si la empresa ha recibido préstamos; este capital habría podido servir para devolverlos total o parcialmente, por lo que puede contabilizarse un coste del 12, 15 o 18% según la tasa de interés real de dichos préstamos. En otros casos podremos utilizar la tasa interna de rentabilidad de las inversiones de la empresa, puesto que el capital inmovilizado habría podido destinarse a una iniciativa de inversión, si es que las disponibilidades de fondos dejan un remanente de iniciativas rentables sin realizar. (Debería emplearse la tasa marginal realmente obtenida con las inversiones y, en su defecto, la tasa mínima de rentabilidad establecida en la empresa para considerar realizable una iniciativa).

- Costes de seguridad; los stocks están habitualmente asegurados, y es necesario incluir el coste correspondiente en el coste de posesión, tanto si se recurre a una compañía de seguros externa como si la empresa se asegura a sí misma, total o parcialmente.

Los costes de posesión unitarios se representarán en este texto mediante CS, cuyas unidades serán habitualmente:

[PTA]/[unidad]-[año]

En los casos en que dicho coste pueda suponerse proporcional al coste de adquisición (variable) del bien CA, la constante de proporcionalidad será denominada i:

$$CS = i \cdot CA$$

cuyas dimensiones son [PTA]/[PTA]-[año].

En los casos estáticos (y algunos dinámicos especiales, por ejemplo, con artículos que se degradan rápidamente) la situación puede ser ligeramente diferente por cuanto el hecho mismo de que exista stock excedente después de que se ha atendido a toda la demanda que se ha presentado durante el intervalo de vigencia representa un coste: penalidad por excedentes.

Consideremos el sencillo ejemplo, muy difundido en la bibliografía especializada, el del vendedor de árboles de Navidad. El intervalo en el que tienen lugar las ventas es muy reducido y el valor residual de los excedentes es escaso, por no decir nulo. Si el vendedor aprovisiona demasiadas unidades y constituye un stock importante perderá dinero por cada árbol que no venda, lo que irá en detrimento de sus beneficios. Este dinero perdido constituye la penalización por excedentes.

En los problemas dinámicos puros tal situación no puede darse. Consideremos un artículo corriente, doméstico o no: toallas, tornillos, escobas, motores eléctricos, etc.; siempre existe demanda para tales artículos, tal vez con oscilaciones estacionales, por lo que puede esperarse que los excedentes a final de un intervalo de tiempo se venderán en intervalos futuros sucesivos. En consecuencia, no existirán excedentes en el sentido de los párrafos anteriores y por tanto tampoco penalización por excedentes; la consideración de las cargas por el inmovilizado será suficiente para analizar la gestión del stock.

En otras circunstancias intermedias el tema es más complejo: citaremos dos. Los artículos de moda (alta costura, lujo) tienen dos estaciones que denominaremos primavera y otoño; los excedentes de una estación tienen pocas oportunidades de ser aceptados al año siguiente, pues aparte del coste de inmovilización, almacenaje y mantenimiento, los dictadores de la moda ya cuidarán de modificar las apetencias del mercado. Previamente, y durante la temporada, pueden existir una o varias ocasiones para realizar pedidos, pero en cualquier caso en el último intervalo será necesario tener en cuenta la penalización por excedentes, pues los artículos perderán dramáticamente su valor.

En los productos industriales complejos y sometidos a modificaciones (por ejemplo, el automóvil) una pieza determinada será vigente durante años, consumiéndose en cantidades considerables, hasta que sea substituida por otra. Los excedentes en este caso, salvo su utilización en recambios, indeseable por motivos organizativos si la nueva pieza es intercambiable, pasarán bruscamente a tener un valor nulo.

5.1.1.3.2 Costes de ruptura

El coste ligado a la no disponibilidad de un artículo en stock cuando existe demanda para él se denomina penalización por carencia, coste de carencia o coste de ruptura. Existen dos variantes extremas según la reacción del cliente eventual ante la falta de disponibilidad. La primera variante se presenta, por ejemplo, en las ventas por correspondencia. Si el stock es nulo cuando se recibe el pedido del cliente, la empresa se reaprovisiona siguiendo un procedimiento acelerado de urgencia. Esta situación típica corresponde a un pedido no servido, pero mantenido: se produce lo que denominaremos un débito. La venta no se ha perdido, se necesitan simplemente unos días de plazo para efectuar la expedición. Sin embargo, el resultado de la carencia es el de crear algunos costes adicionales: costes debidos a la utilización de procedimientos de urgencia, de las manutenciones, costes de embalajes y expediciones especiales, costes administrativos y de comunicación con el cliente, etc. Todos estos gastos deben incluirse en la penalización por carencia.

Una segunda variante se produce cuando se pierde la venta; sucede frecuentemente que un cliente de un librero no acepte esperar para obtener un libro que no está en la tienda y lo adquiera en una librería de la competencia. En primera aproximación, podemos estar tentados de medir el coste de este hecho mediante el margen no obtenido en la venta fallida, lo cual es peligroso por dos razones. En primer lugar se confunden los costes y los beneficios posibles no realizados. Por otro, tal vez no se ha perdido una venta sino un cliente; no es bueno mostrar que la competencia tiene un mejor servicio. Consecuentemente no es el coste de una sola venta no realizada el que habría que introducir en nuestros cálculos.

No es necesario añadir que evaluar este coste es muy difícil y frecuentemente imposible, de una forma totalmente objetiva. Habitualmente deberán aceptarse las estimaciones que haga un ejecutivo. (Naturalmente no sólo hay clientes propios que se pasan a la competencia sino también al revés; las cuantías respectivas serían los valores críticos a tener en cuenta).

Otro tipo de penalización por carencia aparece en los problemas de aprovisionamiento interno de piezas, materia prima o subconjuntos. De forma general las consecuencias de una ruptura de stock pueden ir desde la necesidad de substituir el artículo que falta por otro (menos adecuado, de mejor o peor calidad, más caro, etc.) hasta la interrupción del proceso de producción por falta de un material crítico. Por ejemplo, si una empresa carece de unos tornillos de ciertas características que necesita en su producción, puede excepcionalmente utilizar otros análogos, hechos de otro material, o bien de un tipo más caro; el coste suplementario que representa esta substitución constituye el coste de ruptura en este caso.

Por otra parte, si una empresa se queda sin una materia prima esencial puede suceder que deba pararse toda la cadena de producción, con las consecuencias y costes directos e indirectos que ello significa.

El coste de carencia puede ser proporcional al número de rupturas, o a la demanda llegada en ruptura de stock, o al tiempo de ruptura. Su valor unitario se representa en este texto por CD, en caso de que pueda diferirse la demanda llegada en ruptura de stock y CR en los

demás casos. Las unidades serán habitualmente [PTA]/[unidad] o [PTA]/[unidad]-[año] precisándose en cada caso las consideradas, en el contexto correspondiente.

5.1.1.3.3 Costes de adquisición

Otro tipo fundamental de costes son los de adquisición; constituidos en general por una parte fija, independiente de las unidades adquiridas (pero proporcional al número de pedidos o de aprovisionamientos) y otra variable función, frecuentemente proporcional, del número de unidades.

La parte fija, la denominaremos genéricamente coste de lanzamiento, la representaremos por *CL* **y sus unidades serán [PTA]/[pedido o lote]**

En el caso de artículos de origen exterior este coste está constituido por los costes de pasar un pedido: trabajos administrativos correspondientes, correo, transporte, control de recepción, etc.

En el caso de artículos de procedencia interior tendremos: trabajos administrativos de elaboración de una orden de producción, tiempo de preparación de las máquinas, transportes internos, etc.

El coste variable unitario lo representaremos habitualmente por *CA* **con unidades [PTA]/[unidad] y de ser constante intervendrá muy poco en la determinación de las políticas de gestión de stocks si no es a través de** *CS***.**

5.1.1.3.4 Otros costes

Podemos citar entre ellos los siguientes:

- **costes de información y control, que reflejan el coste de obtención de la información para la aplicación de las reglas de gestión. Lo representaremos por CI, con unidades [PTA]/[revisión]. Sólo lo tendremos en cuenta cuando convenga enfrentar procedimientos con necesidades informativas distintas.**

- **costes asociados a la variación de capacidad, por ejemplo ligados a un cambio de nivel de producción. Aparecerán sólo en los modelos agregados.**

5.1.1.3.5 Evaluación de los costes

No es posible dar normas generales sobre la forma en que pueden evaluarse los costes, no existe ningún método general aplicable a todos los casos. En la práctica, y en función de

las informaciones disponibles, se deberá recurrir al procedimiento que parezca más adecuado que dependerá mucho de la forma en que la empresa considerada lleve la contabilidad.

Por otra parte la clasificación contable de costes fijos y variables no corresponde habitualmente a la que precisamos. En algunos casos podrán utilizarse métodos estadísticos aplicados a informaciones contables, en otros se deberá utilizar la opinión del ejecutivo responsable; ya hemos hablado de ello en relación al coste de pérdida de la clientela. Se puede preguntar al ejecutivo cuánto habría pagado para evitar la ruptura de stock y la insatisfacción subsiguiente de la demanda. Su opinión puede no ser "exacta", pero por lo menos tiene la ventaja de que la decisión que origina está de acuerdo con la opinión del ejecutivo.

En general, y ello es alentador, pueden medirse todos los costes que intervienen en una gestión de stocks con precisión suficiente para dar soluciones correctas. Las reglas de gestión no se ven afectadas profundamente por los errores habituales en la medida de los costes.

De todas formas, las dificultades existentes en la medición de los costes podrían llevar al siguiente razonamiento: "puesto que en cualquier caso es necesario efectuar estimaciones de los costes, ¿por qué no prescindir de todas las cuestiones teóricas y definir la política de gestión de stocks intuitivamente?".

En el fondo, cualquier regla de acción que se adopte implica una hipótesis referente a los costes: los valores relativos de los costes antagónicos quedan definidos. La esencia del asunto es si se desea tomarlos en consideración o bien dejarlos en la sombra. Es nuestra opinión que cualesquiera que sean las dificultades inherentes en la determinación de los costes se obtendrán mejores resultados utilizando explícitamente todas las informaciones disponibles que ignorándolas.

Pueden obtenerse resultados interesantes incluso cuando la determinación de los costes no es posible. Supongamos que analizamos la gestión de cierto artículo. El coste de posesión del stock, conocido, es de 10 PTA por unidad y mes. El único coste antagonista que existe es el de pérdida de la clientela subsiguiente a la ruptura de stock, coste que no sabemos estimar. Sin embargo, de acuerdo con la política de gestión existente podemos determinar el valor que implícitamente se atribuye a este coste; tal vez hallemos la cifra de 1.000.000 PTA por unidad; ocurre a veces. La sorpresa del responsable cuando se lo comuniquemos es comprensible, y el cambio de política que se debe seguir también. En las mismas circunstancias podremos determinar que los valores implícitos atribuidos a un coste son injustificablemente diferentes en las políticas establecidas para diferentes artículos; la homogeneización de los valores a través de modificaciones en las políticas será razonable en dichas circunstancias.

5.1.1.4 Clasificación

Vamos a continuación a describir unas clasificaciones debidas a E. Naddor, que nos parecen interesantes para formalizar los conceptos.

5.1.1.4.1 Clasificación de los sistemas de stock

En el fondo existe un sistema de stock cuando son significativos sólo tres tipos de coste, y dos cualesquiera por lo menos son susceptibles de control (a través de las variables de acción correspondientes):

1. coste de posesión
2. coste de ruptura
3. coste de adquisición

A partir de ahí, y según los costes que intervengan, pueden clasificarse los sistemas:

- **(1,2) sólo son controlables los costes de posesión y de ruptura.**
- **(1,3) sólo son controlables los costes de posesión y de adquisición (todos los sistemas sin rupturas son de este tipo).**
- **(2,3) sólo son controlables los costes de ruptura y de adquisición (este tipo se da raramente en la práctica).**
- **(1,2,3) todos los costes son controlables.**

No hay diferencias prácticas entre los tipos (1,3) y (2,3).

5.1.1.4.2 Clasificación de las políticas de stock

Normalmente las políticas de stock definen cuándo pedir o emitir una orden de reaprovisionamiento, y qué cantidad pedir. Para la primera puede recurrirse a fijar un punto de pedido s**, y pedir cuando las existencias sean inferiores a dicho valor, o a fijar un período** T **y efectuar un pedido en instantes concretos separados cada uno del anterior en dicha cantidad. Para la segunda se puede fijar una cantidad fija o lote** Q**, que es la cantidad solicitada en cada pedido o bien un nivel de referencia o cobertura** S**, y pedir cada vez la diferencia entre las existencias y dicha referencia. Si el plazo de entrega es significativo, utilizaremos** z **en lugar de** s **y** Z **en lugar de** S**.**

Las políticas de gestión de stocks podrán ser:

plazo de entrega		
no significativo		significativo
(s,Q)		(z,Q)
(T,S)		(T,Z)
(s,S)		(z,Z)
))) >	(T,Q)	<)))

Fig. 5.1.1.2 Políticas de gestión de stocks

Si el valor de una variable de acción está prescrito (fijado por consideraciones externas) se utiliza el subíndice *p*. Así en:

$$(s_p ,Q)$$

sólo hay que calcular *Q*. En general si:

s, S, z, Z **están prescritos**)))) **>**	**tipo (1,3)**
Q, T **están prescritos**)))) **>**	**tipo (1,2)**
nada está prescrito)))) **>**	**tipo (1,2,3)**

Fig. 5.1.1.3 Clasificación cruzada políticas/sistemas de stock

En el presente texto no utilizamos la nomenclatura *z*, Z y *p* subíndice, al no desarrollar los modelos aleatorios exactos y emplear el método heurístico.

5.1.1.4.3 Nomenclatura

Como complemento de las ideas anteriores, y para profundizar en la nomenclatura, consideremos un stock como un depósito:

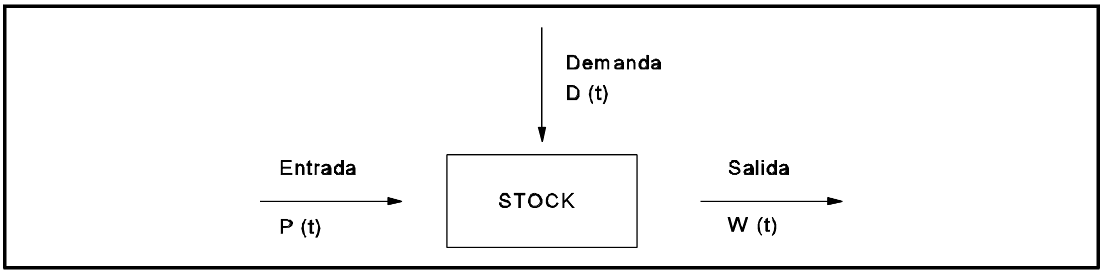


Fig.5.1.1.4 Entradas/salidas del stock

y definamos los siguientes valores, variables a lo largo del tiempo:

- I (t) = stock físico o existente, stock en mano (SOH : *stock-on-hand***)**
- B(t) = demanda diferida (*back-order***)**
- O(t) = pedidos cursados pendientes de recibir (*on-order***)**
- Y(t) = stock neto
- X(t) = posición de stock

Entre ellos se cumplen las siguientes relaciones:

$$Y(t) = I(t) - B(t)$$
$$X(t) = Y(t) + O(t) = I(t) - B(t) + O(t)$$

5.1.1.4.4 Clasificación de las características de los modelos de stocks

1. Precio de compra o coste de fabricación unitario
2. Coste de exigencia del stock por unidad de tiempo
3. Coste de ruptura de stock
   - a) Constante
   - b) Variable
4. Demanda
   - A Conocida
     - a) Constante
     - b) Variable
     - ") Estacional
     - $) No estacional
   - B Estimada
     - a) Aleatoria alrededor de un valor medio constante
     - b) Aleatoria alrededor de un valor medio variable
     - ") Estacional
     - $) No estacional
5. Cantidades pedidas
   - A. Cantidades discretas
   - B. Cantidades continuas
6. Distribución en el tiempo de las salidas del stock
   - A. Continuas
   - B. Discontinuas
     - a) A. intervalos iguales
     - b) A. intervalos variables
7. Plazo de entrega
   - A. Despreciable
   - B. Significativo
     - a) Conocido
     - b) Estimado
8. Intervalo entre los pedidos
   - A. Conocido
   - B. Estimado
     - a) Constante
     - b) Variable
9. Cantidades entradas en stock
   - A. Discretas
   - B. Continuas
     - a) Constante
     - b) Variable
10. Distribución en el tiempo de las entradas del stock
    - A. Continuas
    - B. Discretas
      - a) A. intervalos iguales
      - b) A. intervalos variables

Fig. 5.1.1.5 Clasificación de las características de los modelos de stocks

De todo lo anterior se deduce que los problemas de stocks pueden presentar muchas variantes según la forma que adopten las características de los mismos, por lo que los modelos correspondientes serán muy diversos y convendrá elegir en cada caso el más conveniente. La tabla de la *figura 5.1.1.4* reúne las características siguiendo a Churchman, Ackoff y Arnoff.

5.1.1.5 Decisiones relacionadas con los stocks

Las decisiones relacionadas con los stocks son de dos niveles, las de planificación de stocks, que tienen por objeto especificar las reglas o procedimientos de gestión, y las de control de stocks, que tienen por objeto la aplicación de dichas reglas a situaciones reales.

5.1.1.5.1 Decisiones de planificación de stocks

- *Artículos comprados*: No está incluida la decisión de fabricar o comprar en las decisiones propias de operaciones, por cuanto esta decisión pertenece en líneas generales a diseño, y debe tomarse conjuntamente por ingeniería, compras y producción. Sólo en aquellos artículos en los que exista dualidad de procedencia, interior y exterior, puede quedar en manos de operaciones la administración de la distribución entre dichos orígenes de las necesidades. Por consiguiente, partimos de la base que está completamente definido si un artículo se compra o se fabrica.

  En dichas circunstancias una decisión básica corresponde a la elección del sistema a emplear en el control de stocks. Este sistema deberá comprender reglas que conduzcan a pedidos económicos en cuanto a tamaño y frecuencia (cuándo y cuánto). Asimismo es crítica la fijación del tamaño del stock de seguridad, de la anticipación con que deben cursarse los pedidos, si deben considerarse los descuentos por cantidad, la agrupación de pedidos de artículos distintos cursados a un mismo proveedor, etc.

- *Artículos fabricados*: La decisión crucial en este caso se centra en si dichos artículos deben almacenarse o no. El sistema de control de stocks para artículos fabricados debe seguir muy de cerca el plan de operaciones detallado. Cuando varios artículos utilizan los mismos medios de producción, deben considerarse conjuntamente en la determinación de los lotes de producción.

- *Nivel de la obra en curso*: La obra en curso permite desacoplar parcialmente los diversos subsistemas del sistema productivo, con lo cual un incidente en uno de ellos no repercute obligatoriamente en todos los demás; sin embargo, una obra en curso elevada, que permitirá trabajar cómodamente, representará unas cargas financieras frecuentemente insostenibles. Las decisiones sobre el nivel de la obra en curso son fundamentales, y sus consecuencias son difíciles de analizar "a priori".

- *Adaptación a las limitaciones*: **Las limitaciones de todo tipo, de espacio, financieras, etc. pueden obligar a adoptar reglas no "óptimas" respecto a la situación en que no existan estas limitaciones.**

5.1.1.5.2 Decisiones de control de stocks

- **¿Debe formalizarse o no un pedido?**
- **¿Qué cantidad se debe pedir?**
- **¿Se debe apresurar o no un pedido?**
- **¿Cómo se debe reaccionar frente a condiciones anormales del mercado o de la producción?**

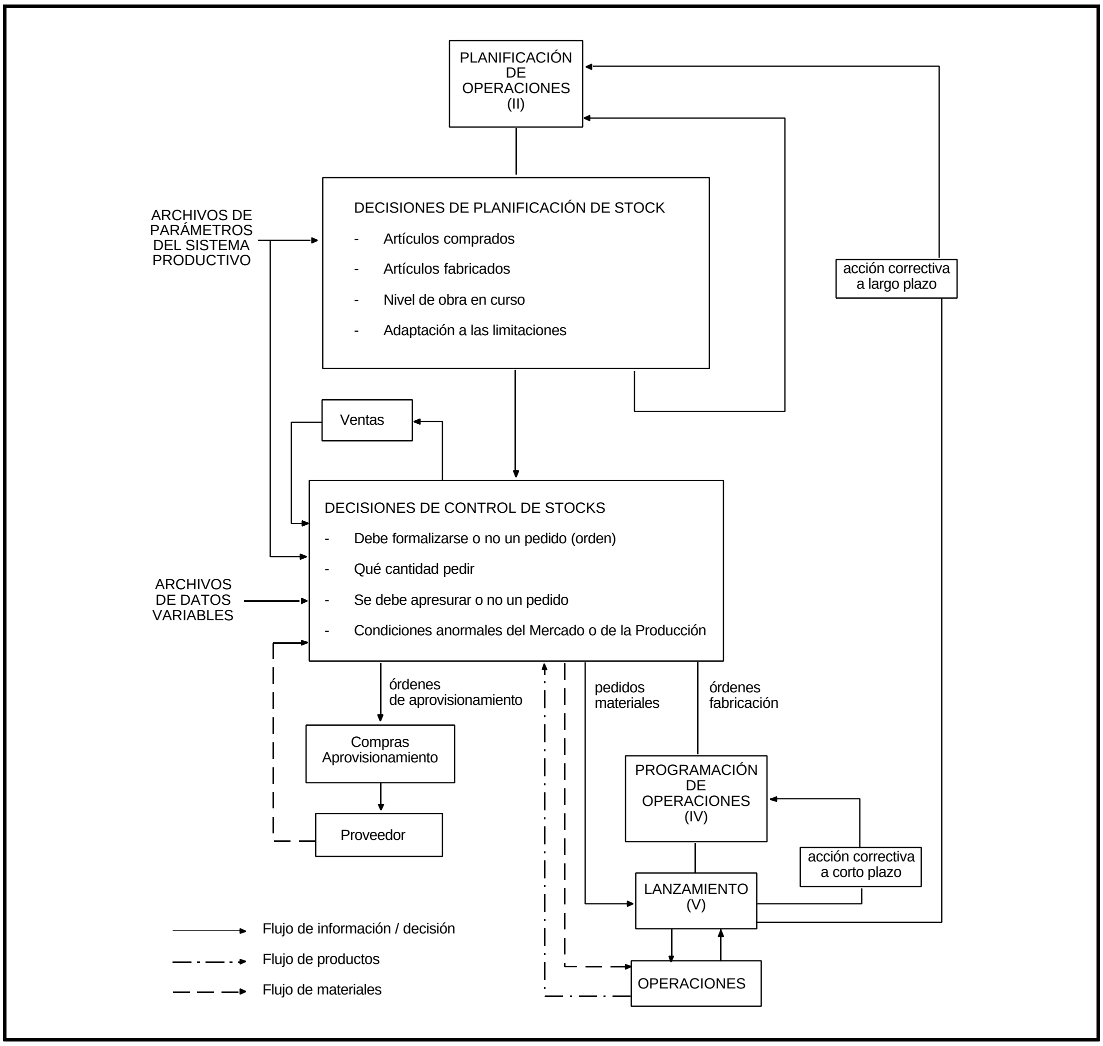


Fig. 5.1.1.6 Diagrama de flujo de las decisiones sobre stocks (basado en Mize et al.)

5.1.1.6 Análisis A-B-C

Frecuentemente la gestión de stocks implica la consideración de miles de artículos y centenares de miles de transacciones al año, cuando no más. Es recomendable, por tanto, que la atención de los gestores no se disperse y esté concentrada en los aspectos importantes. Esto implica la clasificación de los artículos en categorías distintas, según su grado de importancia, y un trato diferente a los artículos según la categoría a la que están adscritos. Un procedimiento para proceder a esta clasificación es el denominado análisis A-B-C o análisis de Pareto (que de hecho es una herramienta organizativa de uso general).

Consideremos un índice crítico sintético que permita definir la mayor o menor importancia de los artículos; el empleado habitualmente es el denominado "uso o consumo anual en unidad monetaria" que resulta de multiplicar la demanda o consumo anual en unidades por el valor unitario del artículo; después ordenaremos los artículos por valor decreciente de este índice. Si representamos en un diagrama en uno de los ejes los artículos en este orden y en el otro el uso anual acumulado (lo que nos permite substituir fácilmente los valores absolutos por porcentajes) obtendremos normalmente un esquema parecido a la *figura 5.1.1.7*, donde pocos artículos, relativamente, son responsables de la mayoría del movimiento en unidades monetarias. Ello permite clasificar los artículos en cierto número de clases, por ejemplo 3, en orden de importancia, siendo indicativas las proporciones siguientes:

Clase A:	75 a 80% del uso	15 a 20% de artículos
Clase B:	10 a 15% del uso	20 a 25% de artículos
Clase C:	5 a 10% del uso	60 a 65% de artículos

5.1.1.6.1 Ejemplo

Sean los 20 artículos de la tabla de la *figura 5.1.1.8*, en los que se indica la demanda o consumo anual, el valor unitario y el uso anual en unidades monetarias que resulta de multiplicar los dos valores anteriores.

Ordenando los artículos en orden creciente del uso anual obtendremos la tabla de la *figura 5.1.1.9*, en la que se incluye el uso anual acumulado en valor absoluto y en porcentaje. La agrupación en clases posee cierto grado de arbitrariedad, podemos situar en clase A los 4 primeros artículos, en la B los seis siguientes y en la C el resto, aunque el establecimiento de las fronteras puede ser discutible. En la *figura 5.1.1.10* incluimos un resumen de esta clasificación, en donde los valores son bastante coherentes con los indicados a pesar del reducido número de artículos considerados.

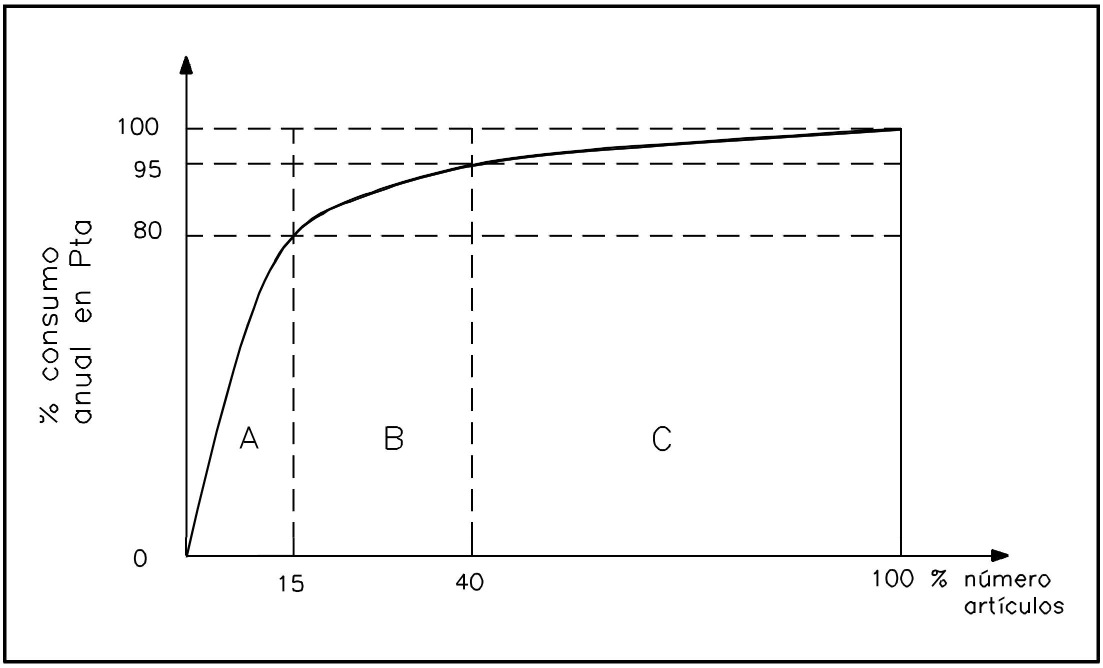


Fig. 5.1.1.7 Clasificación A-B-C por consumo anual en unidades monetarias

Artículo		demanda	val.un.	uso anual
1	A01	2.000	0,12	240
2	A02	12.000	0,30	3.600
3	A03	1.000	0,11	110
4	A04	20.000	0,16	3.200
5	B01	4.000	0,10	400
6	B02	500	0,25	125
7	B03	1.000	0,15	150
8	B04	4.000	0,12	480
9	C01	500	0,15	75
10	C02	1.200	0,10	120
11	C03	4.000	0,08	320
12	C04	5.000	0,09	450
13	D01	2.000	0,05	100
14	D02	12.000	0,18	2.160
15	D03	2.000	0,05	100
16	D04	1.000	0,04	40
17	E01	3.000	0,03	90
18	E02	4.000	0,10	400
19	E03	3.000	0,04	120
20	E04	8.000	0,25	2.000
			total uso anual	14.280

Fig. 5.1.1.8 Datos de 20 artículos

Artículo		uso anual	acumulado	%
2	A02	3.600	3.600	25,21
4	A04	3.200	6.800	47,62
14	D02	2.160	8.960	62,75
20	E04	2.000	10.960	76,75
8	B04	480	11.440	80,11
12	C04	450	11.890	83,26
5	B01	400	12.290	86,06
18	E02	400	12.690	88,87
11	C03	320	13.010	91,11
1	A01	240	13.250	92,79
7	B03	150	13.400	93,84
6	B02	125	13.525	94,71
10	C02	120	13.645	95,55
19	E03	120	13.765	96,39
3	A03	110	13.875	97,16
13	D01	100	13.975	97,86
15	D03	100	14.075	98,56
17	E01	90	14.165	99,19
9	C01	75	14.240	99,72
16	D04	40	14.280	100,00

Fig. 5.1.1.9 Artículos ordenados para proceder a la clasificación A-B-C

Clase	artículos	% de artículos	% de uso anual
A	A02 A04 D02 E04	20	76,75
B	B04 C04 B01 E02 C03 A01	30	16,04
C	B03 B02 C02 E03 A03 D01 D03 E01 C01 D04	50	7,21

Fig. 5.1.1.10 Resumen de la clasificación A-B-C

5.1.1.6.2 Explotación del análisis A-B-C

Los artículos A necesitan más atención y control que los C; esto puede traducirse de diferentes formas: los artículos A se aprovisionan semanalmente, los B quincenalmente, los C trimestralmente o semestralmente. Alternativamente el lote de reaprovisionamiento de los A se determina cuidadosamente y, a cada reaprovisionamiento, se recalculan y reestiman los parámetros, en los B la actualización de los parametros puede ser semestral, en los C una actualización anual bastará y el lote puede llegar a ser un año de consumo.

La clasificación indicada sólo tiene en cuenta el aspecto económico, pero pueden existir otros factores que obliguen a establecer subclasificaciones o bien a cambiar de clase un artículo determinado. Entre ellos cabe citar:

1. Dificultades de previsión (amplios cambios en la demanda o en el consumo)
2. Dificultad de aprovisionamiento (plazo de entrega largo e infiable)
3. Dificultades de almacenaje (mucho espacio o acondicionamiento especial)
4. Obsolescencia o caducidad a corto plazo
5. Criticidad del artículo.

5.1.1.7 Concepto de compra y de aprovisionamiento

Todas las organizaciones en mayor o menor grado dependen de los materiales y servicios suministrados por otras organizaciones. Puesto que ninguna organización es autosuficiente, las funciones compras y aprovisionamiento están ampliamente difundidas en todo tipo de organización. Compra corresponde al intercambio de dinero por bienes o servicios, mientras que aprovisionamiento corresponde a la obtención de los bienes o servicios de la calidad prescrita, en la cantidad requerida y en el instante preciso.
Tanto compras como aprovisionamiento pueden efectuar importantes contribuciones a la eficacia y a la eficiencia de la organización. Unas cifras porcentuales tipo en el área industrial pueden ser las siguientes:

Ventas	100
Materiales y servicios externos	50
Nómina y costes de personal	30
Gastos generales	15
Rendimiento	5

de donde se deduce el resultado potencial de toda acción tendente a mejorar la obtención de los materiales exteriores.

5.1.1.7.1 La función compras

En el presente texto adscribiremos a la función compras las actividades relacionadas con:

- Determinación de fuentes de suministro,
- selección de proveedores,
- determinación de precios: negociación,
- obtención de descuentos y rappels,
- establecimiento de contratos,
- cláusulas legales, penalizaciones, etc.,
- establecimiento de los acuerdos sobre portes,
- distribución de cuotas a los proveedores,
- homologación de proveedores y de proveedores-pieza,
- calificación de proveedores,

aunque algunas de ellas deberán desempeñarse en colaboración con otras funciones de la empresa, tales como ingeniería, aprovisionamiento o calidad, y especialmente, por su repercusión, con finanzas.

5.1.1.7.2 La función aprovisionamiento

La función aprovisionamiento, a su vez, está ligada con las siguientes actividades:
- cálculo de necesidades,
- programación a proveedores (con reparto de acuerdo a los contratos establecidos por compras),
- seguimiento de los pedidos y programas en función de las entregas (y la producción realizada),
- impulsión (o desaceleración, en su caso) de pedidos,
- recepción,
- gestión de almacenes,
- suministro a línea,

por lo que su actuación está dentro de un marco establecido por compras. La relación más fuerte de aprovisionamiento, a parte de compras y los proveedores, se establece con producción.

5.1.1.7.3 Estructura jerárquica

Como es bien sabido, no existe ninguna estructura organizativa tipo que convenga a la vez a todas las empresas, y tal vez por estas circunstancias existen todo tipo de soluciones en las empresas industriales relativas al encuadre orgánico de las funciones aprovisionamiento y compras, incluso en algunos casos se produce la repartición de la función aprovisionamiento entre dos entes distintos, lo que ya nos parece más discutible.

Nuestra posición es que independientemente de la estructura exista, dentro de la empresa, la conciencia de las dos funciones.

5.1.2 Modelos deterministas

Estos modelos derivan en general de la llamada fórmula de Wilson; fue descubierta por F.W. Harris en 1913, redescubierta por R.H. Wilson en 1918, y en 1931 F.E. Raymond le dedicó un libro.

5.1.2.1 Fórmula de Wilson

Las hipótesis en que se basa la formulación que sigue son:

- **Demanda constante, conocida, homogénea en el tiempo de** D **unidades/año**
- **Plazo de entrega constante, conocido,** L
- **No se aceptan rupturas**
- **Coste variable de adquisición,** CA **PTA/unidad, constante, independiente del tamaño del lote**
- **Entrada del lote en bloque**
- **Coste de lanzamiento** CL **PTA/pedido y coste de posesión** CS **PTA/unidad-año (en muchas circunstancias** $CS = i \cdot CA$**, donde** i **es una tasa anual).**

Puesto que disponemos de un conocimiento perfecto de la situación, lo más económico consistirá en organizar los pedidos de forma que las entradas en el stock se realicen en el momento en que éste alcanza el valor cero y, puesto que todos los parámetros se mantienen constantes a lo largo del tiempo, todos los lotes serán iguales, con lo que la representación del nivel de stock a lo largo del tiempo adopta la conocida forma de diente de sierra (*fig. 5.1.2.1)***.**

Puesto que $Q = T \cdot D$**, a fin de que cada lote se haya agotado cuando entre el siguiente, el modelo es función de una sola variable. Para determinar el coste medio anual,** $K(Q)$**, basta tener en cuenta que el número medio de pedidos al año será** D/Q **(medio, pues** D/Q **puede no ser entero), mientras que el stock medio es** $Q/2$**, y por tanto:**

$$K_Q = CL \cdot \frac{D}{Q} + CA \cdot D + CS \cdot \frac{Q}{2}$$

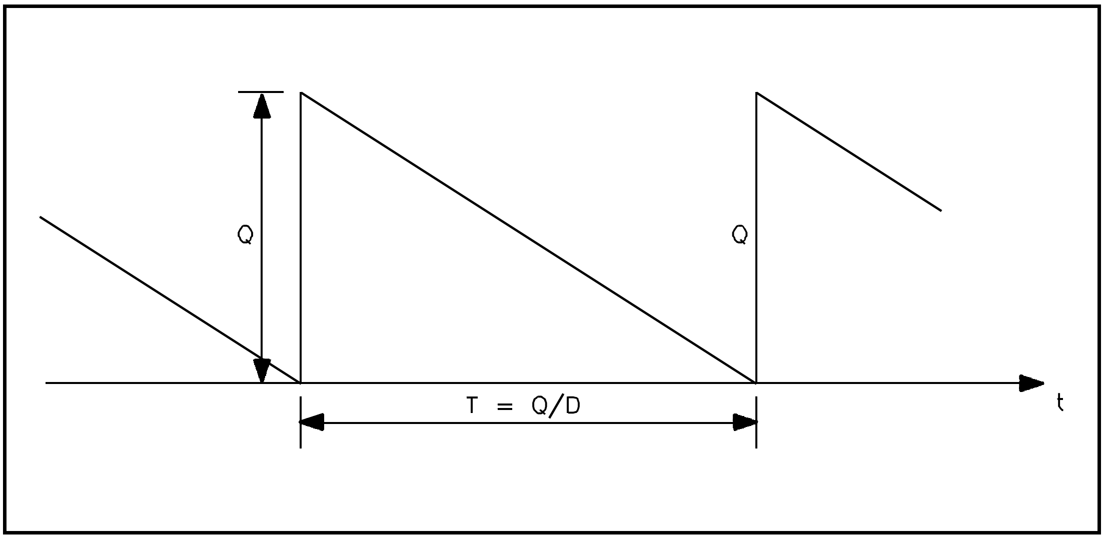


Fig. 5.1.2.1 Evolución del nivel de stock

El segundo término, $CA \cdot D$, es independiente de Q y por tanto podemos prescindir de él. En cuanto al primero y al tercero, que dependen de Q, tienen el producto constante por lo que el mínimo se obtendrá cuando sean iguales. Otra forma de hallar el mínimo es igualando la primera derivada a cero:

$$\frac{dK(Q)}{dQ} = -CL \cdot \frac{D}{Q^2} + \frac{1}{2} \cdot CS = 0$$

de donde:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot CL}{CS}}$$

que corresponde a un mínimo, pues la segunda derivada es positiva. Por tanto:

$$K^* = CA \cdot D + \sqrt{2 \cdot D \cdot CL \cdot CS}$$

y el período y frecuencia de los pedidos:

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot CL}{D \cdot CS}} \quad ; \quad N^* = \sqrt{\frac{D \cdot CS}{2 \cdot CL}}$$

La expresión de Q^* **se conoce con el nombre de fórmula del "lote económico" o EOQ (***economic order quantity***).**

En los artículos con poco movimiento, unidad a unidad, el trazo continuo en la parte descendiente del diente de sierra debería substituirse por un trazo escalonado, y el stock medio sería (*Q***-1)/2. El valor** Q^* **óptimo será el entero que cumple:**

$$(Q-1)\cdot Q \quad < \quad 2\cdot D\cdot\frac{CL}{CS} \quad \leq \quad Q\cdot(Q+1)$$

si la segunda condición se cumple con el signo " = " entonces son óptimos no solo el valor de Q **hallado, sino también** $Q+1$**.**

5.1.2.2 Fórmula general

Vamos a relajar algunos de los condicionantes de las hipótesis anteriores:

- **La entrada del lote en stock es progresiva, a la tasa de** P **unidades/año (se deber cumplir** $P > D$ **, pues si** $P < D$ **o** $P = D$ **se precisaría una entrada continua y no por lotes, lo que no sería suficiente en el primer caso para atender a la demanda).**

- **Se pueden diferir las entregas para atender la demanda con una penalización de** CD **PTA/unidad-año.**

La forma de los dientes de sierra será ahora (*fig. 5.1.2.2***).**

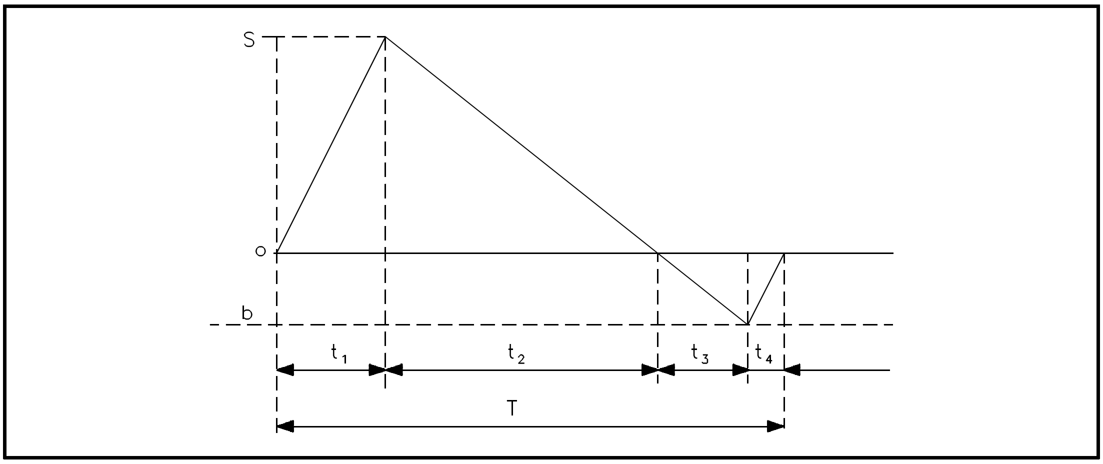


Fig. 5.1.2.2 Evolución del nivel de stock

$$S = (P - D) \cdot t_1 = D \cdot t_2$$

$$b = D \cdot t_3 = (P - D) \cdot t_4$$

$$Q = D \cdot T = P \cdot (t_1 + t_4)$$

de donde,

$$Q = D \cdot (t_1 + t_4) + S + b = D \cdot \frac{(S + b)}{(P - D)} + (S + b) = \frac{(S + b) \cdot P}{(P - D)}$$

coste por período:

$$CL + CA \cdot Q + CS \cdot (t_1 + t_2) \cdot \frac{S}{2} + CD \cdot (t_3 + t_4) \cdot \frac{b}{2}$$

coste medio anual:

$$K(Q,b) = CL \cdot \frac{D}{Q} + CA \cdot D + CS \cdot \frac{S}{2} \cdot \frac{t_1 + t_2}{T} + CD \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{t_3 + t_4}{T}$$

y llamando $\frac{CD}{CD + CS} = \rho$ **razón de carencia o de fallo, el mínimo de las expresiones anteriores se obtiene para:**

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot CL}{CS} \cdot \frac{1}{\rho \cdot (1 - D/P)}} \qquad S^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot CL}{CS} \cdot \rho \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right)}$$

$$b^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot CL}{CD} \cdot (1 - \rho) \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right)} \qquad K^* = CA \cdot D + \sqrt{2 \cdot D \cdot CL \cdot CS \cdot \rho \cdot \left(1 - \frac{D}{P}\right)}$$

Este modelo se reduce al anterior haciendo $\rho = 1$ **y** $P = \infty$**.**

Si además consideramos un coste $\hat{CD}$ **por unidad diferida (independiente del tiempo):**

$$K(Q,b) = CL \cdot \frac{D}{Q} + CA \cdot D + CS \cdot \frac{S}{2} \cdot \left(\frac{t_1 + t_2}{T}\right) + CD \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{t_3 + t_4}{T}\right) + \hat{CD} \cdot b \cdot \frac{D}{Q}$$

de donde:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot CL}{CS \cdot (1 - D/P)} - \frac{(\hat{CD} \cdot D)^2}{CS \cdot (CS + CD)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho}}$$

$$b^* = \frac{CS \cdot Q^* - \hat{CD} \cdot D) \cdot (1 - D/P)}{CS + CD}$$

cuando $\hat{CD} = 0$ obtendremos lo mismo que antes. Si $CD > 0$ y $\hat{CD} > 0$, la cantidad subradical de Q^* puede ser negativa (si $\hat{CD}$ es suficientemente grande); en tal caso la política óptima consiste en evitar las rupturas de stock: $b^* = 0$, y usaremos las fórmulas anteriores con $\rho = 1$:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot CL}{CS \cdot (1 - D/P)}}$$

Si $CD = 0$ y $\hat{CD} > 0$ puede demostrarse que la política óptima es extrema: no rupturas o no stock:

con $\hat{CD} > \sqrt{\frac{2 \cdot CL \cdot CS}{D \cdot (1 - D/P)}} \quad \Rightarrow \quad b^* = 0$; $\quad S^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot CL \cdot (1 - D/P}{CS}}$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot CL}{CS \cdot (1 - D/P)}}$$

con $\hat{CD} < \sqrt{\frac{2 \cdot CL \cdot CS}{D \cdot (1 - D/P)}}$ lo conveniente es no pedir nunca, y por tanto ir aumentando indefinidamente los débitos.

En el caso de demanda diferida sólo podemos concluir que el modelo no es adecuado.

En el caso de que la demanda insatisfecha se perdiera, el modelo más adecuado sería similar al último considerado (con $CD = 0$ y $\hat{CD} > 0$) con ciertas modificaciones para tener en cuenta que las entradas no son iguales a la demanda a causa de esta pérdida. Como es obvio, la conclusión sería la misma; lo conveniente es o no tener rupturas, o no aprovisionarse nunca, si es menos cara la ruptura que el mantener un stock. Debido a ello renunciamos a desarrollar este modelo.

5.1.2.2.1 Efecto del plazo de entrega

Si existe un plazo de entrega L, y hay que pedir en el momento adecuado para que el reaprovisionamiento se produzca en el instante justo, podemos preguntarnos qué stock tendremos en mano cuando emitamos un pedido. En el caso del modelo general (que fácilmente podrá referirse a casos más sencillos), siendo m la parte entera de L/T:

si $L - m \cdot T < t_2 + t_3$ $\quad$ stock $= L \cdot D - m \cdot D - b$

si $L - m \cdot T > t_2 + t_3$ $\quad$ stock $= (m + 1) \cdot \left(\frac{Q}{D} - L \right) \cdot (P - D) - b$

Este nivel de stock es análogo al punto de pedido que veremos más adelante en los modelos aleatorios (salvo que aquí está referido al stock en mano y allí, habitualmente, a la posición de stock).

5.1.2.2.2 Ejemplo

Una compañía compra válvulas que se usan a la tasa de 200 por año. El coste de cada válvula es 50 *um* **y el coste de pasar cada pedido es 5** *um*. **El coste de posesión se contabiliza al 0,10 anual. Si se produce ruptura de stock la demanda insatisfecha se difiere a un coste fijo de 0,20** *um*/**unidad y un coste variable de 10** *um* **por unidad y año. El plazo de entrega es de 6 meses. ¿Cuál debe ser el lote de aprovisionamiento?**

Tenemos:

$$D = 200 \;\; ; \;\; L = 0{,}5 \;\; ; \;\; CA = 50 : i = 0{,}10 \;\; ; \;\; CS = 0{,}10 \times 50 = 5 \;\; ; \;\; CD = 10 \;\; ;$$

$$\hat{CD} = 0'20 \;\; ; \;\; \rho = \frac{10}{5+10} = \frac{2}{3}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 200 \times 5}{5} - \frac{(0{,}20 \times 200)^2}{5 \times (5+10)}} \times \sqrt{\frac{3}{2}} = 23{,}83 \simeq 24$$

$$b^* = \frac{5 \times 24 - 0'2 \times 200}{5+10} = 5{,}33 \sim 5$$

Longitud del ciclo: $T = \dfrac{24}{200} = 0{,}12$ **años;**

$m =$ **parte entera** $\left[\dfrac{0{,}5}{0{,}12}\right] = 4;$

Punto de pedido: $s = L \cdot D - m \cdot Q - b = 0{,}5 \times 200 - 4 \times 24 - 5 = -1$

Puesto que el *pp* **es negativo, se piden 24 válvulas cuando los retrasos alcanzan 1 válvula. (Puesto que hay 4 pedidos en curso, emitidos pero no recibidos, la posición de stock es: -1 + 4 x 24 = 95 unidades).**

El coste medio anual será: $K(24, 5) = 10.057{,}19$ **um. (De ellas 10.000 corresponden a** $CA \cdot D$ **y 57,19 al resto).**

5.1.2.3 Coste de adquisición función del lote

Si *CA* es función de *Q* (no creciente) no puede prescindirse de él en la optimización:

$$K(Q) + CL \cdot \frac{D}{Q} + CA(Q) \cdot D + CS \cdot \frac{Q}{2}$$

de donde, si *CA(Q)* es derivable, (suponiendo *CS* fijo y no proporcional a *CA*):

$$\frac{dK}{dQ} = - CL \cdot \frac{D}{Q^2} + D \cdot \frac{dCA}{dQ} + \frac{CS}{2} = 0$$

si se conociera $z = \frac{dCA}{dQ}$**:**

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot CL \cdot D}{CS + 2 \cdot D \cdot z}}$$

que posiblemente permitirá utilizar la forma recurrente:

$$Q(r+1) = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot CL}{CS + 2 \cdot D \cdot z(r)}} \quad \textbf{con} \quad z(r) = \frac{dCA}{dQ(r)} \quad \textbf{y} \quad z(0) = 0$$

Analizaremos a continuación unos casos más realistas en los que los valores de CA varían por intervalos.

5.1.2.3.1 Rebajas uniformes - descuentos a todas las unidades

Con un lote *Q* el coste de adquisición (fijo más variable) es:

$$CL + CA_j \cdot Q \quad \textbf{si} \quad N_{j-1} \le Q < N_j \; ; \; j = 1, 2, \ldots, J \quad \textbf{con} \quad CA_j < CA_{j-1}$$

- **-** N_0 **es la cantidad mínima que puede pedirse**
- **-** N_J **es el tamaño máximo del pedido (normalmente infinito)**
- **- No se aceptan rupturas**
- **- El coste de posesión es proporcional a *CA*,** $CS_j = i \cdot CA_j$
- **- La tasa de entrada es infinita**

En estas condiciones llamaremos:

$$K_j(Q) = CL \cdot \frac{D}{Q} + CA_j \cdot D + i \cdot CA_j \cdot \frac{Q}{2},$$

y

$$K(Q) = K_j(Q) \quad \text{si} \quad N_{j-1} \leq Q < N_j;\ J = 1, 2, \ldots, J$$

Para hallar el valor óptimo de Q debemos hallar el mínimo del coste en cada segmento de K, compararlos y hallar el mínimo global. Más precisamente: sea Q_j^* el valor de Q que minimiza $K_j(Q)$ en el intervalo $N_{j-1} \leq Q < N_j$; se define Q^* como el lote económico óptimo global:

$$K(Q^*) = \min_j K_j(Q_j^*)$$

Para hallar el valor mínimo del coste $K_j(Q_j^*)$ en cada segmento primero se halla Q_j^*. Sea Q_j^0 el valor que conduce al mínimo de la función $K_j(Q)$:

$$Q_j^0 = \sqrt{2 \cdot D \cdot \frac{CL}{i \cdot CA_j}}$$

si Q_j^o pertenece a $[N_{j-1}, N_j[$ entonces $Q_j^* = Q_j^o$

si $Q_j^o < N_{j-1}$ $\quad Q_j^* = N_{j-1}$

si $Q_j^o > N_j$ $\quad Q_j^* = N_j$,

el óptimo global no puede estar en la región en que $Q_j^o > N_j$, pues:

$$Q_j^0 < Q_{j+1}^0 \quad \text{y} \quad K_j(Q_j^*) > K_{j+1}(Q_j^*)$$

Por tanto, hay que empezar por K_J y hallar Q_J^*, Q_{J-1}^*, ... hasta llegar a un intervalo k tal que $Q_k^* = Q_k^o$. La solución óptima global es uno de los valores:

$$Q_k^*,\ Q_{k+1}^*,\ \ldots,\ Q_J^*$$

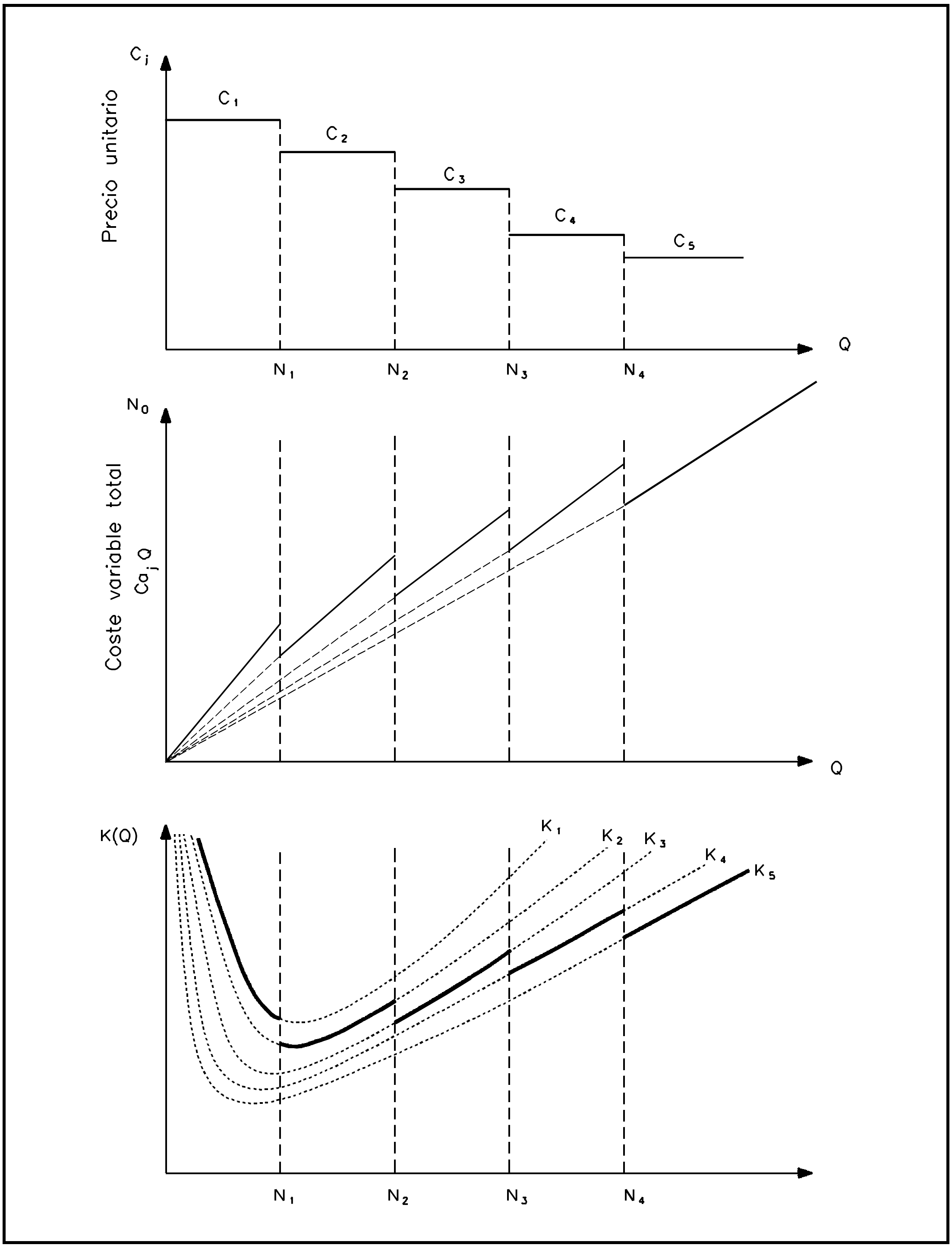


Fig. 5.1.2.3 Rebajas uniformes. Descuento a todas las unidades

5.1.2.3.2 Ejemplo

Un fabricante utiliza grandes cantidades de una pieza exterior en su línea de montaje. Desea utilizar un lote de aprovisionamiento de tamaño fijo y especifica que no acepta rupturas. Datos:

a) **Necesidades anuales: 300.000 unidades distribuidas uniformemente a lo largo del año**

b) **Coste fijo de pasar un pedido: 80** *um*.

c) **Coste anual de intereses, seguro, impuestos en la inversión media del stock: 20% del valor del stock medio.**

d) **Coste de almacenaje: 0,10** *um*/**unidad-mes sobre la cantidad almacenada media.**

e) **Precio del vendedor: una carga fija de 20** *um* **por orden más un coste unitario según la tabla:**

LOTE	COSTE VARIABLE/UNIDAD
$0 \leq Q < 10.000$	1,00 *um*
$10.000 \leq Q < 30.000$	0,98 *um*
$30.000 \leq Q < 50.000$	0,96 *um*
$50.000 \leq Q$	0,94 *um*

Fig. 5.1.2.4 Datos del ejemplo

De lo anterior se deduce:

$$CL = 80 + 20 = 100$$

para $j = 1, 2, 3, 4$:

$$K(Q) = \frac{100 \times 300.000}{Q} + 300.000 \cdot CA_j + (0,20 \cdot CA_j + 1,20) \cdot \frac{Q}{2}$$

de donde

$$Q_j^0 = 1000 \cdot \sqrt{\frac{60}{1,20 + 0,20 \cdot CA_j}}$$

$$j = 4,\ CA_4 = 0,94;\ Q_4^0 = 6.580 < N_3 = 50.000, \quad \text{por tanto} \quad Q_4^* = 50.000$$

$$j = 3,\ CA_3 = 0,96;\ Q_3^0 = 6.570 < N_2 = 30.000, \quad \text{por tanto} \quad Q_3^* = 30.000$$

$$j = 2,\ CA_2 = 0,98;\ Q_2^0 = 6.560 < N_1 = 10.000, \quad \text{por tanto} \quad Q_2^* = 10.000$$

$$j = 1,\ CA_1 = 1,00;\ Q_1^0 = 6.550 \quad \text{por tanto} \quad Q_1^* = 6.550$$

K(6.550) = 309.155
K(10.000) = 303.980 (mínimo)
K(30.000) = 309.880
K(50.000) = 317.500

Por tanto, se adquirirá la pieza en lotes de 10.000 unidades.

5.1.2.3.3 Rebajas graduales - descuentos incrementales

Aquí el precio reducido se aplica sólo a las unidades que se encuentran dentro del intervalo y no a todas, por lo que el precio medio varía continuamente; el valor óptimo no puede encontrarse en el límite de un intervalo. Sea el coste de adquisición de Q unidades CL + V(Q) con:

$$V(Q) = \sum_{k=1}^{j-1} CA_k \cdot (N_k - N_{k-1}) + CA_j \cdot (Q - N_{j-1}) \quad \text{si} \quad N_{j-1} \le Q < N_j$$

$$V(Q) = V(N_{j-1}) + CA_j \cdot (Q - N_{j-1}) \qquad \text{si} \quad N_{j-1} \le Q < N_j$$

por tanto el coste anual es:

$$K(Q) = K_j(Q) \qquad \text{si} \quad N_{j-1} \le Q < N_j$$

donde:

$$K_j(Q) = [CL + V(Q)] \cdot \frac{D}{Q} + i \cdot \left[\frac{V(Q)}{Q}\right] \cdot \frac{Q}{2} =$$

$$= \left[CL + V(N_{j-1}) + CA_j \cdot (Q - N_{j-1})\right] \cdot \frac{D}{Q} + \frac{i}{2} \cdot \left[V(N_{j-1}) + CA_j \cdot (Q - N_{j-1})\right]$$

por tanto:

$$Q_j^o = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot \left[CL + V(N_{j-1}) - CA_j \cdot N_{j-1}\right]}{i \cdot CA_j}}$$

si $N_{j-1} \le Q_j^o < N_j$ calculamos $K_j(Q_j^o)$, y tomamos como Q^* aquél de estos Q_j^o que da el mínimo de $K_j(Q_j^o)$, si no prescindimos de Q_j^o

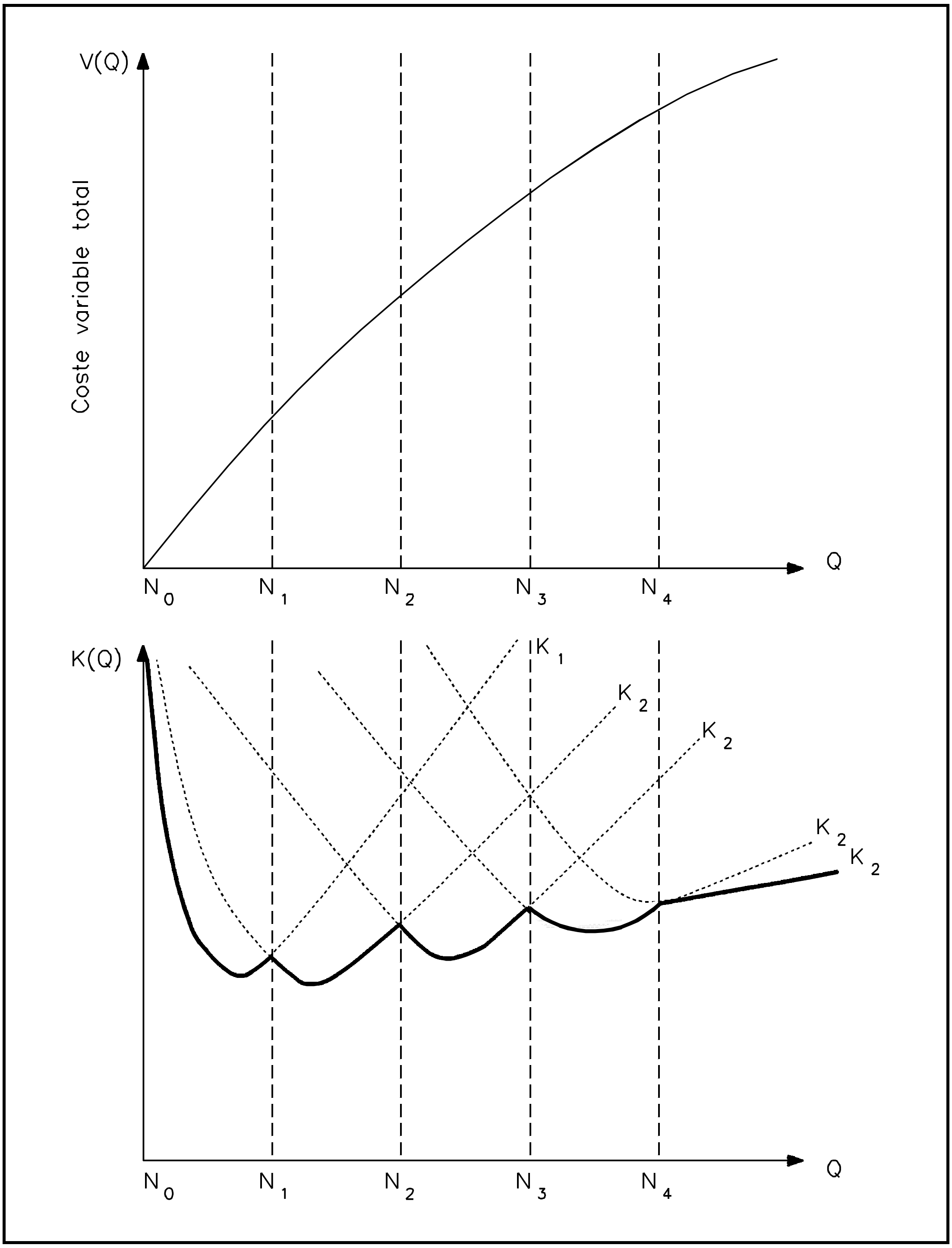


Fig. 5.1.2.5 Rebajas graduales. Descuentos incrementales

5.1.2.3.4 Ejemplo

Supongamos que los precios del ejemplo anterior actúan como descuentos incrementales:

j	CA_j	N_j	$V(N_j)$	$V(Q) = V(N_{j-1}) + CA_j \cdot (Q-N_{j-1})$
1	1,00	10.000	10.000	Q
2	0,98	30.000	29.600	200 + 0,98·Q
3	0,96	50.000	48.800	800 + 0,96·Q
4	0,94			1.800 + 0,94·Q

Fig. 5.1.2.6 Datos del ejemplo

con lo que:

$$K(Q) = K_1(Q) = \frac{30.000.000}{Q} + 300.000 + 0{,}700 \cdot Q \qquad 0 < Q < 10.000$$

$$K_2(Q) = \frac{90.000.000}{Q} + 294.020 + 0{,}698 \cdot Q \qquad 10.000 < Q < 30.000$$

$$K_3(Q) = \frac{270.000.000}{Q} + 288.080 + 0{,}696 \cdot Q \qquad 30.000 < Q < 50.000$$

$$K_4(Q) = \frac{570.000.000}{Q} + 288.180 + 0{,}694 \cdot Q \qquad 50.000 < Q$$

$Q_1^0 = 6550$ **(si);** $Q_2^0 = 11.360$ **(si);** $Q_3^0 = 19.660$ **(no);** $Q_4^0 = 28.700$ **(no)**

K(6.550) = 309.360 (mínimo)

K(11.360) = 309.860

Por tanto la pieza se aprovisionará, en este caso, en lotes de 6.550 unidades.

5.1.2.4 Múltiples artículos

Muchos sistemas de stock constan de varios, y a veces muchos, artículos, que pueden tratarse independientemente utilizando lo anterior si no existe interrelación entre ellos. Sin embargo, en algunos casos existirán estas relaciones; por ejemplo, la capacidad de almacén puede estar limitada lo que obligará a los artículos a competir por el espacio, el número de pedidos que pueden cursarse en un año puede estar limitado o puede existir un límite superior de la cantidad inmovilizada en stock, etc. En todos estos casos puede ser necesario tratar simultáneamente todos los artículos.

5.1.2.4.1 Limitaciones

Denominemos $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ a los artículos; el coste anual medio de gestión será:

$$K = \sum_{j=1}^{n} K_j = \sum_{j=1}^{n} \left[CL_j \cdot \frac{D_j}{Q_j} + CA_j \cdot D_j + CS_j \cdot \frac{Q_j}{2} \right]$$

donde K es función de las n variables Q_j.

Una limitación adoptará la forma $g(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \leq d$ y condicionará los valores de Q_j, si es activa.

Para comprobarlo, determinaremos los lotes ignorando la ligadura, de donde:

$$Q_j^{\circ} = \sqrt{2 \cdot CL_j \cdot \frac{D_j}{CS_j}}$$

si se satisface la limitación $g^o \leq d$, entonces $Q_j^* = Q_j^o$. En caso contrario $g^o > d$ y la limitación es activa; en el óptimo se cumplirá con el signo $=$, por lo que podemos utilizar los multiplicadores de Lagrange:

$$L = K(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) + \lambda \cdot \left[g(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) - d \right]$$

los valores óptimos de Q_j se obtienen resolviendo el sistema formado por las n derivadas parciales de L respecto a las Q_j igualadas a cero y la condición $g(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = d$.

Supongamos una limitación sobre la cantidad inmovilizada (media):

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} CA_j \cdot Q_j \leq I$$

en el caso de que:

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{n} CA_j\cdot\sqrt{\frac{2\cdot D_j\cdot CL_j}{CS_j}} > I$$

debemos tratar:

$$L = \sum_{j=1}^{n}\left[CL_j\cdot\frac{D_j}{Q_j} + CA_j\cdot D_j + CS_j\cdot\frac{Q_j}{2}\right] + \frac{\lambda}{2}\cdot\left[\sum_{j=1}^{n} CA_j\cdot Q_J - 2\cdot I\right]$$

de donde:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_j} = -CL_j\cdot\frac{D_j}{Q_j^2} + \frac{1}{2}\cdot CS_j + \frac{\lambda}{2}\cdot CA_j = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} CA_j\cdot Q_j = 2\cdot I$$

y por tanto Q **en función de** λ **se escribe:**

$$Q_j = \sqrt{\frac{2\cdot D_j\cdot CL_j}{CS_j + \lambda\cdot CA_j}}$$

Para determinar λ **debemos resolver la ecuación:**

$$\sum_{j=1}^{n} CA_j\cdot\sqrt{\frac{2\cdot D_j\cdot CL_j}{CS_j + \lambda\cdot CA_j}} = 2\cdot I$$

por un método numérico cualquiera (tanteo, interpolación, etc).

Si $CL_j = CL$ **y** $CS = i\cdot CA_j$ **tendremos:**

$$\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\frac{2\cdot D_j\cdot CA_j\cdot CL_j}{i + \lambda}} = 2\cdot I \Rightarrow \sqrt{i+\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sqrt{2\cdot D_j\cdot CA_j\cdot CL_j}}{2\cdot I}$$

de donde:

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{2\cdot CL}{i+\lambda}}\cdot\sqrt{\frac{D_j}{CA_j}}$$

por tanto λ **tiene la misma dimensión que** i**, tasa anual, resultado obvio puesto que el valor**

del multiplicador es el coste marginal de la restricción, en este caso del inmovilizado *I*.

5.1.2.4.2 Ejemplo

Una pequeña compañía electrónica compra tres tipos de subcomponentes. La dirección no desea superar un inmovilizado medio de 7.500 *um*, ni admite rupturas de stock. El coste de posesión lo contabiliza a la tasa del 20% anual sobre el inmovilizado. Los datos de los artículos son:

Artículo	D_j	CA_j	CL_j
1	1.000	50	50
2	1.000	20	50
3	2.000	80	50

Fig. 5.1.2.7 Datos del ejemplo

aplicando la fórmula de Wilson: $Q_1^o = 100$; $Q_2^o = 158$; $Q_3^o = 112$

$$\frac{1}{2}\cdot\left[100 \times 50 + 158 \times 20 + 112 \times 80\right] = 8560 > 7500$$

por tanto, debemos utilizar el multiplicador de Lagrange:

$$Q_j = \sqrt{\frac{2 \cdot D_j \cdot CL_j}{(1 + \lambda) \cdot CA_j}}$$

$$\sqrt{i + \lambda} = \frac{\sqrt{10000 \times 500} + \sqrt{10000 \times 200} + \sqrt{10000 \times 1600}}{2 \times 7500}$$

$$\lambda = 0'0601$$

y por tanto:

$$Q_1 = 87{,}69 \simeq 88$$

$$Q_2 = 138{,}64 \simeq 139$$

$$Q_3 = 98{,}04 \simeq 98$$

$$88 \times 50 + 139 \times 20 + 98 \times 80 = 7510 \sim 7500$$

la diferencia se debe a los redondeos.

5.1.2.4.3 Elaboración de varias piezas en la misma máquina

Otro tipo de ligadura la produce la utilización de la misma máquina (o en general el mismo sistema productivo) para fabricar un grupo de artículos. Sean:

$j = 1,2,\ldots,n$	los artículos.
D_j	la demanda o consumo anual del artículo j, homogénea en el tiempo.
P_j	la tasa anual (potencial) de producción de j de la máquina.
CL_j , CA_j , CS_j	los costes de lanzamiento, unitario de adquisición o fabricación y de posesión del artículo j.
TP_j	el tiempo de preparación de la máquina para producir un lote de j.

Si consideramos los artículos independientemente unos de otros:

$$Q_j^o = \sqrt{\frac{2 \cdot D_j \cdot CL_j}{CS_j \cdot \left(1 - \dfrac{D_j}{P_j}\right)}} \;;\quad T_j^o = \sqrt{\frac{2 \cdot CL_j}{D_j \cdot CS_j \cdot \left(1 - \dfrac{D_j}{P_j}\right)}} \;;\quad N_j^o = \sqrt{\frac{D_j \cdot CS_j}{2 \cdot CL_j} \cdot \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}$$

pero si las N_j^o son distintas será difícil (por no decir imposible) coordinar los lanzamientos, pues en un mismo instante correspondería elaborar dos o más piezas y se producirán rupturas o separación de los valores óptimos. Supongamos que todos los artículos adoptan el mismo valor de N y, consecuentemente, de T:

$$K(N) = \sum_{j=1}^{n} \left[N \cdot CL_j + CA_j \cdot D_j + \frac{1}{2} \cdot \frac{D_j}{N} \cdot \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right) \cdot CS_j \right]$$

derivando respecto a N e igualando a cero podremos obtener el valor que minimiza $K(N)$

$$N^o = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} D_j \cdot CS_j \cdot \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}{2 \cdot \sum_{j=1}^{n} CL_j}} \qquad T^o = \frac{1}{N^o}$$

Para comprobar que N^o o T^o es factible para la producción prevista deberá cumplirse:

$$\sum_{j=1}^{n} TP_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{P_j} \cdot T^o \leq T^o$$

es decir, existe un valor límite de N, N^l:

$$N^l = \frac{1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{P_j}}{\sum_{j=1}^{n} TP_j}$$

tal que:

si $N^o > N^l$ **entonces** $N^* = N^l$

si $N^o \leq N^l$ $N^* = N^o$

5.1.2.4.4 Ejemplo

Consideremos el caso dado por los datos siguientes:

j	D_j	CA_j	CS_j	CL_j	P_j	TP_j
1	**1.000**	**50**	**10**	**50**	**5.000**	**0,001**
2	**1.000**	**20**	**4**	**50**	**10.000**	**0,001**
3	**2.000**	**80**	**16**	**50**	**4.000**	**0,001**

Fig. 5.1.2.8 Datos del ejemplo

de donde:

$$N^o = \sqrt{\frac{1.000 \times 10 \times (1-0{,}2) + 1.000 \times 4 \times (1-0{,}1) + 2.000 \times 16 \times (1-0{,}5)}{2 \times (50+50+50)}} = 9{,}592 \sim 9{,}6$$

$$N^I = \frac{1-(0{,}2+0{,}1+0{,}5)}{0{,}001+0{,}001+0{,}001} = 66{,}\hat{6} > 9{,}6$$

luego:

$$N^* = 9{,}6;\ T^* = 0{,}1043;\ Q_1^* = 104;\ Q_2^* = 104;\ Q_3^* = 209$$

$$K^* = 1.440 + 230.000 + 1.437{,}5 = 232.877{,}5$$

5.1.2.4.5 Varios lotes dentro del ciclo

En el caso de que aisladamente les correspondiera a cada artículo una frecuencia óptima N_j^o muy diferente, la reducción a una frecuencia única puede producir un sobrecoste considerable. En dicho caso podría estudiarse la realización dentro de un ciclo de más de un lote de ciertos artículos.

Sea k_j el número de veces que se elabora el artículo j dentro del ciclo; las nuevas fórmulas a utilizar serán:

$$N^o = \sqrt{\frac{\sum_i D_j \cdot CS_j \cdot \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right) \cdot k_j}{2 \cdot \sum_j k_j \cdot CL_j}}$$

$$N^I = \frac{1 - \sum_j \frac{D_j}{P_j}}{\sum_j k_j \cdot TP_j}$$

De todas formas puede resultar imposible, salvo si la máquina posee mucho tiempo no utilizado, disponer las elaboraciones de j dentro de T en k lotes idénticos igualmente distribuidos, por lo que se deberá proceder a ciertos reajustes. Hemos vuelto a caer en la situación de la que habíamos intentado huir con la adopción de una frecuencia única.

5.1.2.4.6 Ejemplo

En el ejemplo anterior los valores de la fórmula de Wilson eran:

Q_1^o **= 111,80;** Q_2^o **= 166,66;** Q_3^o **= 158,11;**

N_1^o **= 8,94;** N_2^o **= 6,00;** N_3^o **= 12,65;**

muy diferentes entre sí. Adoptemos $k_1 = 3$; $k_2 = 2$; $k_3 = 4$:

$$N^o = \sqrt{\frac{\frac{8.000}{3} + \frac{3.600}{2} + \frac{16.000}{4}}{9 \times 100}} = 3{,}0671 \sim 3{,}1$$

$$N^I = \frac{0{,}2}{9 \times 0{,}001} = 22{,}22 > 3{,}1$$

Por tanto:

$N^* = 3{,}1$; $T^* = 0{,}3226$; $Q_1^* = 108$; $Q_2^* = 161$; $Q_3^* = 161$;

$K^* = 1.395 + 230.000 + 1.365'8 = 232.760'8$

Ahora deberíamos intentar la distribución de la elaboración de los 9 lotes dentro del ciclo.

5.1.2.4.7 Pedidos agrupados

Este apartado tiene muchas similitudes con el *5.1.2.4.3*, **aunque la motivación es distinta. Supongamos que, si se agrupan pedidos,** *CL* **es el mismo, independientemente del número de artículos diferentes que se pidan. En este caso los pedidos se agruparán; en efecto, sean** $T_1, T_2, \ldots, T_3$ **los períodos entre pedidos de los artículos 1,2,...,*n* y no todos iguales, entonces habrá un período mínimo:**

$$T^m = \min\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$$

si $T_j > T^m$ **convendría reducirlo a** T^m **; en efecto:**

- **el coste de posesión disminuye, ya que** Q_j **disminuye.**
- **el coste de lanzamiento no aumenta, ya que se pueden agrupar pedidos con los que corresponden al (o a los) artículo de período** T^m.

Por tanto en el óptimo $T_1 = T_2 = T_3 = ... = T_n$. Calculemos T:

$$K(T) = \frac{CL}{T} + \sum_{j=1}^{n} i \cdot CA_j \cdot T \cdot \frac{D_j}{2}$$

de donde:

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot CL}{\sum_j i \cdot CA_j \cdot D_j}} \; ; \; Q_j^* = D_j \cdot T^* \; ; \; K^* = \sqrt{2 \cdot CL \cdot \sum_j i \cdot CA_j \cdot D_j}$$

5.1.2.4.8 Coste de lanzamiento función lineal

Consideremos un caso ligeramente distinto en el que CL sea función lineal del número de artículos distintos pedidos:

$$CL = CL^{(1)} + CL^{(2)} \cdot \text{número de artículos distintos}$$

En este caso los pedidos tenderán a agruparse, pero necesariamente no se solicitarán todos los artículos cada vez. Sea T el período y consideremos que pedimos el artículo j cada k_j períodos (k_j es un entero > 0). El período para el artículo j será $T_j = k_j \cdot T$. Por consiguiente, como se ha dicho, pedimos j el $\frac{1}{k_j}$ de las veces y en promedio cada vez pedimos $\left(\sum_j \frac{1}{k_j}\right)$ artículos diferentes. Por tanto, el coste anual medio es:

$$K = \frac{1}{T} \cdot \left[CL^{(1)} + CL^{(2)} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j} \right] + \sum_j \frac{1}{2} \cdot k_j \cdot D_j \cdot T \cdot CS_j$$

el problema es minimizar K suponiendo T y los k_j variables.

a) *T es un dato:*

El problema estriba en que k_j son enteros. Como primera aproximación puede derivarse K respecto a k_j igualar a cero y redondear el resultado:

$$k_j^* \simeq \frac{1}{T_o} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot CL^{(2)}}{D_j \cdot CS_j}} \qquad k_j \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

o bien emplear:

$$k_j \cdot (k_j - 1) < \frac{1}{T_o^2} \cdot \frac{2 \cdot CL^{(2)}}{D_j \cdot CS_j} \leq (k_j + 1) \cdot k_j \qquad k_j = 1,2,\ldots$$

con el coste aproximado (inalcanzable a causa de la integridad de k_j):

$$K_o^* \simeq \frac{CL^{(1)}}{T_o} + \sqrt{2 \cdot CL^{(2)}} \cdot \sum_{j=1}^{n} \sqrt{D_j \cdot CS_j}$$

b) *T es incógnita, pero los k_j son datos:*

La determinación del valor óptimo de T es simple:

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(CL^{(1)} + CL^{(2)} \cdot \sum_j \frac{1}{k_j} \right)}{\sum_j k_j \cdot D_j \cdot CS_j}}$$

que conduce a:

$$K^* = \sqrt{2 \cdot \left(CL^{(1)} + CL^{(2)} \cdot \sum_j \frac{1}{k_j} \right) \cdot \sum_j k_j \cdot D_j \cdot CS_j}$$

c) *Tanto T como k_j son incógnitas:*

El problema es más difícil, pero podemos hallar la derivada de $K(T, k_1, k_2, \ldots, k_n)$ respecto a k_j en la ecuación dada en (b) que conduce a:

$$k_j \simeq \frac{\sqrt{\dfrac{CL^{(2)} \cdot \sum_j k_j \cdot D_j \cdot CS_j}{CL^{(1)} + CL^{(2)} \cdot \sum_j \frac{1}{k_j}}}}{\sqrt{D_j \cdot CS_j}}$$

ecuación que permite hallar k_j mediante un proceso iterativo, utilizando las estimaciones en curso de k_j en el segundo miembro para hallar unas estimaciones nuevas. Como valores iniciales puede utilizarse:

$$k_j^{(o)} \simeq \frac{\sqrt{\dfrac{CL^{(2)} \cdot \sum_j D_j \cdot CS_j}{\left(CL^{(1)} + n \cdot CL^{(2)}\right)}}}{\sqrt{D_j \cdot CS_j}}$$

5.1.2.4.9 Ejemplo

Sean los siguientes datos:

$CL^{(1)} = 1.000$; $CL^{(2)} = 200$; $T = 0{,}02$ **años (≃1 semana)**

j	1	2	3	4	5
D	5.000	4.000	2.000	2.000	500
CA	100	250	200	50	400
CS	20	50	40	10	80

Fig. 5.1.2.9 Datos del ejemplo

a) Determinar los valores de k_j óptimos:

$$\frac{1}{0{,}02} \cdot \sqrt{\frac{2 \times 200}{5.000 \times 20}} = 3{,}15 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 3$$

$$k_2 = 2$$

$$k_3 = 4$$

$$k_4 = 7$$

$$k_5 = 5$$

de donde:

$$\sum_{j=1}^{5} \frac{1}{k_j} = \frac{599}{420} = 1{,}4$$

y:

$$K^* = 50 \times \left[1000 + 200 \times \frac{599}{420}\right] + 0{,}01 \times [3 \times 100.000 + 2 \times 200.000 +$$

$$+ 4 \times 80.000 + 7 \times 20.000 + 5 \times 40.000] = 77.862$$

(Al no haber encontrado ninguna k_j = 1 no podemos garantizar que todas las semanas haya algún pedido, por lo que los valores de $CL^{(1)}$ contabilizados pueden ser excesivos. De hecho, analizando los múltiplos de 2, 3, 4, 5 y 7 en los números comprendidos entre 0 y 419 deducimos que 96 veces de cada 420 no habrá ningún pedido, un 23%, por lo que un valor más adecuado del coste K^* sería 66.433,43)

b) Para los valores anteriores de k_j determinar el período óptimo:

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \times 1.285{,}24}{136.000}} = 0{,}0434 \simeq 0{,}04$$

para el que:

$$K^* = \sqrt{2 \times 1.285{,}24 \times 1.360.000} = 59.120$$

(obsérvese que para dicho período los valores óptimos de k_j serían 2, 1, 2, 4, 3 respectivamente, a los que correspondería un período óptimo de 0,0656, al que corresponderían otros valores óptimos de k_j, y así sucesivamente. Este procedimiento iterativo podría substituir lo que haremos en (c)).

c) Determinar simultáneamente el valor de T y los de k_j óptimos:

Determinaremos los valores iniciales de $k_j^{(o)}$:

$$\frac{\sqrt{\dfrac{200 \times 440.000}{1.000 + 5 \times 200}}}{\sqrt{5.000 \times 20}} = 0{,}68 \Rightarrow k_1^{(o)} = 1$$

$$k_2^{(o)} = 1$$

$$k_3^{(o)} = 1$$

$$k_4^{(o)} = 2$$

$$k_5^{(o)} = 1 \qquad \sum_{j=1}^{5} \frac{1}{k_j^{(o)}} = 4{,}5$$

y ahora aplicaremos el método iterativo:

$$\frac{\sqrt{\dfrac{200 \times 460.000}{1.000 + 4,5 \times 200}}}{\sqrt{5.000 \times 20}} = 0,70 \Rightarrow k_1^{(1)} = 1 \quad k_2^{(1)} = 1$$

$$k_3^{(1)} = 1$$

$$k_4^{(1)} = 2$$

$$k_5^{(1)} = 1$$

Puesto que se han repetido los valores, los consideramos definitivos y pasaremos al cálculo de T**:**

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \times 1.900}{460.000}} \simeq 0,09$$

a lo que corresponde:

$$K^* = \sqrt{2 \times 1.900 \times 460.000} = 41.800$$

5.1.2.5 Oportunidad especial para adquirir

Consideremos ahora la situación en la que se ofrece una oportunidad única de adquirir un artículo a un precio unitario reducido (este es el caso cuando hay un aumento de precio y se da la última oportunidad para comprar al precio antiguo). Debido al cambio de uno de los parámetros, Q **varía, y el método general basado en analizar lo que ocurre en horizonte ilimitado a través del promedio anual no sirve. Las alternativas deben compararse dentro de un horizonte finito en el que alcancen un estado idéntico.**

La comparación es compleja matemáticamente, como puede verse en R.G. Brown: *Decision Rules for Inventory Management*, **Holt, Rinehart & Winston, 1967 pp. 201-3. Aquí utilizaremos una aproximación sugerida por E. Naddor.**

Sea Q, **el tamaño del lote, la variable de acción, el coste variable unitario de adquisición (precio) actual** CA_1 **y el futuro** CA_2 **(**$CA_1 < CA_2$**). Después del aumento de precio el lote será:**

$$Q_2^o = \sqrt{\frac{2 \cdot CL \cdot D}{i \cdot CA_2}}$$

y el coste anual:

$$K(Q_2^o) = \sqrt{2 \cdot CL \cdot D \cdot i \cdot CA_2} + D \cdot CA_2$$

Si aprovechando la oportunidad se pide un lote de tamaño *Q*, durará un tiempo *Q/D* y el coste total será:

$$KT(Q) = CL + Q \cdot CA_1 + \frac{Q}{2} \cdot i \cdot CA_1 \cdot \frac{Q}{D} = CL + Q \cdot CA_1 + \frac{i \cdot CA_1 \cdot Q^2}{2 \cdot D}$$

Si *Q* fuese cero y debiéramos pagar ya CA_2 el coste correspondiente a un período de tiempo *T* sería $T \cdot K(Q_2^o)$.

Es razonable seleccionar *Q*, que maximiza:

$$F(Q) = \frac{Q}{D} \cdot K(Q_2^o) - KT(Q) = \frac{Q}{D} \cdot \sqrt{2 \cdot CL \cdot D \cdot i \cdot CA_2} + Q \cdot CA_2 - CL - Q \cdot CA_1 - \frac{i \cdot CA_1 \cdot Q^2}{2 \cdot D}$$

y derivando e igualando a cero:

$$\frac{dF(Q)}{dQ} = \frac{1}{D} \cdot \sqrt{2 \cdot CL \cdot D \cdot i \cdot CA_2} + CA_2 - CA_1 - \frac{i \cdot CA_1 \cdot Q}{D} = 0$$

obtendremos:

$$Q_{OPT} = \frac{\sqrt{2 \cdot CL \cdot D \cdot i \cdot CA_2}}{i \cdot CA_1} + \frac{CA_2 - CA_1}{CA_1} \cdot \frac{D}{i} = \frac{CA_2}{CA_1} \cdot Q_2^o + \left(\frac{CA_2}{CA_1} - 1 \right) \cdot \frac{D}{i}$$

5.1.2.5.1 Ejemplo

En un artículo el consumo anual es aproximadamente 80 cajas. Se anuncia un aumento de precio de 28,00 *um* por caja a 30,00 *um* por caja. El coste fijo de pasar un pedido es 1,50 *um* y el de posesión se contabiliza a la tasa 20% anual. Se nos ofrece una última oportunidad de adquirir un lote al precio antiguo. ¿Cuál debería ser el tamaño del lote?

Utilizando la formulación anterior:

$$Q_2^o = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}50 \times 80}{0{,}2 \times 30}} \simeq 6 \ \textit{cajas}$$

$$Q_{OPT} = \frac{30}{28} \times 6 + \left(\frac{30}{28} - 1 \right) \cdot \frac{80}{0{,}2} = 35{,}3 \sim 35 \ \text{cajas}$$

Un aumento de precio del 7% produce un incremento de casi 500% en el último lote a precio antiguo, y aunque esta comparación no es totalmente ortodoxa muestra qué aspectos financieros (limitación del inmovilizado) o de obsolescencia pueden influir en la fijación del último lote a niveles más moderados. Si tabulamos *F* para diversos valores de *Q*:

Q	*F(Q)*
5	**10,00**
6	**12,09**
10	**19,70**
15	**27,70**
20	**34,00**
25	**38,50**
30	**41,20**
35	**42,23**

Fig. 5.1.2.10 Ahorro obtenido en función de Q

podemos observar la progresión de los ahorros que van creciendo hasta Q = 35 (para valores mayores decrecerían). Inicialmente el ahorro está constituido por la diferencia de precio, pero a medida que el lote aumenta, el coste de posesión va reduciendo dicho efecto.

5.1.2.6 Demanda no homogénea en el tiempo

Cuando la demanda no es homogénea en el tiempo no siempre será adecuado utilizar un lote calculado a partir del valor medio de la demanda anual, *D*. Un procedimiento que permite encontrar una solución óptima a este caso es, en el caso de tiempo discreto, el algoritmo de Wagner-Whitin basado en la programación dinámica y de utilización numéricamente compleja. Vamos a describir aquí unos métodos heurísticos que en la mayoría de los casos serán suficientes.

5.1.2.6.1 Heurística de Silver-Meal

Selecciona la cantidad a reaprovisionar (lote) reproduciendo una de las propiedades que posee la fórmula EOQ cuando la demanda es homogénea en el tiempo: los costes relevantes totales por unidad de tiempo correspondientes a un lote son mínimos. Consideremos un lote que llega a principio del primer período (en el instante inicial del

horizonte considerado) y cubre las necesidades hasta el final del período T (de los N de que consta el horizonte); la T que buscamos es la que minimiza:

$$\frac{\text{(coste de lanzamiento)} + \text{(coste total de posesión hasta el final del período } T\text{)}}{T}$$

Fig. 5.1.2.11 Expresión básica de la heurística de Silver_Meal

Es fácil fabricar ejemplos en los que la heurística no da la solución óptima, sobre todo cuando la demanda tiene un punto final definido, pero en general éste no es nuestro caso y si adoptamos un horizonte finito es con fines de simplificar el problema y no porque más allá "no exista nada". Puesto que estamos limitados a reaprovisionar a principio de período, la mejor estrategia conlleva aprovisionar cantidades que correspondan a un número entero de períodos. En consecuencia, la variable de acción es el número de períodos T que cubre el aprovisionamiento, siendo T un número entero, y:

$$Q = \sum_{j=1}^{T} D_j$$

donde D_j es la demanda del período j, habiendo numerado los períodos 1, 2, 3, ..., T y suponiendo el stock inicial del primer período nulo. Sea $KT(T)$ el total de los costes relevantes correspondiente a un reaprovisionamiento que cubre T períodos:

$$KT(T) = CL + \text{(costes de posesión)}$$

y el coste unitario:

$$K(T) = \frac{KT(T)}{T} = \frac{CL + \text{(costes de posesión)}}{T}$$

Contabilizando el coste de posesión sobre las unidades a final de cada período (como si la demanda tuviese lugar exclusivamente a principio de período) tendremos:

$$K(1) = CL$$

$$K(2) = \frac{\left[CL + i \cdot CA \cdot D_2\right]}{2}$$

$$K(3) = \frac{\left[CL + i \cdot CA \cdot D_2 + 2 \cdot i \cdot CA \cdot D_3\right]}{3}$$

La idea consiste en evaluar *K(T)* para valores de *T* crecientes hasta que por primera vez *K(T+1)* > *K(T)*, se selecciona dicha *T* y se evalúa *Q*. El método sólo garantiza un mínimo local (podría continuarse para ver si *K(T)* vuelve a decrecer, pero es poco probable). Si *K(T)* decrece siempre se toma *T* = *N* y el aprovisionamiento cubre todo el horizonte (si no es posible proceder a una ampliación del mismo).

Aunque hemos partido de *CL*, *i* y *CA* de hecho sólo es necesario para determinar el valor buscado la razón *CL/(i·CA)*.

5.1.2.6.2 Ejemplo

La demanda de un producto que se vende en cajas no es homogénea en el tiempo.

Sean *CL* = 54 *um*; *CA* = 20 *um*/caja ; *i* = 2% mensual, y la demanda (en nº de cajas):

Mes *j*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**.....**
Demanda D_j	**10**	**62**	**12**	**130**	**154**	**129**	**.....**

Fig. 5.1.2.12 Datos del ejemplo

El stock inicial es nulo:

T	$(j-1) \cdot D_j$	$\Sigma(j-1) \cdot D_j$	*KT(T)*	*K(T)*
1	))	))	**54,00**	**54,00**
2	**62**	**62**	**78,80**	**39,40**
3	**24**	**86**	**88,40**	**29,47**
4	**390**	**476**	**244,40**	**61,10**

Fig. 5.1.2.13 Desarrollo de los cálculos de la heurística de Silver-Meal

Por consiguiente, el lote inicial será de:

$$Q = D_1 + D_2 + D_3 = 10 + 62 + 12 = 84 \text{ cajas}$$

Trasladando el origen a inicio del período 4 podríamos proceder a calcular el tamaño del segundo lote, si fuese necesario.

5.1.2.6.3 Resolución en forma compacta

Puede ser conveniente utilizar el algoritmo más compacto, pero equivalente, siguiente.

Definimos *G(T)* **de la forma siguiente:**

$$G(1) = \frac{CL}{i \cdot CA}$$

$$G(T) = G(T-1) + (T-1) \cdot D_T \qquad \textbf{Para } T = 2, 3, \ldots$$

El valor de *T* **buscado es el primero que cumple:**

$$T^2 \cdot D_{T+1} \geq G(T)$$

(y por tanto es el último que cumple : $T \cdot (T-1) \cdot D_T < G(T)$**).**

5.1.2.6.4 Versión continua

Si consideramos el tiempo continuo, la demanda vendrá definida por una tasa *D(t)***, variable con** *t* **y el aprovisionamiento podrá obtenerse en cualquier instante que se desee. En estas circunstancias:**

$$KT(T) = CL + \int_0^T i \cdot CA \cdot I(t) \cdot dt = CL + i \cdot CA \cdot \int_0^T t \cdot D(t) \cdot dt$$

haciendo $K(T) = \frac{KT(T)}{T}$**, como antes, y buscando el mínimo derivando e igualando a cero obtendremos:**

$$T^2 \cdot D(T) - \int_0^T t \cdot D(t) \cdot dt = \frac{CL}{i \cdot CA}$$

5.1.2.6.5 Variabilidad de la demanda

Definamos el coeficiente de variabilidad, *VC***, igual al cociente entre la variancia de la demanda por período y el cuadrado de la demanda media por período:**

$$VC = \frac{N \cdot \sum_{j=1}^{N} \left[D_j\right]^2}{\left[\sum_{j=1}^{N} D_j\right]^2} - 1$$

Si $VC < 0{,}25$ **se recomienda utilizar la fórmula EOQ con la demanda media.**

Si $VC > 0{,}25$ **se recomienda utilizar una heurística, por ejemplo la descrita.**

Si el coeficiente de variabilidad es muy alto y a la vez la expresión EOQ en tiempo de aprovisionamiento conduce a un valor muy elevado en número de períodos (del orden de 20 o más), es posible que el primer óptimo local de la función antes indicada no sea el mínimo global (entonces habrá que seguir en los cálculos de *K(T)* **hasta cubrir, tal vez, el horizonte).**

5.1.2.6.6 Heurística de EOQ expresado en tiempo

Otras heurísticas que se han propuesto para este problema habituales en la bibliografía especializada son las de este apartado y el siguiente. Si expresamos la fórmula EOQ en tiempo:

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot CL}{i \cdot CA \cdot D}}$$

y redondeamos al entero más próximo (o empleamos la expresión hallada para el caso discreto en lugar de la anterior) podemos establecer los aprovisionamientos que cubren exactamente las necesidades de este número de períodos.

5.1.2.6.7 Heurística de equilibrado parcial

Utiliza otra propiedad de la fórmula EOQ en el caso de demanda homogénea en el tiempo al seleccionar un número de períodos tal que la contribución del coste de posesión sea tan próximo como sea posible al coste de lanzamiento, CL (la igualdad exacta raramente es posible en el caso discreto).

Aplicado al ejemplo anterior, tendremos:

T	coste de posesión		coste de lanzamiento
1	0	<	54
2	$i \cdot CA \cdot D_2$ = 24,80	<	54
3	24,80 + $2 \cdot i \cdot CA \cdot D_3$ = 24,80	<	54
4	34,40 + $3 \cdot i \cdot CA \cdot D_4$ = 190,40	>	54

Fig. 5.1.2.14 Desarrolo de los cálculos de la heurística de equilibrado parcial

Como 34,40 está más cerca de 54 que 190,40 elegimos $T = 3$**.**

5.1.3 Modelos aleatorios 1-período

Iniciamos el tratamiento de los modelos aleatorios, es decir, los que representan sistemas de stock en los que la demanda y/o el plazo de entrega son aleatorios. En este punto sólo consideraremos modelos 1-período.

5.1.3.1 Modelo 1-período sin coste de lanzamiento

La situación que consideramos es la siguiente: los artículos se producen (o compran) para un solo período de demanda al coste variable *CA* PTA/unidad; inicialmente supondremos que no hay coste fijo de adquisición. Cada unidad se vende a *V* PTA/unidad. Las unidades que quedan invendidas al final del período se cargan a un coste de posesión de *CS* PTA/unidad (puede ser el coste de posesión y almacenaje, más el coste de eliminar el artículo del stock al final del período, menos el ingreso proporcionado si el artículo se vende o salda; por tanto, *CS* puede ser negativo).

Sea I el número de unidades en mano antes de la decisión de aprovisionamiento al principio del período (normalmente $I = 0$, pero la consideración de la posibilidad de $I > 0$ permite generalizar el modelo a n-períodos) y sea D la variable aleatoria que representa la demanda durante el período. Supondremos que D es continua con densidad de probabilidad $h(x)$. No tomaremos en consideración ningún plazo de entrega; supondremos que es nulo o despreciable frente a la duración del período.

El problema es determinar el nivel óptimo de stock S^* que debemos tener en mano al inicio del período (después del reaprovisionamiento) de forma que el beneficio esperado sea máximo, o bien que el coste esperado sea mínimo. Una vez conocido S^*:

$$Q = S^* - I \qquad S^* > I$$

$$Q = 0 \qquad \text{en los otros casos}$$

o bien:

$$Q = MAX\{0, S^* - I\}$$

Este modelo describe el proceso de un artículo cuya demanda se produce en un espacio de tiempo relativamente corto, después del cual es obsoleto (p.ej. periódicos, moda), se estropea (árboles de Navidad, flores, ciertos alimentos) o ya no está en demanda durante un largo período, hasta la próxima temporada (felicitaciones navideñas, anticongelante). También se aplica a artículos que sólo pueden obtenerse una vez, tales como la dotación de piezas de recambio que debe comprarse con la máquina. Hay sólo una oportunidad de obtener el artículo y es a principio del período.

cantidad vendida:	D	**si**	$D < S$
min $\{ D \, , S \}$	S	**si**	$D \geq S$
exceso de stock al final:	$S - D$	**si**	$D < S$
$S -$ **min** $\{ D \, , S \}$	**0**	**si**	$D \geq S$

beneficio a obtener:

$V \cdot D - CA \cdot Q - CS \cdot (S - D)$	**si**	$D < S$
$V \cdot S - CA \cdot Q$	**si**	$D \geq S$

con $Q = S - I$

por tanto la esperanza matemática del beneficio:

$$B(S) = \int_0^S [V \cdot x - CA \cdot (S - I) - CS \cdot (S - x)] \cdot h(x) \cdot dx + \int_S^\infty [V \cdot S - CA \cdot (S - I)] \cdot h(x) \cdot dx$$

$$= V \cdot \int_0^\infty x \cdot h(x) \cdot dx - CS \cdot \int_0^S (S - x) \cdot h(x) \cdot dx - V \cdot \int_S^\infty (x - S) \cdot h(x) \cdot dx - CA \cdot S + C$$

$V \cdot \int_0^\infty x \cdot h(x) \cdot dx = V \cdot \overline{x}$ **es el ingreso esperado si no hubiese limitación de stock y es independiente de S.**

- análogamente $CA \cdot I$ **es independiente de** S**.**

Por tanto buscar el máximo de *B(S)* **es equivalente a buscar el mínimo de** *K(S)*, **que tiene un significado, por tanto, de coste:**

$$K(S) = CA \cdot S + CS \cdot \int_0^S (S - x) \cdot h(x) \cdot dx + V \cdot \int_S^\infty (x - S) \cdot h(x) \cdot dx$$

cuya interpretación es sencilla; cada término corresponde a un tipo de coste: coste de adquisición, coste de posesión y coste de ruptura. Es conveniente darse cuenta de que, dada la estructura de este modelo, el coste de ruptura, que corresponde al margen no obtenido por ventas perdidas, está representado por V**, precio de venta (y no por** $V - CA$ **como parece más adecuado). Ello se debe a que en definitiva** K **no es más que una**

simplificación deducida de *B*, **y que el minuendo en éste era** $V \cdot \bar{x}$, **que corresponde a unos ingresos teóricos, los cuales constituyen el punto de referencia de** *K*; **si el punto de referencia fuese distinto, también sería distinta la forma de** *K*. **En el caso de que, además de la pérdida de margen, la pérdida de ventas representara otro perjuicio, debería incrementarse** *V* **con el valor del coste unitario del mismo, y substituiríamos el resultado,** *CR*, **en la expresión.**

Llamemos:

$$G(S) = CS \cdot \int_0^S (S - x) \cdot h(x) \cdot dx + V \cdot \int_S^\infty (x - S) \cdot h(x) \cdot dx$$

tenemos que minimizar:

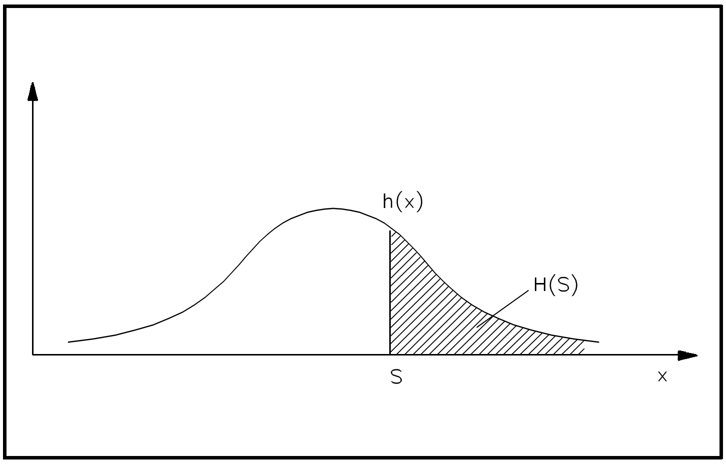
$$CA \cdot (S - I) + G(S) \qquad \textbf{para } S > I$$

por lo que derivaremos (bajo el signo integral):

$$\frac{dK}{dS} = CA + CS \cdot [1 - H(S)] - V \cdot H(S) = 0$$

$$\frac{d^2K}{dS^2} = CS \cdot h(s) + V \cdot h(S) = (CS + V) \cdot h(S) > 0$$

donde hemos llamado *H(S)* **a:**



$$H(S) = \int_S^\infty h(x) \cdot d(x)$$

(contrariamente a lo habitual, que es definir como probabilidad acumulada 1-H(S))

Fig. 5.1.3.1 Definición de H(S)

por consiguiente:

$$H(S^*) = \frac{CA + CS}{V + CS}$$

sólo existe solución si $CA < V$ **(si** $CA > V$ **no hay que tener stock, pero, ¿qué otra cosa convendrá hacer si vendemos por debajo de precio de compra?). En el caso de que** CS **sea negativo también se producirán problemas si** $CA + CS < 0$**, pero si estamos seguros de saldar todo lo que quede a un precio superior al de compra, ¿no debemos constituir un stock infinito? Naturalmente en este caso el modelo no es adecuado.**

La solución es pues:

pedir	$Q = S^* - I$	**Si** $S^* > I$
no pedir	$Q = 0$	**Si** $S^* \leq I$

5.1.3.1.1 Ejemplo

Supongamos que la demanda semanal en hectolitros de un jarabe dulce sigue una ley exponencial de media 100:

$$h(x) = 0{,}01 \cdot e^{0{,}01 \cdot x} \qquad x \geq 0$$

El jarabe se produce en lotes, uno cada semana. Si no se consume durante la semana que sigue a la fabricación se estropea. El coste de fabricación es 1 *um/hl***; el coste de eliminar el jarabe no utilizado al final de la semana es 0,10** *um/hl***. Se obtiene el ingreso de 2** *um* **por** *hl* **vendido. ¿Cuál debe ser el tamaño del lote?**

$$H(S^*) = e^{-0{,}01 \cdot S^*} = \frac{1 + 0{,}1}{2 + 0{,}1} = 0{,}524$$

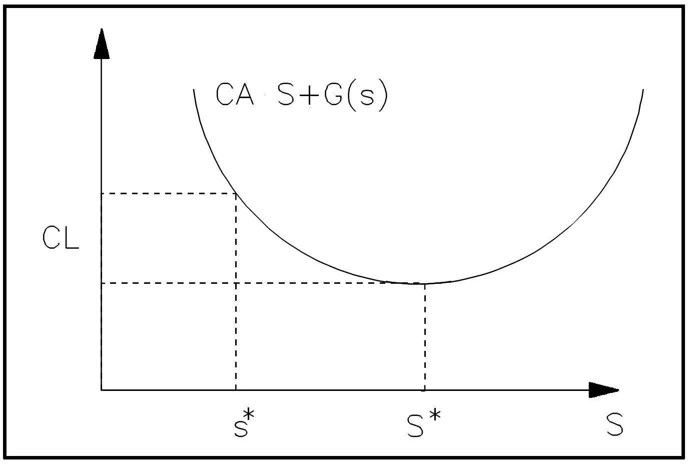
de donde:

$$S^* = -100 \times \ln(0{,}524) = 64{,}6\ hl$$

5.1.3.2 Modelo con coste de lanzamiento

Si existe un coste fijo de adquisición $CL > 0$**, el coste esperado tendrá una discontinuidad:**

$$K(S) = CL + CA\cdot(S - I) + G(S) \qquad \textbf{si } S > I$$
$$K(S) = G(I) \qquad \textbf{si } S = I$$



sea S^* el valor que minimiza:

$$CA\cdot S + G(S)$$

y s^* el menor valor que cumple:

$$CA\cdot s^* + G(s^*) = CL + CA\cdot S^* + G(S^*)$$

Fig. 5.1.3.2 Variación del coste con S

si $s^* < I < S^*$ entonces:

$$CL + CA\cdot S + G(S) > CA\cdot I + G(I) \textbf{ para todo } S > I$$

en cambio si $I < s^*$ entonces:

$$CL + CA\cdot S^* + G(S^*) < CA\cdot I + G(I)$$

por tanto, la política óptima es:

pedir	$Q = S^* - I$	**Si** $I \le s^*$
no pedir	$Q = 0$	**Si** $I > s^*$

donde S^* satisface:

$$H(S^*) = \frac{CA + CS}{V + CS}$$

y s^* es el menor valor que satisface:

$$CA \cdot s^* + G(s^*) = CL + CA \cdot S^* + G(S^*)$$

Esta regla es análoga a una política (S,s).

5.1.3.2.1. Aplicación a demanda exponencial

Sea la ley de densidad de la demanda exponencial:

$$h(x) = a \cdot e^{-a \cdot x} \qquad \textbf{para} \quad x \geq \mathbf{0}$$

entonces:

$$H(S^*) = e^{-S^*} = \frac{CA + CS}{V + CS}$$

o sea:

$$S^* = \frac{\mathbf{1}}{a} \cdot \ln\left(\frac{V + CS}{CA + CS}\right)$$

Por otra parte:

$$G(S) = CD \cdot \int_{\mathbf{0}}^{S} (S - x) \cdot a \cdot e^{-ax} \cdot dx + V \cdot \int_{S}^{\infty} (x - S) \cdot a \cdot e^{-ax} \cdot dx = CS \cdot S + \frac{V + CS}{a} \cdot e^{aS} - \frac{CS}{a}$$

de donde:

$$G(S^*) = CS \cdot S^* + \frac{V + CS}{a} \cdot \frac{CA + CS}{V + CS} - \frac{CS}{a} = CS \cdot S^* + \frac{CA}{a}$$

$$CA \cdot s^* + G(s^*) = CL + CA \cdot S^* + G(S^*)$$

$$(CA + CS) \cdot s^* + \frac{V + CS}{a} \cdot e^{-as^*} - \frac{CS}{a} = CL + (CA + CS) \cdot S^* + \frac{CA}{a}$$

Sea y = S* - s*:

$$(CA + CS) \cdot y + \frac{CA + CS}{a} + CL = \frac{V + CS}{a} \cdot e^{-as^*} = \frac{CA + CS}{a} \cdot e^{ay}$$

de donde:

$$e^{ay} = 1 + a \cdot y + \frac{a \cdot CL}{CA + CS}$$

ecuación trascendente que permite hallar y, y por tanto s^***:**

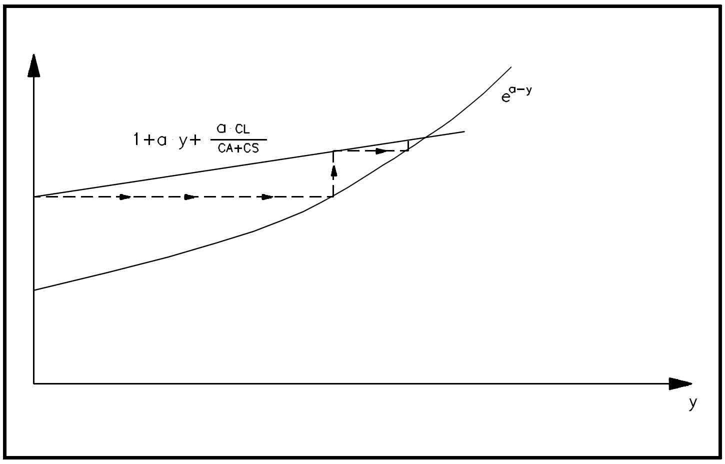


Fig. 5.1.3.3 Aproximación iterativa a la solución

$$(a \cdot y)^{(n+1)} = \ln\left[1 + (a \cdot y)^{(n)} + \frac{a \cdot CL}{CA + CS}\right]$$

$$\text{con} \quad (a \cdot y)^{(0)} = 0$$

Si ($a \cdot y$**) es pequeño hay una forma de obtener un valor aproximado, que es desarrollando en serie el exponencial hasta el término de segundo grado:**

$$e^{ay} = 1 + a \cdot y + \frac{(a \cdot y)^2}{2!} = 1 + a \cdot y + \frac{a \cdot CL}{CA + CS}$$

de donde:

$$a \cdot y = \sqrt{\frac{2 \cdot a \cdot CL}{CA + CS}}$$

muy parecida a la del lote económico.

5.1.3.2.2 Ejemplo

Utilicemos los datos del problema anterior con $CL = 5$ *um* y calculemos s^*:

$$(a\cdot y)^{(1)} = \ln(1 + 0{,}04545 + 0{,}3015) = 0{,}2979$$
$$(a\cdot y)^{(2)} = \ln(1 + 0{,}04545 + 0{,}2979) = 0{,}2951$$
$$(a\cdot y)^{(3)} = \ln(1 + 0{,}04545 + 0{,}2951) = 0{,}2931$$

y así sucesivamente. A la décimotercera iteración hemos obtenido el valor 0,2871; por tanto, tomamos $y = 28{,}7$ y $s^* = 35{,}9$ *hl*.

5.1.4 Modelos aleatorios n-períodos: introducción

Si el funcionamiento del sistema de stock se extiende sobre un período indefinido en el tiempo, el enfoque debe ser distinto del adoptado en el capítulo anterior. Las reglas que deseamos determinar y que fijan los valores de las variables de acción deben permitir contestar a tres preguntas:

- ¿Con qué frecuencia se revisará el stock?

- ¿Cuándo pedir?

- ¿Cuánto pedir?

La respuesta a la primera pregunta define dos cosas: la frecuencia de disponibilidad de información actualizada sobre la situación y la frecuencia con que nos propondremos la segunda pregunta (¿hay que pedir o no?).

Las respuestas dadas a estas preguntas siguen habitualmente ciertas normas.

¿CON QUÉ FRECUENCIA?
1 - Continuamente.
2 - En instantes predeterminados equidistantes el período w.
3 - En instantes programados.

¿CUÁNDO?
A - En instantes predeterminados equidistantes el período T.
B - Cuando el nivel del stock sea inferior a un valor fijo, punto de pedido s.
C - En instantes programados.

¿CUÁNTO?

a - Una cantidad predeterminada fija o lote de pedido *Q***.**
b - La diferencia entre el nivel de stock existente y un valor fijo o cobertura *S***.**
c - Cantidades programadas.

No todas las combinaciones son posibles o coherentes, y evidentemente en muchos casos consideraremos que utilizamos el procedimiento 1, cuando estemos empleando el 2 con *w* **muy pequeño. La combinación** *Aa* **es inflexible, no se adapta a las fluctuaciones que puedan producirse, y por tanto absurda en ambiente aleatorio.**

Algunas soluciones típicas son:

- **1Ba: gestión por** *punto de pedido***.**
- **2Ab (con** $w = T$**): gestión por** *aprovisionamiento periódico***.**
- **2Bb: gestión por** *política (S,s)*

5.1.4.1 Niveles de stock

Conviene recordar los diferentes conceptos posibles de nivel de stock.

Stock físico, stock existente, existencias, stock en mano (*stock-on-hand* **= SOH): es la cantidad de un artículo que se encuentra en el stock. Su valor mínimo es cero.**

Si cuando se produce ruptura de stock la demanda puede diferirse total o parcialmente (por ejemplo, un cliente puede decidir esperar a que haya de nuevo disponibilidad del artículo) aparece un nuevo concepto:

*Stock neto***: es igual al stock físico menos la demanda diferida. Por consiguiente, puede adoptar valores negativos.**

Si el plazo de entrega es largo ocurrirá que en un momento dado existirán uno o varios pedidos cursados pendientes de recibir. Al tenerlos en cuenta aparece la posición de stock.

*Posición de stock***: es igual al stock neto más las cantidades pedidas pendientes de recibir. Algunos textos lo denominan stock disponible, pero creemos que este nombre se presta a confusiones y lo evitamos. (Si existen cantidades comprometidas, por ejemplo para atender órdenes ya emitidas, deben eliminarse al calcular la posición de stock).**

El nivel de stock a que se hace referencia en las reglas *B* **y** *b* **corresponde generalmente a la posición de stock.**

5.1.4.2 Demanda

La causa de la aleatoriedad puede residir en la demanda y/o en el plazo de entrega.

Si la demanda es aleatoria pero homogénea en el tiempo vendrá definida por una ley de probabilidad en función del intervalo de tiempo *t* **durante el cual se considera la demanda:**

Demanda continua X, **con densidad de probabilidad** *f(x,t)* **y probabilidad acumulada** *F(x,t)* **(aunque seguiremos, según nuestra costumbre, tomando** *F(x,t)* **= Prob***[X > x]* **y no como es usual igual a Prob[***X ≤ x***]), por ser en los stocks más intuitiva la probabilidad de que se produzca ruptura que la de poder atender la demanda.**

demanda discreta K, **con probabilidad** $p_k(t)$ **de que** $K = k$**. (Aunque normalmente utilizaremos con toda generalidad la notación del caso continuo, incluso cuando la demanda sea discreta).**

Supondremos en lo que sigue que la demanda que se produce en dos intervalos de tiempo disjuntos es independiente, lo que permite componer las leyes de probabilidad.

Recordemos que si $p_k^{(1)} = p_k\,(= p_k\,(t_0))$ **es la ley de la demanda durante un intervalo** t_0 **(por ejemplo 1 período), por convolución podemos obtener:**

$$p_k^{(2)} = \sum_{i=0}^{k} p_i \cdot p_{k-i} \qquad (= p\ (2 \cdot t_0))$$

$$p_k^{(n)} = \sum_{i=0}^{k} p_i \cdot p_{k-i}^{(n-1)} \qquad (= p\ (n \cdot t_0))$$

y en el caso continuo:

$$f(x, t_1 + t_2) = \int_0^x f(y, t_1) \cdot f(x-y, t_2) \cdot dy$$

que en ambos casos denominaremos convolución de la ley de probabilidad, y escribiremos, si ha lugar:

$$f(x, t_1 + t_2) = f(x, t_1) * f(x, t_2)$$

5.1.4.3 Tamaño de la demanda elemental

Habitualmente supondremos que la demanda se produce unidad a unidad a lo largo del

tiempo, por lo que la representación de los niveles de stock (tanto el físico como el neto) seguirá una línea descendiente sin saltos bruscos verticales hacia abajo (hacia arriba se producirán cuando entre un lote). Si la demanda, y por tanto las salidas de stock, pudiese ser de varias unidades a la vez ello afectaría en particular a la posibilidad de aplicación de algunos sistemas de gestión, por ejemplo, la gestión por punto de pedido no sería adecuada, ya que al lanzar un pedido el stock neto podría estar considerablemente por debajo del punto de pedido.

5.1.4.4 Plazo de entrega

El tratamiento de la aleatoriedad del plazo de entrega es mucho más difícil, y en ciertos casos conduce a modelos muy complejos.

Habitualmente supondremos que el plazo de entrega L es determinado, o bien que su indeterminación es reducida, lo que está de acuerdo con las tendencias actuales de seguridad en el cumplimiento de las entregas en la fecha prevista. La finura de la determinación de L dependerá de las unidades empleadas, que, según su cantidad, conducirán a fijar la llegada del lote pedido dentro de una semana dada, dentro de un día, o incluso a una hora prefijada. La única forma de poder funcionar coherentemente en una sociedad múltiple e interdependiente es la de poder establecer planes, y para ello cada uno debe comprometerse con ciertos plazos y cumplirlos; abandonado el nivel tercermundista, quien anuncie unos plazos irreales con fines comerciales y no los cumpla tendrá pocas ocasiones de repetir inpunemente su hazaña. A este respecto la industria japonesa nos muestra suficientes ejemplos. Naturalmente, existe el riesgo de situaciones excepcionales: crisis de materias primas, huelgas, accidentes, etc. en las cuales los sistemas de gestión que estamos describiendo dejan de tener validez y en los que los plazos son anómalos, y se resisten posiblemente a toda cuantificación incluso probabilista.

Sin embargo, conviene hacer dos observaciones; la primera se refiere a que si la situación es excepcional no se producirá más que raramente, y podrá ser tratada también excepcionalmente dedicándole tiempo, recursos y energía gracias a que las situaciones "normales" están controladas mediante los procedimientos que describimos. Segundo, todas las empresas tienen Departamentos cuya misión, entre otras, es la de prever estas situaciones excepcionales, tomar medidas para evitarlas, comunicar que van a producirse con suficientemente antelación y colaborar en aminorar sus efectos; por ejemplo, en los artículos de procedencia exterior, el Departamento de Compras no sólo debe intentar que los precios sean lo más bajos posible, sino que debe elegir los proveedores que razonablemente son menos problemáticos, debe tener proveedores substitutivos de cada artículo, etc.

En nuestro contexto el plazo de entrega se refiere al tiempo que transcurre desde el instante en que se detecta la necesidad de pasar un pedido y el instante en que dicho

pedido ha entrado en almacén y las unidades están disponibles para su empleo; por consiguiente, es un plazo mayor que el señalado por el proveedor. Incluye el tiempo para los trámites administrativos de confección del pedido, el correo, el plazo propio del proveedor, el transporte, los trámites administrativos de entrada y, eventualmente, el control de cantidad y calidad.

Hay dos formas de integrar la aleatoriedad, si es reducida:

a) Utilizando sistemáticamente como plazo de entrega fijo un valor de L **igual a la media del plazo de entrega más una desviación tipo:**

$$L\,(\textbf{equivalente}) = EM[L] + \alpha[L]$$

y trabajar con dicho valor como si el plazo de entrega fuera constante (no hay justificación teórica para esta medida).

b) Puesto que habitualmente nos interesamos por la demanda que se produce durante L **(gestión por punto de pedido) o durante** $L + T$ **(gestión por aprovisionamiento periódico) con** T**, período, constante, determinar las distribuciones marginales de la demanda, es decir, siendo** $g(l)$ **la densidad de probabilidad de** L**:**

$$h(x) = \int_{Lmin}^{Lmax} f(x,l)\cdot g(l)\cdot dl$$

$$\hat{h}(x,T) = \int_{Lmin}^{Lmax} f(x,l+T)\cdot g(l)\cdot dl$$

Normalmente nuestros modelos suponen que cuando el plazo de entrega es aleatorio los pedidos llegan en el orden en que se han cursado, lo que estrictamente (salvo si el juego de Lmax y Lmin lo resuelve) conduce a que los sucesivos plazos de entrega son dependientes entre sí, aspecto no tratado en la bibliografía asequible. Nosotros supondremos que los sucesivos plazos de entrega son independientes.

5.1.4.5 Comportamiento de la demanda en caso de ruptura

Si se produce ruptura de stock, el stock físico se reduce a cero y no puede atenderse de inmediato la demanda que llegue. El comportamiento de ésta puede seguir dos patrones extremos:

a) La demanda se difiere, el cliente está dispuesto a esperar y las cantidades no entregadas se deben. Cuando llega el primer reaprovisionamiento se atienden todos los débitos de inmediato y el resto se destina a la demanda que vaya llegando. Una situación de este tipo sólo puede darse en la realidad en casos de monopolio con un mercado cautivo, por ejemplo en el Ejército o en la Administración.

b) La demanda se pierde, el cliente adquiere el artículo en otra empresa. Es la situación habitual en ambiente de competencia. Parece poco probable que si el ama de casa no encuentra pan en la panadería lo encargue para el día siguiente (tal vez encargue el del día siguiente para tener más seguridad de no quedarse sin él, pero de inmediato irá a otra panadería, o adquirirá un artículo substitutivo, pan de molde; en ambos casos la demanda inicial se ha perdido para la empresa).

Algunas situaciones reales pueden encontrarse entre las dos citadas, un porcentaje de la demanda se difiere y el resto se pierde. Normalmente trataremos los casos extremos; los intermedios podrán calcularse mediante la interpolación.

5.1.4.6 Stock de seguridad

La aleatoriedad significa un aumento del stock respecto al que sería estrictamente necesario si la demanda y el plazo de entrega tuvieran los valores medios y fuesen deterministas. En efecto, con dicho stock se produciría ruptura de stock aproximadamente la mitad de los ciclos, con pérdidas de ventas o retrasos, mientras que en la otra mitad sobrará stock (sería exactamente la mitad si $h(x)$ o $h(x,T)$ son simétricas respecto al valor medio). Normalmente es más costoso no atender de inmediato la demanda que tener una cantidad equivalente en stock. Por consiguiente el stock se incrementará en cierta cantidad a fin de absorber en cierta proporción las fluctuaciones de la demanda y del plazo de entrega. Este stock en exceso se conoce con el nombre se stock de seguridad (*ss*). Más precisamente, el stock de seguridad es el valor del stock neto medio en los instantes que preceden inmediatamente a la entrada de un lote en el stock.

El volumen del stock de seguridad se determina esencialmente estableciendo un balance entre los efectos del stock excesivo y los de la ruptura de stock, bien sea a partir de un coste (coste de ruptura) bien a partir de una calidad de servicio.

5.1.4.7 Medición de los efectos de la ruptura

La medición de los efectos de la ruptura podrá hacerse a través de un coste que nosotros escribiremos *CD* en caso de demanda diferida y *CR* en caso de demanda perdida, ambos con dimensiones PTA/unidad (aunque posiblemente fuese más coherente que *CD* tuviese las mismas dimensiones que *CS*, PTA/unidad-año). No obstante, tal como ya se ha

indicado, la fijación de valores para *CD* y/o *CR* es bastante difícil, por lo que en lugar de minimizar una ecuación de coste para determinar los parámetros que fijan la extensión correspondiente de rupturas, puede procederse al revés estableciendo directamente limitaciones a las mismas a través del concepto de calidad de servicio.

El concepto de calidad de servicio proviene de la organización clásica, y conviene concretarlo un poco, pues puede recibir deferentes acepciones, todas relacionadas entre sí en general, pero de significado intuitivo distinto. Consideremos la ruptura representada en la figura en la que podemos observar varias características:

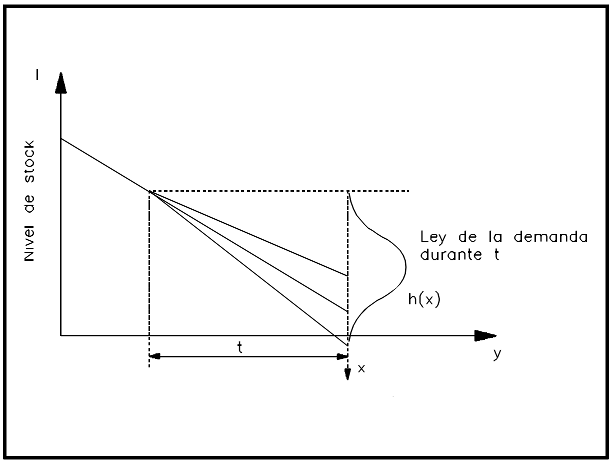


Fig. 5.1.4.1 Efecto de la aleatoriedad de la demanda en la ruptura de stock

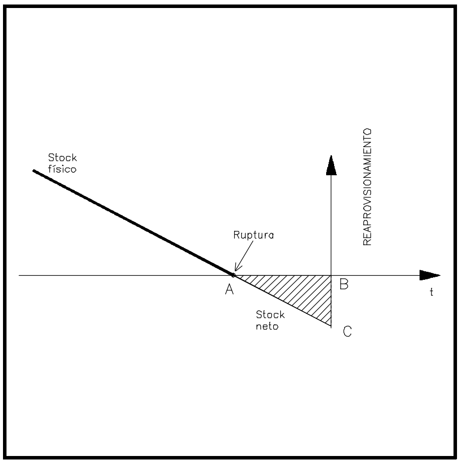


Fig. 5.1.4.2 Aspectos de la ruptura de stock

La extensión y gravedad de la ruptura pueden medirse por:

- BC: número de unidades demandadas no servidas de inmediato.
- AB: duración de la ruptura.
- Área(ABC): número de unidades-año de ruptura.

En consecuencia, refiriendo estas medidas a la unidad de tiempo, o a una proporción, podemos tener una serie de parámetros que permiten medir la calidad de servicio (o su complementaria "no-calidad" de servicio, que generalmente es más cómoda):

1) **Proporción de ciclos sin ruptura, que es lo mismo que probabilidad de que no haya ruptura en un ciclo. Su complementario, proporción de ciclos con ruptura, lo llamaremos habitualmente α.**

2) **Cantidad media de demanda atendida directamente del stock por ciclo, en unidades o**

en pesetas. Su complementario, número medio de unidades de demanda llegada en ruptura de stock por ciclo, lo denominaremos y.

3) Tasa de disponibilidad, fracción del tiempo durante el cual el stock neto es positivo, es decir, hay stock físico. Si las transacciones de demanda son de tamaño unidad esta medida es equivalente a la siguiente.

4) Fracción de la demanda atendida directamente del stock, es decir, ni diferida ni perdida. Su complementario, proporción de la demanda diferida o perdida, lo denominaremos β.

5) Tiempo medio entre rupturas; lo denominaremos *TBS* ("time between shortages").

Algunas veces deseamos medidas de la calidad de servicio conjunta de varios artículos de la población de stock, lo que es más fácil con las que siguen:

6) Número esperado de rupturas por unidad de tiempo (es simplemente la recíproca de 5 y está estrechamente ligada con 1). Es el producto del número de ciclos por unidad de tiempo y la probabilidad de ruptura por ciclo.

7) Cantidad esperada de rupturas por unidad de tiempo: demanda insatisfecha directamente del stock esperada en unidades o pesetas. (Está estrechamente ligada a 4).

8) Rupturas esperadas, ponderadas temporalmente, por unidad de tiempo: en esta medida, adecuada para demanda diferida, no sólo tiene importancia el número de unidades en ruptura, sino también el tiempo que transcurre hasta la cumplimentación. Si la ponderación temporal es lineal, una unidad diferida cuatro semanas es equivalente a dos unidades diferidas cada una de ellas dos semanas.

Cada una de las tres medidas últimas puede ponderarse por un factor llamado "esencialidad" del artículo (también importancia). Si el artículo j es el doble de esencial que el artículo j', en las medidas agregadas el primero tendrá un coeficiente de ponderación doble del segundo.

5.1.5 Gestión por punto de pedido. Método heurístico

Para el cálculo de las variables de acción vamos a utilizar el llamado, tal vez no muy felizmente, "método heurístico". Dicho método parte de unos modelos sólo aproximados, incluso en el caso que se satisfagan totalmente las hipótesis que en cada caso se detallan. Sin embargo mediante este método se obtienen valores aceptables en la mayoría de los casos prácticos, en los que la extensión de las rupturas sea reducida.

Los modelos exactos, por otra parte, o bien se adaptan a situaciones extremadamente concretas, con hipótesis muy restrictivas, o presentan enormes dificultades numéricas de cálculo, por lo que hemos renunciado a su presentación aquí.

Distinguiremos cuatro casos mediante la doble disyuntiva: demanda insatisfecha diferida o perdida, limitación de las rupturas mediante coste de ruptura o acotación de la calidad de servicio. Completaremos la exposición con los dos casos mixtos, coste de ruptura y acotación de la calidad de servicio.

5.1.5.1 Demanda insatisfecha diferida. Coste de ruptura

Las hipótesis básicas de las que partiremos para calcular los valores de las variables de acción, Q y s, son:

1) **El coste de adquisición, CA, es independiente de Q.**

2) **El coste de la demanda diferida es independiente del tiempo, CD tiene las dimensiones PTA/unidad.**

3) **Nunca hay más de un pedido pendiente de recibir.**

4) **El coste del sistema de información y control es independiente de Q y s.**

5) **El punto de pedido s es positivo.**

6) **La demanda durante el plazo de entrega sigue una ley de densidad de probabilidad $h(x)$, de media mL y desviación tipo σL.**

7) **Las salidas de stock, en virtud de la demanda, se producen unidad a unidad. (Es decir, cuando se detecta la necesidad de un pedido el nivel de stock es igual al punto de pedido o bien, si es inferior, la diferencia es despreciable frente a la demanda durante el plazo de entrega.)**

8) **Los costes de lanzamiento y de posesión son CL PTA/pedido y CS PTA/unidad-año, respectivamente.**

(Puede demostrarse que el procedimiento es aplicable aunque no se cumpla la limitación que representa 3, siempre que los pedidos lleguen en el orden en que fueron hechos).

Llamaremos ciclo al intervalo de tiempo entre dos pedidos consecutivos (o entre dos entregas consecutivas, *fig. 5.1.5.1*). Los ciclos no son de duración igual en este caso. Llamaremos D al valor medio de la demanda anual. Tenemos:

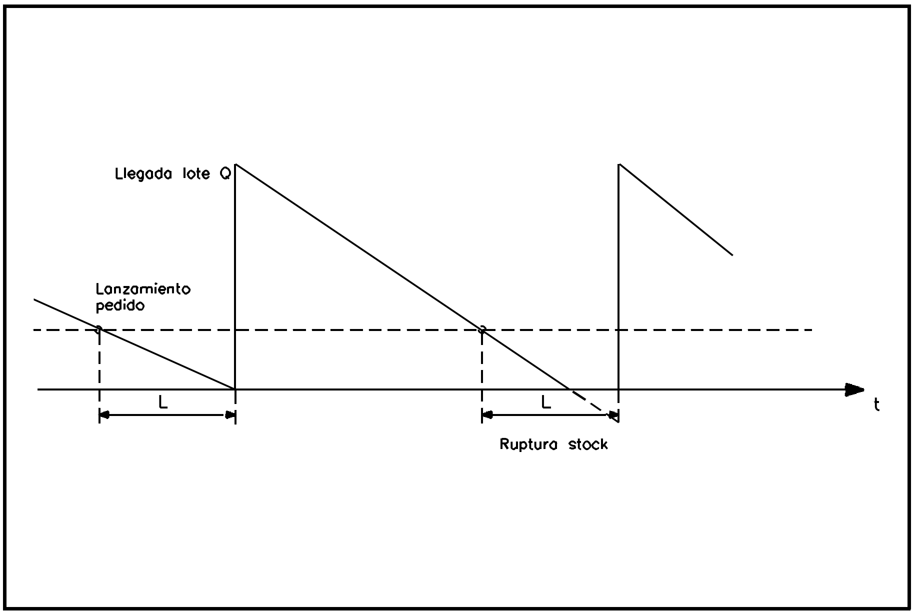


Fig.5.1.5.1 Gestión por punto de pedido

- coste anual medio de lanzamiento:

$$CL \cdot \frac{D}{Q}$$

- coste anual medio de posesión:

$$CS \cdot sm$$

donde *sm* **es el stock medio que podemos estimar de la forma siguiente: en cada ciclo el stock oscila en promedio entre** *ss* **y** *ss + Q***, siendo** *ss* **el stock neto medio existente en el instante inmediatamente anterior a una entrada, o sea el stock de seguridad, y por tanto** $sm = ss + \frac{Q}{2}$**; ahora falta escribir** *ss* **en función de los parámetros y variables. Dada la definición,** *ss* **será igual al punto de pedido,** *s***, menos lo que haya salido en promedio durante el plazo de entrega. Como la demanda no se pierde (en caso de ruptura se difiere), las salidas y la demanda para el stock neto son iguales (en caso de demanda superior al stock aparecen débitos, stock neto negativo), por tanto:**

$$ss = s - mL$$

y consecuentemente:

$$sm = s - mL + \frac{Q}{2}$$

donde

$$mL = \int_0^\infty x \cdot h(x) \cdot dx$$

$= D \cdot L$ **si el plazo de entrega es constante**

$= D \cdot EM[L]$ **si L es aleatorio pero independiente de la demanda**

Para estimar el coste que representan las rupturas primero deberemos determinar el volumen de la demanda diferida y, en función de la demanda durante el plazo de entrega y del punto de pedido:

$$y = 0 \qquad \text{si} \quad s \geq x$$

$$y = x - s \qquad \text{si} \quad s \leq x$$

de donde el valor medio:

$$y(s) = \int_0^\infty y(s,x) \cdot h(x) \cdot dx = \int_s^\infty (x - s) \cdot h(x) \cdot dx$$

Por tanto:

Coste anual medio de las rupturas:

$$CD \cdot \frac{D}{Q} \cdot y(s)$$

Ya podemos escribir el coste anual medio de gestión:

$$K(Q,s) = CL \cdot \frac{D}{Q} + CS \cdot \left(s - mL + \frac{Q}{2} \right) + CD \cdot \frac{D}{Q} \cdot y(s)$$

derivando respecto a Q y respecto a s e igualando a cero:

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = -CL \cdot \frac{D}{Q^2} + \frac{CS}{2} - CD \cdot \frac{D}{Q^2} \cdot y(s)$$

$$\frac{\partial K}{\partial s} = CS + CD \cdot \frac{D}{Q} \cdot \frac{\partial y(s)}{\partial s} = CS - CD \cdot \frac{D}{Q} \cdot H(s) = 0$$

habiendo hecho, según ya es habitual:

$$H(s) = \int_s^\infty h(x) \cdot dx$$

El sistema de ecuaciones puede escribirse también:

$$Q = \sqrt{2 \cdot D \cdot \frac{CL + CD \cdot y(s)}{CS}} \qquad \text{[PP01]}$$

$$H(s) = \frac{Q \cdot CS}{D \cdot CD} \qquad \text{[PP02]}$$

en donde cada variable está despejada (suponiendo conocida la función inversa de H) en función de la otra. Por tanto estas ecuaciones permiten hallar Q o s si una de las variables ya está definida por consideraciones ajenas a las de minimizar globalmente K. Si s es un dato se aplica [PP01], si lo es Q se aplica [PP02]. Por otra parte sugieren, entre otros, un método iterativo de resolución cuando tanto s como Q son incógnitas. Inicialmente se toma $y^{(0)} = 0$, que substituye a $y(s)$ en la primera ecuación para determinar $Q^{(0)}$ (la ecuación queda entonces como la del lote económico). Este valor $Q^{(0)}$ se introduce en la segunda ecuación para obtener un valor $H^{(0)}$, y por tanto permite hallar $s^{(0)}$. A partir de $s^{(0)}$ calculamos $y^{(1)} = y(s^{(0)})$, que permite reiniciar un ciclo de iteraciones. En general:

$$Q^{(n)} = \sqrt{2 \cdot D \cdot \frac{CL + CD \cdot y^{(n)}}{CS}} \qquad \text{[PP03]}$$

$$H^{(n)} = \frac{CS \cdot Q^{(n)}}{CD \cdot D} \Rightarrow s^{(n)} \qquad \text{[PP04]}$$

$$y^{(n+1)} = y(s^{(n)}) = \int_{s^{(n)}}^{\infty} \left(x - s^{(n)}\right) \cdot h(x) \cdot d(x) \qquad \text{[PP05]}$$

Si la iteración converge, los valores hallados son solución del sistema de ecuaciones y gracias a la convexidad de K conducen a un mínimo. (Véase el apartado 5.1.5.1.3).

Si $h(x)$ tiene una forma especial puede ser conveniente apartarnos del proceso anterior, especialmente eficaz con funciones de densidad de probabilidad unimodales semejantes a la ley normal.

Si en el cálculo se produce $\frac{CS \cdot Q}{CD \cdot D} > 1$, ello significa que CD es demasiado pequeño y la tendencia es a diferir siempre, por lo que el modelo resulta inadecuado.

Si L es del orden de Q/D o mayor hay más de un pedido en curso, entonces, con las salvedades ya indicadas, podrá utilizarse lo anterior pero refiriendo s a la posición de stock.

Los diferentes índices de calidad de servicio son fáciles de calcular a partir de los

resultados, en particular:

$$\alpha = H(s)$$

$$\beta = \frac{y(s)}{Q}$$

$$TBS = \frac{Q}{D \cdot H(s)}$$

5.1.5.1.1 Caso de la ley normal

Si la ley de la demanda durante el plazo de entrega *L* **(constante) es normal, la demanda en general durante un intervalo cualquiera suficientemente grande también será normal. Si esto ocurre al nivel unitario (1 año), y** *D* **y** σ **son la media y desviación tipo, entonces:**

$$mL = D \cdot L$$

$$\sigma L = \sigma \cdot \sqrt{L}$$

En todo caso lo que nos interesa ahora es que *h(x)* **sea la ley normal con media** *mL* **y desviación tipo** σ*L* **(***fig. 5.1.5.2***).**

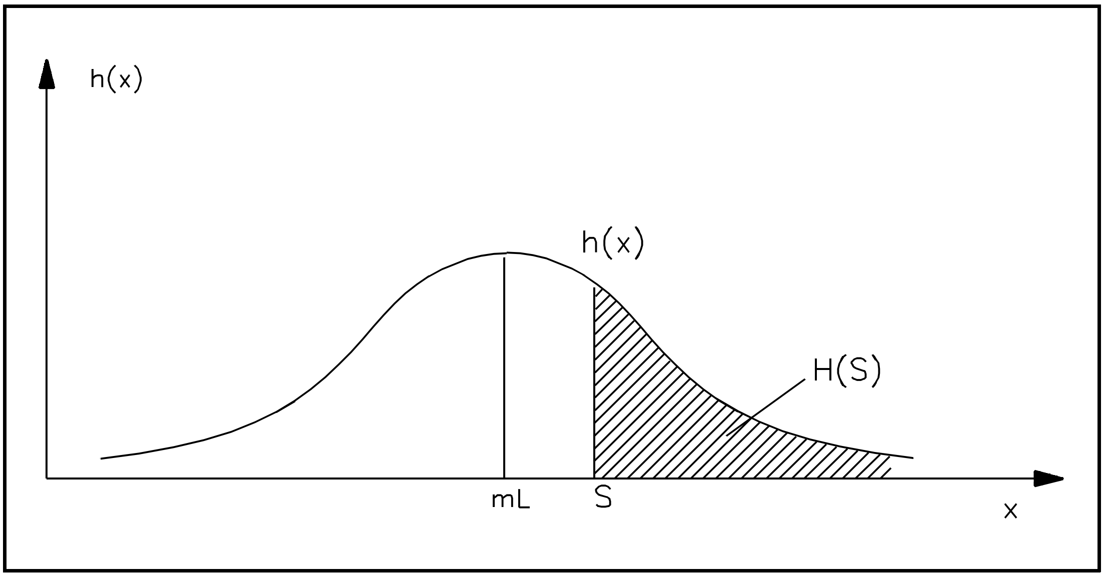


Fig. 5.1.5.2 Ley Normal

El paso de *H(s)* **a** *s* **es fácil gracias a las tablas de la ley normal centrada y reducida; de** *H*

pasaremos a un valor tabular t_H y de aquí:

$$s = mL + t_H \cdot \sigma L$$

Por otra parte, también es sencillo pasar de s **a** $y(s)$**:**

$$y(s) = \int_s^{\infty} (x - s) \cdot h(x) \cdot dx = \int_s^{\infty} \frac{x - s}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma L}} \cdot e^{\frac{-(x-s)^2}{2 \cdot \sigma L^2}} \cdot dx$$

y haciendo $z = \frac{x - mL}{\sigma} \cdot L$ **:**

$$y(s) = \sigma L \cdot \int_{t_H}^{\infty} \frac{z - t_H}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-z^2/2} \cdot dx = \sigma L \cdot [h_N(t_H) - t_H \cdot H_N(t_H)] = \sigma L \cdot \Phi(t_H)$$

donde $h_N(t)$ **y** $H_N(t)$ **se refieren a la ley normal centrada y reducida (el último valor sea idéntico a** $H(s)$**). Por consiguiente, a partir de las tablas de la ley normal centrada y reducida, las de la ordenada y las de las probabilidades acumuladas, pueden obtenerse otras que indiquen en función de** t **el valor del corchete que hemos representado por** Φ**. Estas tablas se encuentran como anexo a este texto, y un extracto, suficiente en la mayoría de los casos es el de la** *figura 5.1.5.3***:**

t	0,	1,	2,	3,
,0	,39894	,08331	,00849	,00038
,1	,35093	,06862	,00647	,00027
,2	,30689	,05610	,00489	,00018
,3	,26676	,04553	,00366	,00013
,4	,23044	,03667	,00272	,00009
,5	,19779	,02931	,00200	,00006
,6	,16867	,02324	,00146	,00004
,7	,14288	,01829	,00106	,00003
,8	,12021	,01427	,00076	,00002
,9	,10043	,01105	,00054	,00001

Fig. 5.1.5.3 Tabla abreviada de la función Φ

que junto con:

$$\Phi(-t) = t + \Phi(t)$$

permite determinar los valores de Φ **para toda** t **y viceversa.**

Para gran cantidad de leyes (especialmente simétricas) se puede generalizar la expresión:

$$y(s) = \sigma L \cdot \Phi(t_H) \quad \text{con} \quad t_H = \frac{s - mL}{\sigma L}$$

adoptando la función Φ adecuada.

5.1.5.1.2 Ejemplo

Un fabricante textil usa un producto químico en su proceso con un consumo medio anual de 10.000 *hl*. Este valor medio es constante en el tiempo, pero la demanda en un intervalo puede variar aleatoriamente. El producto se compra y la demanda durante el plazo de entrega se estima que se distribuye normalmente con media 300 *hl* y desviación tipo 40 *hl*. El coste fijo de adquisición es 70 *um* por pedido y el variable 3 *um/hl*. La compañía carga a una tasa del 20% anual la posesión de stock. Las rupturas de stock obligan a reprogramar la producción con un coste resultante que se supone proporcional al tamaño de la ruptura, y que se estima de 1,50 *um/hl* diferido. Si se utiliza un sistema de gestión por punto de pedido, ¿cuáles deberían ser Q y s?

Utilizando la forma iterativa indicada:

- primera iteración:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 100.000 \times 70}{0,2 \times 3}} = 1.527,53$$

$$H(s) = \frac{1.527,53 \times 0,6}{10.000 \times 1,5} = 0,061101$$

en las tablas obtenemos t_H = 1,55; de donde $\Phi(t_H)$ = 0,02612

$$y(s) = 40 \times 0,02612 = 1,0448$$

- segunda iteración:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 100.000 \times [70 + 1,5 \times 1,0448]}{0,6}} = 1.544,5301$$

$$H(s) = \frac{1.544,53 \times 0,6}{15.000} = 0,0617812$$

de donde t_H = 1,54; $\Phi(t_H)$ = 0,02673

$$y(s) = 40 \times 0{,}02673 = 1{,}0692$$

- tercera iteración:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 10.000 \times [70 + 1{,}5 \times 1{,}0692]}{0{,}6}} = 1.544'9254$$

si consideramos suficiente la aproximación calcularemos s:

$$s = 300 + 40 \times 1{,}54 = 361{,}6$$

y tomaremos definitivamente:

$$Q^* = 1.545 \quad \text{y} \quad s^* = 362$$

5.1.5.1.3 Análisis de la convergencia

En la *figura 5.1.5.4* hemos representado dos curvas en el plano (Q,s):

- curva [1] correspondiente a:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot [CL + CD \cdot y(s)]}{CS}}$$

- curva [2] correspondiente a:

$$H(s) = \frac{CS \cdot Q}{CD \cdot D}$$

Ambas curvas son decrecientes, como puede comprobarse analizando las derivadas primeras de s respecto a Q. Si $h(x)$ es unimodal, la curva [2] tiene un punto de inflexión en el valor de $s = xm$ que corresponde a la moda de $h(x)$. Los puntos señalados en el eje Q son los siguientes:

- Q_o: valor del lote económico $\sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot CL}{CS}}$

- Q_m: corresponde a $\sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot [CL + CD \cdot mL]}{CS}}$

- Q_h: corresponde a $\frac{CD \cdot D}{CS}$

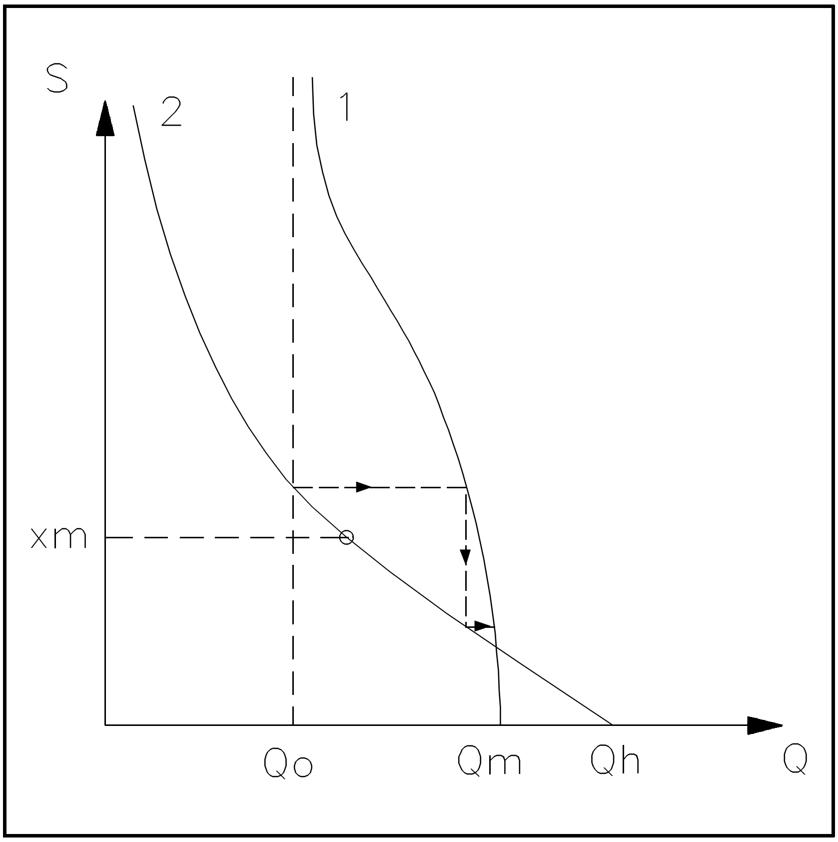


Fig. 5.1.5.4 Convergencia del método heurístico

puede observarse la marcha de las sucesivas iteraciones que, en la medida en que $Q_m < Q_h$, conducirán a la solución buscada, intersección de ambas curvas.

5.1.5.1.4 Caso de ley exponencial

Si $h(x) = a \cdot e^{(-a \cdot x)}$, **para** $x > 0$

$$mL = \frac{1}{a} \; (= D \cdot L) \quad \text{y} \quad \sigma L = \frac{1}{a}$$

$$H(s) = e^{(-a \cdot s)}$$

$$y(s) = \frac{1}{a} \cdot H(s) = \sigma L \cdot H(s)$$

por tanto, de la segunda ecuación podemos deducir:

$$y(s) = \frac{\sigma L \cdot CS \cdot Q}{CD \cdot D} = \frac{CS \cdot Q}{a \cdot CD \cdot D}$$

que, substituido en la primera, conduce a una ecuación de segundo grado en Q**:**

$$Q^2 - \frac{2}{a} \cdot Q - \frac{2 \cdot D \cdot CL}{CS} = 0$$

cuya raíz positiva es:

$$Q = \frac{1}{a} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot CL \cdot D \cdot a^2}{CS}} \right]$$

independiente de CD**. Conocido** Q**, puede hallarse** s **calculando primero** $H(s)$ **y despejando:**

$$s = -\frac{1}{a} \cdot \ln[H(s)] = -\frac{1}{a} \cdot \ln\left[\frac{CS \cdot Q}{CD \cdot D} \right]$$

5.1.5.1.5 Caso de la ley de Laplace

Algunos textos aconsejan la utilización de la ley de Laplace para los artículos con poco movimiento, $mL < 10$**, de preferencia a otras leyes (por ejemplo la de Poisson). La ley de Laplace es una exponencial doble simétrica:**

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma L} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma L} \cdot (mL - x)} \quad \textbf{para} \quad x \le mL$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma L} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma L} \cdot (x - mL)} \quad \textbf{para} \quad x > mL$$

donde mL **y** σL **son respectivamente la media y la desviación tipo de la demanda durante el plazo de entrega.**

De ahí:

$$H(s) = 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma L} \cdot (mL - s)} \quad \textbf{si} \quad s \le mL$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma L}\cdot(s-mL)} \qquad \text{si} \quad s \geq mL$$

$$y(s) = \sigma L \cdot \Phi\left(\frac{s-mL}{\sigma L}\right) = \sigma L \cdot \Phi(t_H)$$

$$\Phi(t_H) = -t_H + \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \cdot e^{\sqrt{2}\cdot t_H} \qquad \text{si} \quad t_H \leq 0$$

$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \cdot e^{-\sqrt{2}\cdot t_H} \qquad \text{si} \quad t_H \geq 0$$

5.1.5.1.6 Caso de ley discreta. Aplicación a Poisson

Si $h(x)$ **y** $H(x)$ **están definidas para** $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ **y si consecuentemente** s **y** Q **tienen que ser valores enteros y no basta sencillamente redondear como hemos hecho antes habrá que determinar la solución óptima específicamente. La ecuación de** $K(Q,s)$ **seguirá siendo:**

$$K(Q,s) = CL \cdot \frac{D}{Q} + CS \cdot \left(s - mL + \frac{Q}{2}\right) + CD \cdot y(s) \cdot \frac{D}{Q}$$

donde ahora :

$$H(s) = \sum_{x=s+1}^{\infty} h(x) \;; \quad 1 - H(s) = \sum_{x=0}^{s} h(x)$$

y

$$y(s) = \sum_{x=s+1}^{\infty} (x-s)\cdot h(x)$$

Ahora deberemos trabajar con diferencias finitas, buscando Q^* **y** s^* **tales que:**

$$K(Q^*,s^*) < K(Q^*-1,s^*) \;; K(Q^*,s^*) \leq K(Q^*+1,s^*)$$

$$K(Q^*,s^*) < K(Q^*,s^*-1) \;; K(Q^*,s^*) \leq K(Q^*,s^*+1)$$

lo que conduce a:

$$(Q^*-1)\cdot Q^* < \frac{2\cdot D\cdot\left[CL + CD\cdot y(s^*)\right]}{CS} \leq Q^*\cdot(Q^*+1)$$

$$H(s^*-1) > \frac{CS\cdot Q^*}{CD\cdot D} \geq H(s^*)$$

Expresiones similares a las del caso continuo y que permiten utilizar el mismo procedimiento iterativo, con la mayor estabilidad que se produce debido a la integridad de *Q* **y** *s* **en todos los pasos, lo que se traduce en mayor rapidez de convergencia.**

En el caso de la ley de Poisson de media $mL = D \cdot L$**:**

$$h(x) = \frac{(mL)^x}{x!} \cdot e^{-mL} \quad , \quad \text{para} \quad x \geq 0$$

H(s) **está tabulada o debe calcularse mediante la suma de** *h(x)*

$$y(s) = \sum_{x=s+1}^{\infty} (x-s) \cdot \frac{(mL)^x}{x!} \cdot e^{-mL} = mL \cdot \sum_{x=s+1}^{\infty} \frac{(mL)^{x-1}}{(x-1)!} \cdot e^{-mL} - s \cdot \sum_{x=s+1}^{\infty} \frac{(mL)^x}{x!} \cdot e^{-mL} = mL \cdot H(s-1) - s \cdot H(s)$$

5.1.5.1.7 Ejemplo

Un detallista analiza el stock de cajas para camisas de cierto tipo. El número de cajas solicitadas se distribuye según una ley de Poisson de media 4 por día. Cada caja cuesta al detallista 27,50 *um* **y la vende a 50** *um***. El coste fijo asociado a cada pedido es 10** *um* **y se utiliza una tasa de posesión del 0,20 anual.**

La demanda cuando hay ruptura se difiere a un coste de 5 *um* **cada caja. El plazo de entrega, constante, es de 5 días.**

Determinar los valores de las variables de acción de la gestión óptima por punto de pedido. (Se considerarán años de 250 días de demanda).

De los datos anteriores tenemos:

$$mL = D \cdot L = 4 \times 5 = 20 \text{ cajas} \; ; \; CS = 0{,}2 \times 27{,}5 = 5{,}5$$

$$D = 250 \times 4 = 1.000 \text{ cajas anuales}$$

Por tanto:

- primera iteración:

$$Q \cdot (Q-1) < 2 \times 1.000 \times \frac{10}{5{,}5} = 3.636{,}4 \leq (Q+1) \cdot Q$$

es decir

$$Q = 60$$

$$H(s-1) > \frac{60 \times 5,5}{1.000 \times 5} = 0,066 \geq H(s)$$

de donde (de las tablas de Poisson de parámetro 20, que indican $H(26) = 0,0779$ y $H(27) = 0,0525$), $s = 27$

De aquí podemos calcular:

$$y(27) = 20 \times 0,0779 - 27 \times 0,0525 = 0,1405$$

- segunda iteración:

$$Q \cdot (Q-1) < \frac{2.000 \times [10 + 5 \times 0,1405]}{5,5} = 3.891,82 \leq (Q+1) \cdot Q$$

es decir

$$H(s-1) > \frac{62 \times 5,5}{5.000} = 0,0682 \geq H(s)$$

de donde $s = 27$. Ya hemos alcanzado a la estabilidad, y por tanto:

$$Q^* = 62 \text{ unidades} \quad ; \quad s^* = 27 \text{ unidades}$$

5.1.5.1.8 Caso de la ley geométrica

Sea:

$$h(x) = (1-q) \cdot q^x, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad \text{con } 0 < q < 1$$

cuya media es $mL = \dfrac{q}{1-q}$ y variancia $\sigma L = \dfrac{q}{1-q}$. Tenemos:

$$H(s) = \sum_{x=s+1}^{\infty} (1-q) \cdot q^x = q^{s+1}$$

$$y(s) = \sum_{x=s+1}^{\infty} (x-s) \cdot (1-q) \cdot q^x = \frac{q^{s+1}}{1-q}$$