3.3 Problemas resueltos

3.3.1 *Planificación intuitiva*

Un taller de montaje de un cierto artículo desea planificar su producción para los próximos seis meses, para lo cual dispone de los datos siguientes:

Demanda a servir:	**600**	**400**	**700**	**800**	**800**	**1000**
Horas disponibles:	**180**	**180**	**172**	**180**	**188**	**180**
Precio de venta:	**300 PTA/unidad**					
Precio de coste:	**150 PTA/unidad**					
Producción:	**3,5 unidades/hora**					

El stock inicial es de 800 unidades y, por limitaciones en la capacidad del almacén, no se puede sobrepasar a final de mes el límite de 1.000 unidades en stock; naturalmente, se desea que éste sea lo más pequeño posible, pero para evitar rupturas de stock en ningún caso se debe tener a fin de mes un stock inferior a las 400 unidades.

El precio de coste expresado está calculado contando con que la fabricación se hará durante las horas normales de trabajo, pero si es preciso puede recurrirse a las horas extras, las cuales tienen un sobreprecio de 400 PTA/h, que hay que contar. Igualmente, si no se utilizan enteramente las horas normales disponibles, debe cargarse un coste adicional de 200 PTA/h no utilizada, por gastos generales no compensados.

Se desea saber cuál es el plan de producción óptimo.

Utilizaremos un método intuitivo de planificación, basado en una hoja de cálculo, fácilmente programable (para casos más complejos) en cualquier hoja electrónica tipo VisiCalc, Multiplan, Lotus 1-2-3, Quattro, etc. Definiremos ocho columnas, numeradas 0, 1, 2, ..., 6 y Total. La primera servirá para registrar los datos iniciales, y la última para la suma total por filas. Las filas serán ocho también, a saber: Demanda, Producción, Stock a final de

mes, Horas necesarias, Horas disponibles, Horas extras, Horas sobrantes, y Margen de Explotación. Las filas de demanda y horas disponibles son de datos, en tanto que la producción de cada mes es la variable que podemos fijar libremente. Las relaciones entre distintos datos de la hoja se deducen fácilmente del enunciado. Obsérvese que el total de horas necesarias es constante, así como la diferencia entre el total de horas extras menos el total de horas sobrantes.

Podemos ya empezar el tanteo.

1a. solución:

Una manera interesante de empezar sería fijar una cuota de producción para cada mes. Puesto que el stock inicial es de 800, y se desea un stock final de 400, la cuota mensual será:

$$\frac{600+400+700+800+800+1000-800+400}{6}=650$$

con lo que tenemos el siguiente cuadro:

	0	1	2	3	4	5	6	Total
Demanda		600	400	700	800	800	1.000	4.300
Producción		650	650	650	650	650	650	3.900
St. fin mes	800	850	1.100	1.050	900	750	400	
H. necesarias		185,7	185,7	185,7	185,7	185,7	185,7	1.114,2
H. disponibles		180	180	172	180	188	180	1.080
H. extra		5,7	5,7	13,7	5,7		5,7	36,5
H. sobrantes						2,3		2,3
Margen (PTA)		80.216	20.216	107.016	140.216	141.584	200.216	689.464

Así pues, el programa resulta muy rentable, pero claramente imposible, puesto que el stock a fin de los meses 2 y 3 supera el máximo permitido. Tampoco resulta muy lógico hacer horas extras cinco meses, mientras que en el mes 5 nos sobran horas.

2a. solución:

Intentaremos corregir estos defectos, variando la política. Puesto que es inevitable que en total se tenga que hacer horas extra, procuraremos cargarlas en los meses finales, y por tanto en el primer trimestre nos limitaremos a saturar las horas normales, a fin de no sobrecargar el stock.

El cuadro resultante de ello es:

	0	1	2	3	4	5	6	Total
Demanda		600	400	700	800	800	1.000	4.300
Producción		630	630	602	670	698	670	3.900
St. fin mes	800	830	1.060	962	832	730	400	
H. necesarias		180	180	172	191,4	199,4	191,4	1.114,2
H. disponibles		180	180	172	180	188	180	1.080
H. extra					11,4	11,4	11,4	34,2
H. sobrantes								
Margen (PTA)		85.500	25.500	119.700	134.928	130.728	194.928	691.284

El resultado de este nuevo programa es mejor que el anterior, y de hecho es óptimo, puesto que no es posible hacer menos horas extras ni disminuir las no ocupadas. Desgraciadamente, sigue sin ser factible, puesto que el stock a fin del mes 2 todavía es demasiado grande. Debemos conformarnos, por tanto, con un programa menos bueno, en el que necesariamente habrá que dejar horas sin usar en los dos primeros meses, y recuperarlas luego (a precio de horas extra) en los meses finales. Una solución que cumple esta condición es la siguiente:

3a. solución:

Del programa anterior pasamos del mes 2 al 3 el exceso de stock, es decir, 60 unidades de producción, con lo que el cuadro nos queda de la siguiente forma:

	0	1	2	3	4	5	6	Total
Demanda		600	400	700	800	800	1.000	4.300
Producción		630	570	662	670	698	670	3.900
St. fin mes	800	830	1.000	962	832	730	400	
H. necesarias		180	162,9	189,1	191,4	199,4	191,4	1.114,2
H. disponibles		180	180	172	180	188	180	1.080
H. extra				17,1	11,4	11,4	11,4	51,3
H. sobrantes			17,1					17,1
Margen (PTA)		85.500	31.072	103.844	134.928	130.728	194.928	681.000

Esta solución ya es factible, aunque resulte peor económicamente que cualquiera de las dos anteriores. Sin embargo, es óptima dadas las limitaciones existentes, aunque no sea la única óptima. Toda solución sin horas extras en los dos primeros meses, con 17,1 *h* no usadas en ellos y con un total de 51,3 *h* extras, y sin horas sobrantes en los cuatro últimos meses, también es óptima, al menos con los criterios usados hasta aquí.

Podría discutirse si todas estas soluciones son equivalentes o no en realidad; por ejemplo, quizá fuese mejor que cada uno de los cuatro meses finales tuviese el mismo número de horas extras, o tal vez fuese demasiado arriesgado prever un stock de 1.000 unidades al fin del mes 2, ya que si en lugar de atender pedidos en firme la demanda fuese no determinista el riesgo de encontrarnos en la realidad con un stock superior podría ser demasiado grande. O, al contrario, tal vez un exceso de 60 unidades sobre el límite fijado no fuese en realidad demasiado, con lo cual la solución 2 (bastante mejor económicamente) ya resultaría aceptable, etc.

En cualquier caso, lo que sí parece claro es que para la clase de demanda prevista, la limitación de la capacidad del almacén es una limitación grave, al menos mientras tengamos un stock inicial elevado.

Obsérvese que el modelo utilizado no penaliza en nada los stocks a fin de mes (de hecho, el enunciado no dice nada de ello); eso hace que dos soluciones igualmente posibles y del mismo coste en cuanto a horas extras y pérdidas sean equivalentes, aunque el stock medio sea muy distinto. Probablemente esta suposición no sea muy realista, pero es la que nos impone el enunciado...

También podríamos analizar el problema gráficamente, con la ayuda del diagrama de la *figura 1*, en el que las abscisas representan las horas disponibles acumuladas (de manera que cada mes ocupa un segmento de longitud distinta), y en ordenadas las unidades. Las dos líneas más gruesas limitan las soluciones posibles, en el sentido de que la producción más el stock inicial debe mantenerse entre ellas; dichas líneas corresponden al mínimo (demanda + stock mínimo, 400) y el máximo (demanda + stock máximo, 1000) permitidos. También tenemos un punto de partida obligatorio (stock inicial, 800), y un punto de llegada asimismo obligatorio (producción total + stock mínimo).

Se han representado en el gráfico tres soluciones: la línea continua (I) representa la primera solución ensayada, y se ve claramente su no-factibilidad, pues sale fuera de la zona permitida. La línea de puntos (III) representa la solución hallada y que hemos dicho que era óptima. Finalmente, se ha representado también una cuarta solución (línea de punto y raya, IV) que es peor económicamente, pero tal vez en la práctica fuese más aconsejable: la producción se distribuye de manera que el stock previsto no supere las 900 unidades, para evitar que una demanda inferior a la prevista sature el almacén, y las horas no productivas y extras se distribuyen entre los distintos meses proporcionalmente a las horas disponibles, cosa razonable pues supone que las horas extras por día (o improductivas, según el caso)

se mantienen constantes, mientras las haya de cada clase. La tabla correspondiente a esta solución sería la que viene después de la *figura 1*.

	0	1	2	3	4	5	6	Total
Demanda		600	400	700	800	800	1.000	4.300
Producción		550	550	669	700	731	700	3.900
St. fin mes	800	750	900	869	769	700	400	
H. necesarias		157,1	157,1	191,1	200	208,9	200	1.114,2
H. disponibles		180	180	172	180	188	180	1.080
H. extra				19,1	20,0	20,9	20,0	80
H. sobrantes		22,9	22,9					45,8
Margen (PTA)		92.920	32.920	102.010	127.000	121.990	187.000	663.840

3.3.2 *Modelo de planificación de Bowman*

Preparar un plan de producción de coste mínimo para un único artículo durante los próximos doce meses, conociendo los siguientes datos:

Stock inicial: 250 unidades

Stock mínimo al final del mes *t*: $1{,}2 \cdot \max\left\{ D_{t+1}, D_{media} \right\}$

Ritmo de producción: 3 unidades/hora

Mes(t)	Demanda (D_t)	Días laborables
1	300	22
2	500	20
3	750	21
4	600	21
5	550	22
6	550	23
7	500	21
8	450	10
9	400	18
10	400	20
11	350	22
12	350	20

En cada día laborable, se dispone de 8 horas normales y, si se desea, se pueden hacer hasta un máximo de 4 horas extra adicionales, las cuales tienen un sobrecoste de 60 PTA/hora.
Por cada unidad que esté en stock a fin de mes, se cargan 3 PTA en concepto de coste de almacenaje.

Calculemos en primer lugar el stock mínimo al final de cada mes. La demanda media vale:

$$D_{med} = \frac{300 + 500 + \ldots + 350}{12} = 475 \text{ unidades}$$

Como que el stock mínimo es:

$$sm_t = 1{,}2 \cdot \max \left\{ D_{t+1} \text{ , } 475 \right\}$$

las necesidades netas para cada mes serán:

Mes(t)	Max { D_{t+1} , 475 }	sm_t	Variación	D_t	Nec. netas
0		(1) 250			
1	500	600	+350	300	650
2	750	900	+300	500	800
3	600	720	-180	750	570
4	550	660	- 60	600	540
5	550	660	0	550	550
6	500	600	- 60	550	490
7	475	570	- 30	500	470
8	475	570	0	450	450
9	475	570	0	400	400
10	475	570	0	400	400
11	475	570	0	350	350
12	475 (2)	570	0	350	350

NOTAS:

(1): Para el mes 0 inscribimos el stock inicial, a partir del cual iniciremos el proceso.

(2): Aunque el enunciado no lo concrete, supondremos que $D_{13} < D_{med}$, ya que $D_1 = 300 < 475 = D_{med}$.

Para hallar el plan de producción de coste mínimo, utilizaremos el método de Bowman, y

plantearemos una tabla de doble entrada, que contendrá:

- En filas: Mes de producción.

- En columnas: Mes de consumo.

Dividiremos cada casilla de la tabla así descrita, en 6 partes según el siguiente esquema:

	En horas normales	En horas Extra
Producción máxima		
Sobrecoste PTA/unidad		
Producción planificada		

Orlaremos dicha tabla con una fila de "necesidades", y dos columnas para anotar la producción sobrante en horas normales no utilizadas, y la producción precisa en horas extra, ambas en unidades y horas.

Llenaremos dicha tabla empezando por la diagonal principal y, si se satura la capacidad sin llenar las necesidades, recurriremos a la producción del mes anterior mientras ello sea posible, siempre echando mano de las horas de coste más pequeño que haya disponibles. Se obtiene así la tabla de la siguiente página.

Los valores de la tabla se expresan en unidades, salvo donde se indique lo contrario.

La producción máxima se obtiene de los días laborables; así, en el mes 7:

21 días x 8 h.n./dia x 3 un./h. = 504 un. en horas normales
21 días x 4 h.e./dia x 3 un./h. = 252 un. en horas extra

El coste unitario se obtiene de dos conceptos:

20 PTAS si se ha fabricado en horas extra
ó + 3 x nº de meses en stock
0 PTA si se ha fabricado en horas normales

De \ A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Sobran H.N. P h.	Faltan H.E. P h.
1	528 264 - 20 528 122	- 142 23 80												202 67 1/3
2		480 240 - 20 480 240												240 80
3			504 252 - 20 504 66											66 22
4				504 252 - 20 504 36										36 12
5					528 264 - 20 528 22									22 7 1/3
6						552 276 - 20 490	62 276 3 23 - -	62 276 6 26 62						
7							504 252 - 20 470	34 3 23 34						
8								240 120 - 20 240 114						114 38
9									432 216 - 20 400	32 216 3 23			32 10 2/3	
10										480 240 - 20 400	80 240 3 23		80 26 2/3	
11											528 264 - 20 350	178	178 59 1/3	
12												480 240 - 20 350	130 43 1/2	
Necesidades	650	800	570	540	550	490	470	450	400	400	350	350		

Una vez completa la tabla, se puede usar el algoritmo del transporte para hallar una solución óptima, considerando 24 orígenes o fábricas (12 meses x 2 clases de horas), y 12 destinos o depósitos. A ellos se debe sumar otro destino adicional (horas no utilizadas) para equilibrar el problema. Recuérdese también que el coste de fabricar una unidad en el período *t* **para ser consumida en el período** *t-k* **(*k* > 0) es infinito, puesto que no es posible diferir la demanda insatisfecha.**

En el caso propuesto, el uso del algoritmo mencionado nos permitiría hallar otras soluciones de valor igual al de la propuesta, pero no mejor, puesto que éste es ya óptimo.

Ejercicio para el lector: Partiendo de la solución hallada, ¿cuál sería el programa óptimo si la demanda se pudiera diferir a un coste adicional de 15 PTA/unidad y mes?

3.3.3 *Planificación conjunta producción-inventarios (caso fregaderos)*

La empresa INDRAX, S. A. fabrica fregaderos industriales de dos tipos: de polietileno y de fibra de vidrio. Durante los próximos tres meses se ha comprometido a suministrar fregaderos de la manera siguiente:

Fecha de entrega	Tipo de fregadero	
	Polietileno	Fib. de vidrio
31 de enero	5.000	1.000
28 de febrero	6.000	4.000
31 de marzo	4.000	6.000

La empresa dispone de dos tipos de prensas, las máquinas Abner y las máquinas Brown, y de los moldes apropiados que deben utilizarse para producir estos fregaderos, con las siguientes horas de producción disponibles durante los próximos meses:

Mes	Máquinas Abner	Máquinas Brown
Enero	900	1.400
Febrero	200	300
Marzo	900	500

Las tasas de producción para cada pareja tipo de máquina-tipo de fregadero, expresadas en horas por unidad producida, son las siguientes:

	Abner	Brown
Polietileno	0,15	0,10
Fibra de vidrio	0,12	0,10

Los costes variables de producción de fregaderos (prensas) son 675 *um* por hora de operación, independientemente de qué tipo de máquina se está utilizando o de qué tipo de fregadero se está produciendo. El coste de mantener un stock de fregaderos es de 13,5 *um* por fregadero y mes. Los costes de material son 418,5 *um*/unidad para los fregaderos de polietileno, y 526,5 *um*/unidad para los de fibra de vidrio. Los costes de acabado, empaquetado y envío son de 31,05 *um* por fregadero. Los fregaderos se venden a los precios de 945 *um*/unidad los de polietileno, y 1.215 *um*/unidad los de fibra de vidrio.

Deseamos establecer el plan de producción de INDRAX para los próximos tres meses.

Este problema, cuyo enunciado está inspirado en uno de A.C. Hax et al. (1.977), permite la introducción del empleo de la programación matemática en planificación de la producción; lo limitado del número de productos, máquinas e intervalos de tiempo repercute en dimensiones reducidas del modelo y facilita la interpretación.

Vamos a proceder al planteo de un modelo lineal adaptado al enunciado anterior por pasos:

a) *Selección del horizonte temporal*

En la situación particular descrita, el horizonte cubre tres meses y se divide en tres intervalos de un mes cada uno.

b) *Selección de las variables de decisión y de los parámetros*

Podemos determinar qué variables de decisión son necesarias definiendo exactamente qué información necesita el responsable de la planta para programar la producción, lo que en esencia consiste en el número de fregaderos de cada tipo a producir cada mes en cada máquina y, subsidiariamente, el número de fregaderos de cada tipo que debe almacenar al final de cada mes. Como consecuencia tenemos las siguientes variables de decisión:

AP_t = Número de fregaderos de polietileno que deben producirse en las máquinas ABNER durante el mes t.

BP_t = Número de fregaderos de polietileno que deben producirse en las máquinas

BROWN durante el mes *t*.

AV_t = Número de fregaderos de fibra de vidrio que deben producirse en las máquinas ABNER durante el mes *t*.

BV_t = Número de fregaderos de fibra de vidrio que deben producirse en las máquinas BROWN durante el mes *t*.

IP_t = Número de fregaderos de polietileno que se almacenan al final del mes *t*.

IV_t = Número de fregaderos de fibra de vidrio que se almacenan al final del mes *t*.

(el índice *t* tomará tres valores, por ejemplo 1, 2 y 3)

En este caso hay seis variables para cada intervalo de tiempo y, puesto que estamos considerando tres meses, tendremos un total de dieciocho variables de decisión. Sin embargo, es evidente que no tiene sentido almacenar fregaderos al final del mes de marzo en el contexto del problema, puesto que entonces ya deben haberse servido todos los pedidos. Por tanto puede considerarse que los stocks a final de marzo son nulos, y quedan sólo dieciséis variables de decisión. Hemos adoptado para designar estas variables una notación bastante intuitiva, huyendo de subíndices, a fin de poder emplearla sin modificaciones en el paquete de programación lineal que emplearemos para la resolución.

Los parámetros del problema están representados por los requerimientos de la demanda, las disponibilidades de las máquinas, las tasas de producción de las mismas, y los datos de coste y de precio. Se considera un conocimiento determinista sobre los valores de todos estos parámetros.

c) *Definición de las restricciones*

Hay dos tipos de restricciones en este problema: las que presentan las limitaciones de las capacidades de producción y las inducidas por la demanda a satisfacer cada mes. Suponemos, desde luego, que lo fabricado en un mes puede entregarse en el mismo, es decir, que todas las operaciones productivas, de expedición, de distribución y otras que siguen a las operaciones en las prensas tienen una duración poco apreciable.

Desarrollemos las restricciones para el mes de enero; las restricciones relativas a la carga de producción pueden expresarse en términos de las horas de producción en cada tipo de máquina.

Para las máquinas Abner en enero tenemos:

$$0{,}15 \cdot AP\_1 + 0{,}12 \cdot AV\_1 \leq 900$$

mientras que para las máquinas Brown tenemos:

$$0{,}16 \cdot BP\_1 + 0{,}14 \cdot BV\_1 \leq 1.400$$

Las restricciones de producción para los meses siguientes difieren únicamente en el número de horas disponibles, es decir en la cifra que figura en el segundo miembro:

Febrero:

$$0{,}15 \cdot AP\_2 + 0{,}12 \cdot AV\_2 \leq 200$$

$$0{,}16 \cdot BP\_2 + 0{,}14 \cdot BV\_2 \leq 300$$

Marzo:

$$0{,}15 \cdot AP\_3 + 0{,}12 \cdot AV\_3 \leq 900$$

$$0{,}16 \cdot BP\_3 + 0{,}14 \cdot BV\_3 \leq 500$$

Consideremos a continuación las restricciones de la demanda para enero. Para cada tipo de fregadero debemos satisfacer los requerimientos de la demanda y pasar cualquier exceso de producción al stock; por tanto, la restricción para los fregaderos de polietileno en enero es entonces:

$$AP\_1 + BP\_1 - IP\_1 = 5.000$$

mientras que para los fregaderos de fibra de vidrio es:

$$AV\_1 + BV\_1 - IV\_1 = 1.000$$

En febrero, sin embargo, se puede disponer de los fregaderos almacenados durante el mes de enero para satisfacer la demanda. Por ello, la restricción de demanda para los fregaderos de polietileno en febrero es:

$$IP\_1 + AP\_2 + BP\_2 - IP\_2 = 6.000$$

y para los de fibra de vidrio:

$$IV\_1 + AV\_2 + BV\_2 - IV\_2 = 4.000$$

Es decir, suponemos que la cantidad mantenida en stock al final del intervalo *t*-1, más

la cantidad producida durante el período t, están disponibles para su utilización en cualquier momento durante el t-ésimo intervalo (por lo menos a final de mes, que es cuando debe procederse a la entrega); adicionalmente supondremos que el coste de mantenimiento del stock durante el t-ésimo intervalo se basa en el nivel final del stock en dicho intervalo.

En marzo no vamos a almacenar fregaderos a final de mes, por lo que la restricción de demanda para los fregaderos de polietileno en marzo es:

$$IP\_2 + AP\_3 + BP\_3 = 4.000$$

mientras que para los de fibra de vidrio es:

$$IV\_2 + AV\_3 + BV\_3 = 6.000$$

Finalmente debemos añadir restricciones de no negatividad (las cantidades a producir pueden ser nulas, decisión de no producir, pero no negativas) a todas las variables de decisión:

$$AP\_t \geq 0 \quad ; \quad AV\_t \geq 0 \quad ; \quad BP\_t \geq 0 \quad ; \quad BV\_t \geq 0 \quad ; \quad t = 1,\ 2,\ 3$$

$$IP\_t \geq 0 \quad ; \quad IV\_t \geq 0 \quad ; \qquad t = 1,\ 2$$

Al considerar que los stocks a final de mes son no negativos, estamos implícitamente exigiendo que la demanda quede atendida por completo cada mes, no hay rupturas ni se difieren las entregas.

d) *Selección de la función económica*

Los ingresos totales que se pueden obtener en este caso son fijos, puesto que estamos satisfaciendo todos los requerimientos de la demanda; por ello la maximización del beneficio es equivalente a la minimización del total de costes. De todos los costes directos el correspondiente al coste de materiales es fijo, ya que conocemos la cantidad total de cada producto dentro del horizonte, así como la de los otros costes (acabado, empaquetado y envío), también función del número de unidades producidas. Como consecuencia, una función objetivo o económica adecuada es la minimización del coste variable constituido por la suma de costes de producción variables más costes de mantenimiento de inventarios.

Puesto que cada tipo de fregadero tiene una tasa de producción diferente en cada tipo

de máquina, el coste de producción de un fregadero en un tipo de máquina particular es diferente del coste en el otro, incluso cuando el coste variable por hora sea constante para cada pareja tipo de fregadero/tipo de máquina. El coste de producción variable unitario para los fregaderos de fibra de vidrio fabricados en una máquina Brown puede determinarse multiplicando la tasa de producción (en horas/fregadero) por el coste variable de producción (en *um***/hora) resultando:**

$$0{,}14 \times 675 = 94{,}50 \ \text{Ptas / fregadero}$$

De forma análoga se pueden determinar los restantes costes de producción de cada fregadero en cada tipo de máquina, con lo que resulta:

	Abner	Brown
Polietileno	101,25	108,00
Fibra de vidrio	81,00	94,50

Dado que el coste de mantenimiento de stock es 13,50 *um* **por fregadero y mes, tenemos la siguiente función objetivo para la minimización de los costes:**

$$\min z = \sum_{t=1}^{3} (101{,}25 \cdot AP\_t + 108 \cdot BP\_t + 81 \cdot AV\_t + 94{,}50 \cdot BV\_t + 13{,}50 \cdot IP\_t + 13{,}50 \cdot IV\_t)$$

teniendo en cuenta que $IP\_3 = IV\_3 = 0$

La formulación de este modelo se resume en la *figura 3.3.3.1***; se trata de un modelo multiperíodo, puesto que el horizonte se ha dividido en varios intervalos. Observamos que las restricciones de un intervalo se relacionan con las del siguiente únicamente a través de las variables de stock.**

El modelo resultante es un programa lineal, puesto que tanto la función objetivo como las restricciones que materializan las relaciones entre las variables de decisión y los parámetros son ecuaciones o inecuaciones lineales. Este resultado no es sorprendente ya que las restricciones se limitan a formalizar las relaciones de las hipótesis de comportamiento del sistema, y si repasamos la manera en que hemos formulado las restricciones (y la función económica) resultará evidente que implícitamente habíamos admitido que el consumo de recursos en un proceso productivo es una función de la tecnología empleada que satisface las hipótesis de proporcionalidad y aditividad.

Nombre de la RESTRICCIÓN	Producción de ENERO				Inventario fin ENERO		Producción de FEBRERO				Inventario fin FEBRERO		Producción de MARZO				SIGNO	LÍMITE o 2º MIEMBRO
	AP-1	BP-1	AV-1	BV-1	IP-1	IV-1	AP-2	BP-2	AV-2	BV-2	IP-2	IV-2	AP-3	BP-3	AV-3	BV-3		
COSTE	101,25	108	81	94,5	13,5	13,5	101,25	108	81	94,5	13,5	13,5	101,25	108	81	94,5	=	z (mín)
Capacidad M.ABNER en ENE.	0,15		0,12														≤	900
Capacidad M.BROWN en ENE.		0,16		0,14													≤	1400
Capacidad M.ABNER en FEB.							0,15		0,12								≤	200
Capacidad M.BROWN en FEB.								0,16		0,14							≤	300
Capacidad M.ABNER en MAR.													0,15		0,12		≤	900
Capacidad M.BROWN en MAR.														0,16		0,14	≤	500
Demanda P en ENE.	1	1			-1												=	5000
Demanda V en ENE.			1	1		-1											=	1000
Demanda P en FEB.					1		1	1			-1						=	6000
Demanda V en FEB.						1			1	1		-1					=	4000
Demanda P en MAR.											1		1	1			=	4000
Demanda V en MAR.												-1			1	1	=	6000

Fig. 3.3.3.1

Presentamos a continuación, en la *figura 3.3.3.2*, **los resultados obtenidos resolviendo el programa lineal correspondiente al modelo de la** *figura 3.3.3.1* **mediante un paquete estándar incluido en un sistema de soporte de decisiones cuantitativas, operativo interactivamente en un microordenador.**

Las variables HO01, HO02, HO03, HO04, HO05 y HO06 son las variables de holgura correspondientes a las restricciones de limitación de los tiempos de las máquinas, y sus valores son los sobrantes de capacidad, medidos en horas. Las variables AR07, AR08, AR09, AR10, AR11 y AR12 son las artificiales, todas las cuales han sido eliminadas en la solución hallada, como cabía esperar, y adoptan el valor cero.

Resultados del programa fregaderos							
Variables		Solución	Coste de oportunidad	Variables		Solución	Coste de oportunidad
Nº	Nombre			Nº	Nombre		
1	*AP_1*	3.333,3337	0,0000	15	*AV_3*	6.000,0000	0,0000
2	*BP_1*	5.791,6660	0,0000	16	*BV_3*	0,0000	8,1000
3	*AV_1*	3.333,3333	0,0000	17	*H001*	0,0000	45,0000
4	*BV_1*	0,0000	8,1000	18	*H002*	473,3333	0,0000
5	*IP_1*	4.125,0000	0,0000	19	*H003*	0,0000	157,5000
6	*IV_1*	2.333,3333	0,0000	20	*H004*	0,0000	84,3750
7	*AP_2*	0,0000	3,3750	21	*H005*	0,0000	45,0000
8	*BP_2*	1.875,0000	0,0000	22	*H006*	52,0000	0,0000
9	*AV_2*	1.666,6667	0,0000	23	*AR07*	0,0000	-108,0000
10	*BV_2*	0,0000	6,4125	24	*AR08*	0,0000	- 86,4000
11	*IP_2*	0,0000	27,0000	25	*AR09*	0,0000	-121,5000
12	*IV_2*	0,0000	27,0000	26	*AR10*	0,0000	- 99,9000
13	*AP_3*	1.200,0002	0,0000	27	*AR11*	0,0000	-108,0000
14	*BP_3*	2.799,9998	0,0000	28	*AR12*	0,0000	- 86,4000
Valor mínimo de z = 2.567.588				Nº iteraciones = 10			

Fig. 3.3.3.2

El plan de producción resultante es (redondeando los resultados):

Mes		Máquinas Abner	Máquinas Brown
Enero	Número de fregaderos de polietileno	3.333	5792
	Número de fregaderos de fibra de vidrio	3.333	0
	Horas de capacidad no utilizada	0	473
Febrero	Número de fregaderos de polietileno	0	1.875
	Número de fregaderos de fibra de vidrio	1.667	0
	Horas de capacidad no utilizada	0	0
Marzo	Número de fregaderos de polietileno	1.200	2.800
	Número de fregaderos de fibra de vidrio	6.000	0
	Horas de capacidad no utilizada	0	52

Se ve que las máquinas Abner trabajan durante los tres meses a pleno rendimiento mientras que las Brown sólo lo hacen durante el mes de febrero, quedando un remanente de capacidad no utilizada en enero y marzo.

El nivel de inventarios resultante al final de cada mes para los dos tipos de producto es:

	Enero	Febrero	Marzo
Stock de fregaderos de polietileno	4.125	0	0
Stock de fregaderos de fibra de vidrio	2.333	0	0

La solución propuesta es la de coste mínimo (costes variables de producción más costes de mantenimiento de stock), con un valor de 2.567.588 *um*

Teniendo en cuenta que los costes de las materias primas para los fregaderos de polietileno son de 418,5 *um***/unidad y para los de fibra de vidrio de 526,5** *um***/unidad, el coste total de las materias primas:**

Coste de las materias primas para los fregaderos de polietileno:	**418,5 x 15.000 = 6.277.500**
Coste de las materias primas para los fregaderos de fibra:	**526,5 x 11.000 = 5.791.500**
Coste total de las materias primas:	**12.069.000**

Los costes de acabado, empaquetado y envío son de 31,50 *um***/unidad, por lo que para los 26.000 fregaderos producidos representa un coste de:**

26.000 x 31,05 = 807.300 *um*

Por lo tanto los costes totales son:

Costes variables de producción y almacenaje:	**2.567.588** *um*
Coste total de las materias primas:	**12.069.000** *um*
Coste de acabado, etc.:	**807.300** *um*
Coste total:	**15.443.888** *um*

Los precios de venta son de 945 *um* **por fregadero en los de tipo polietileno, y de 1.215** *um***/fregadero en los de fibra de vidrio; por lo tanto,los ingresos previstos son:**

Ingresos por fregaderos de polietileno:	**945 x 15.000 = 13.175.000** *um*
Ingresos por fregaderos de fibra de vidrio:	**1215 x 11.000 = 13.365.000** *um*
Ingresos totales:	**26.540.000** *um*

Como consecuencia, el rendimiento bruto total que percibirá la empresa según el plan de producción propuesto para satisfacer la demanda es de:

Ingresos totales:	**26.540.000** *um*
Coste total:	**15.443.888** *um*
Rendimiento bruto:	**11.096.112** *um*

e) *Análisis de sensibilidad de la solución obtenida*

Al presentar los resultados obtenidos con el algoritmo símplex para el problema propuesto, el paquete estándar utilizado nos proporciona también unos valores para el análisis de la sensibilidad de la solución, es decir, la posibilidad de analizar qué impacto producen sobre la solución obtenida los cambios en los parámetros del modelo.

En nuestro problema podemos desglosar este análisis en dos partes, dado que el modelo que estudiamos tiene dos conjuntos de parámetros netamente diferenciados: los parámetros de coste que intervienen en la función objetivo y los parámetros que definen las condiciones de funcionamiento (productividad y demanda a satisfacer).

La *figura 3.3.3.3* **proporciona los valores para el análisis de sensibilidad de los parámetros de coste, es decir, de los coeficientes de la función económica. Los coeficientes numerados del 1 al 16 corresponden a las variables reales AP_1, BP_1, AV_1, BV_1, IP_1, IV_1, etc. en el orden en que figuran en la** *figura 3.3.3.2* **(que corresponde al de introducción de los datos del símplex). Para cada coeficiente c_j la tabla proporciona un intervalo:**

$$\min c_j \leq c_j \leq \max c_j$$

dentro del cual se mantiene la solución obtenida, es decir, cambia el valor óptimo de la función objetivo, puesto que cambiamos uno de sus coeficientes, pero no las variables que definen la solución (las variables que están en la base), ni su valor. La solución se modifica cuando el coste de alguna de las variables se hace menor que su límite inferior min c_j o mayor que su límite superior max c_j.

Análisis de sensibilidad para los coeficientes de la función económica							
c_j	min. c_j	Original	max. c_j	c_j	min. c_j	Original	max. c_j
c_1	93,2344	101,2500	104,6250	c_9	$-\infty$	81,0000	83,7000
c_2	101,2500	108,0000	118,1250	c_{10}	88,0875	94,5000	$+\infty$
c_3	78,3000	81,0000	87,4125	c_{11}	-13,5000	13,5000	$+\infty$
c_4	86,4000	94,5000	$+\infty$	c_{12}	-13,5000	13,5000	$+\infty$
c_5	6,1714	13,5000	16,8750	c_{13}	91,1250	101,2500	108,0000
c_6	10,8000	13,5000	19,9125	c_{14}	101,2500	108,0000	118,1250
c_7	97,8750	101,2500	$+\infty$	c_{15}	$-\infty$	81,0000	89,1000
c_8	$+\infty$	108,0000	115,3286	c_{16}	86,4000	94,5000	$+\infty$

Fig. 3.3.3.3

Supongamos, por ejemplo, que durante el mes de enero se modifican los costes variables de producción de los fregaderos de polietileno en las máquinas Abner, es decir, el coeficiente c_1. Sólo se producirán cambios en la solución si c_1 se hace menor que 93,2344 o mayor que 104,6250. La *figura 3.3.3.4* **presenta la nueva solución en el caso de que $c_1 = 92,00$.**

Como vemos en la *figura 3.3.3.4***, en las nuevas condiciones de coste de producción se incrementa el número de fregaderos de polietileno fabricados en las máquinas ABNER durante el mes de Enero, que pasa de 1.867 a 3.867, a costa de disminuir la producción de fregaderos de fibra de vidrio en dichas máquinas, que pasa de 3.500 unidades a 1.000. Se incrementa ligeramente el número de fregaderos de fibra fabricados en las máquinas Brown, pasando de 7.633 unidades a 7.820 y, en consecuencia, se incrementa la utilización de dichas máquinas (las horas de producción potencial no utilizadas pasan de 279 a 249). Los inventarios a final de mes pasan, en el caso de los fregaderos de polietileno, de 5.500 unidades a 7.687, mientras que en el de los de fibra de vidrio disminuyen de 2.500 a 0. Consecuentemente en febrero el número de fregaderos de polietileno fabricados en las máquinas Brown se reduce de 2.500 unidades a 312, con lo que dichas máquinas disponen de casi toda su capacidad para fabricar 2.500 fregaderos de fibra de vidrio, cuando en la solución anterior no fabricaban ninguno. El plan de producción no se modifica en marzo. El nuevo coste es de**

2.568.665 *um*

Resultados del programa fregaderos-2							
Variables				Variables			
Nº	Nombre	Solución	Coste de oportunidad	Nº	Nombre	Solución	Coste de oportunidad
1	*AP_1*	5.047,6191	0,0000	15	*AV_3*	6.000,0000	0,0000
2	*BP_1*	5.952,3804	0,0000	16	*BV_3*	0,0000	8,1000
3	*AV_1*	1.190,4761	0,0000	17	*H001*	0,0000	106,6667
4	*BV_1*	0,0000	0,7000	18	*H002*	447,6190	0,0000
5	*IP_1*	6.000,0000	0,0000	19	*H003*	0,0000	291,1667
6	*IV_1*	190,4761	0,0000	20	*H004*	0,0000	91,4286
7	*AP_2*	0,0000	12,6250	21	*H005*	0,0000	45,0000
8	*BP_2*	0,0000	1,1286	22	*H006*	52,0000	0,0000
9	*AV_2*	1.666,6667	0,0000	23	*AR07*	0,0000	-108,0000
10	*BV_2*	2.142,8572	0,0000	24	*AR08*	0,0000	- 93,8000
11	*IP_2*	0,0000	27,0000	25	*AR09*	0,0000	-121,5000
12	*IV_2*	0,0000	34,4000	26	*AR10*	0,0000	-107,3000
13	*AP_3*	1.200,0000	0,0000	27	*AR11*	0,0000	-108,0000
14	*BP_3*	2.799,9998	0,0000	28	*AR12*	0,0000	- 86,4000
Valor mínimo de z = 2.534.638				Nº iteraciones = 10			

Fig. 3.3.3.4

La *figura 3.3.3.5* **presenta la solución en el caso** c_1 **= 105,00. El análisis e interpretación de los resultados es análogo al caso anterior.**

La *figura 3.3.3.6* **corresponde al caso en que** c_5 **= 17,5, es decir, se han incrementado los costes de mantenimiento del stock de fregaderos de polietileno durante el mes de enero (los demás costes siguen adoptando los valores iniciales). Casualmente esta solución coincide con la anterior excepto en el valor de la función económica.**

La *figura 3.3.3.7*, **que es otra de las que suministra el paquete estándar para el análisis de sensibilidad, proporciona los valores para analizar los cambios en los parámetros de capacidad de producción o de demanda. Los seis primeros corresponden a las restricciones de productividad (horas de disponibilidad de las máquinas cada uno de los meses) mientras que los seis restantes corresponden a las restricciones de demanda.**

Resultados del programa fregaderos-3							
Variables				Variables			
Nº	Nombre	Solución	Coste de oportunidad	Nº	Nombre	Solución	Coste de oportunidad
1	AP_1	2.000,0000	0,0000	15	AV_3	6.000,0000	0,0000
2	BP_1	5.791,6665	0,0000	16	BV_3	0,0000	8,1000
3	AV_1	5.000,0000	0,0000	17	H001	0,0000	20,0000
4	BV_1	0,0000	11,1000	18	H002	473,3334	0,0000
5	IP_1	2.791,6667	0,0000	19	H003	0,0000	135,0000
6	IV_1	4.000,0000	0,0000	20	H004	0,0000	84,3750
7	AP_2	1.333,3333	0,0000	21	H005	0,0000	45,0000
8	BP_2	1.875,0000	0,0000	22	H006	52,0000	0,0000
9	AV_2	0,0000	0,3000	23	AR07	0,0000	-108,0000
10	BV_2	0,0000	9,4425	24	AR08	0,0000	- 83,4000
11	IP_2	0,0000	27,0000	25	AR09	0,0000	-121,5000
12	IV_2	0,0000	24,4000	26	AR10	0,0000	- 96,9000
13	AP_3	1.200,0000	0,0000	27	AR11	0,0000	-108,0000
14	BP_3	2.799,9998	0,0000	28	AR12	0,0000	- 86,4000
Valor mínimo de z = 2.579.588				Nº iteraciones = 11			

Fig. 3.3.3.5

Resultados del programa fregaderos-4							
Variables				Variables			
Nº	Nombre	Solución	Coste de oportunidad	Nº	Nombre	Solución	Coste de oportunidad
1	*AP_1*	**2.000,0000**	**0,0000**	15	*AV_3*	**6.000,0000**	**0,0000**
2	*BP_1*	**5.791,6665**	**0,0000**	16	*BV_3*	**0,0000**	**8,1000**
3	*AV_1*	**5.000,0000**	**0,0000**	17	*H001*	**0,0000**	**45,0000**
4	*BV_1*	**0,0000**	**8,1000**	18	*H002*	**473,3334**	**0,0000**
5	*IP_1*	**2.791,6667**	**0,0000**	19	*H003*	**0,0000**	**161,6666**
6	*IV_1*	**4.000,0000**	**0,0000**	20	*H004*	**0,0000**	**109,3750**
7	*AP_2*	**1.333,3333**	**0,0000**	21	*H005*	**0,0000**	**45,0000**
8	*BP_2*	**1.875,0000**	**0,0000**	22	*H006*	**52,0000**	**0,0000**
9	*AV_2*	**0,0000**	**0,5000**	23	*AR07*	**0,0000**	**-108,0000**
10	*BV_2*	**0,0000**	**9,9125**	24	*AR08*	**0,0000**	**- 86,4000**
11	*IP_2*	**0,0000**	**31,0000**	25	*AR09*	**0,0000**	**-125,5000**
12	*IV_2*	**0,0000**	**27,0000**	26	*AR10*	**0,0000**	**- 99,9000**
13	*AP_3*	**1.200,0000**	**0,0000**	27	*AR11*	**0,0000**	**-108,0000**
14	*BP_3*	**2.799,9998**	**0,0000**	28	*AR12*	**0,0000**	**- 86,4000**
Valor mínimo de z = 2.583.254				Nº Iteraciones = 11			

Fig. 3.3.3.6

Análisis de sensibilidad para el segundo miembro							
b_i	min. b_i	Original	max. b_i	b_i	min. b_i	Original	max. b_i
b_1	**456,2500**	**900,0000**	**1.768,7500**	b_7	**- 791,6660**	**5.000,0000**	**7.958,3300**
b_2	**926,6667**	**1.400,0000**	**+ ∞**	b_8	**-**	**1.000,0000**	**4.697,9100**
b_3	**0,0000**	**200,0000**	**480,0000**	b_9	**2.333,3333**	**6.000,0000**	**8.958,3300**
b_4	**0,0000**	**300,0000**	**960,0000**	b_{10}		**4.000,0000**	**7.697,9100**
b_5	**851,2499**	**900,0000**	**1.320,0000**	b_{11}	**1.875,0000**	**4.000,0000**	**4.325,0000**
b_6	**447,9999**	**500,0000**	**+ ∞**	b_{12}		**6.000,0000**	**6.406,2500**
					1.666,6667		
					1.200,0000		
					2.500,0000		

Fig. 3.3.3.7

Como en el caso anterior los intervalos corresponden a los conjuntos de valores para los que la solución es estable (en este caso cambian los valores de las variables pero no el conjunto de variables que definen la solución, las variables que definen la base óptima). Para valores situados fuera de dichos intervalos se modificaría la base.

Por ejemplo, en el caso de que $b_2 = 900$, es decir, si el número de horas disponibles de las máquinas Brown en el mes de enero se redujese de 1.400 a 900, nos encontraríamos con que el problema no tendría solución posible, o sea, que en dichas condiciones la empresa no podría satisfacer totalmente el pedido de fregaderos, lo que nos da una idea del impacto que una avería, por ejemplo, podría tener para el funcionamiento del sistema.

De forma análoga, si $b_{10} = 8.000$, es decir, la demanda de fregaderos de fibra de vidrio para el mes de febrero pasase de 4.000 a 8.000 unidades, el problema tampoco tendría solución posible, lo que nos permite indagar qué compromisos de satisfacción de demanda podemos adquirir con los recursos disponibles.

3.3.4 *Problema de planificación multiperíodo con equipos alternativos (Caso CHRISTMAS STAR)*

La compañía CHRISTMAS STAR tiene unas instalaciones en Meadow-on-Thames, de las cuales una de ellas es una planta que embotella cerveza a partir del mosto producido en la misma factoría o en otros establecimientos de la misma compañía instalados en lugares cercanos y transportado mediante camiones cisterna. CHRISTMAS STAR fabrica en Meadow-on-Thames dos productos básicos: cerveza clara (Melchior) y cerveza oscura (Balthasar). Las dos variedades se embotellan en recipientes de formas diferentes. En el establecimiento de Meadow-on-Thames el cuello de botella de la producción es el envasado, pues nunca hay problemas con el aprovisionamiento del líquido o de los recipientes, ni con la distribución.

Los medios fundamentales para la operación de envasado consisten en dos trenes de envasado de las marcas Albert y Denis respectivamente. Cualquiera de los dos tipos de cerveza, Melchior y Balthasar, puede envasarse en cualquiera de los dos trenes. La producción de botellas de Balthasar es más lenta, en cualquier caso, debido a la forma más delicada de la botella. Las tasas de producción por día son las siguientes:

Tren de envasado	Melchior	Balthasar
Albert	400 cajas/día	350 cajas/día
Denis	500 cajas/día	420 cajas/día

Hay que tener en cuenta que en CHRISTMAS STAR se ha medido tradicionalmente la producción en cajas por día. Se habría podido utilizar como unidad los litros o las botellas por día, pero sería ir contra la costumbre. El rendimiento marginal de la planta de envasado de Meadow-on-Thames (que constituye una unidad económica), de acuerdo con las producciones anteriores, es, medido en unidades monetarias por día (*um*/día):

Tren de envasado	Melchior	Balthasar
Albert	525 *um*/día	580 *um*/día
Denis	546 *um*/día	590 *um*/día

La planificación de cada planta de envasado de CHRISTMAS STAR suele hacerse mensualmente (con tiempo suficiente para poder programar los aprovisionamientos y las fabricaciones de mosto). Sin embargo, la mayoría de los empleados hacen vacaciones los próximos dos meses, por lo que se piensa que debe combinarse la planificación de la producción y de las vacaciones de los próximos dos meses conjuntamente. Cada mes los trenes están sujetos a un programa de mantenimiento preventivo, por lo que los días disponibles para producción, en Meadow-on-Thames, son:

Tren de envasado	Julio	Agosto
Albert	26 días	26 días
Denis	28 días	27 días

La planificación se complica aún más ya que en los dos meses de verano el tiempo total de producción se limita a 102 días de máquina (de los dos trenes en total) debido a las vacaciones del personal. La estimación de la demanda máxima asignada a la planta de envasado de Meadow-on-Thames para los dos meses es:

Tren de envasado	Julio	Agosto
Melchior	12.000 cajas	14.000 cajas
Balthasar	8.000 cajas	9.000 cajas

Ambos tipos de cerveza pueden almacenarse para futuras entregas. El espacio disponible en el almacén de Meadow-on-Thames tiene una capacidad de 200 cajas. Los costes de

mantenimiento de stock en *um* por caja de cerveza producida en julio y entregada en agosto, son:

Producto	Coste de inventario
Melchior	0,10 *um*/caja,mes
Balthasar	0,12 *um*/cajas,mes

A final de junio el stock de cada producto era prácticamente nulo en Meadow-on-Thames. No es posible, ni pertinente, tener nada almacenado a final de agosto ya que se necesita el almacén para otros productos.

La dirección de CHRISTMAS STAR desea establecer un plan de producción de los dos próximos meses, para la planta de Meadow-on-Thames. Además la dirección de CHRISTMAS STAR confía especialmente en utilizar los resultados del análisis de los condicionantes del plan para contestar las siguientes cuestiones:

(a) Si es conveniente intentar persuadir a algunos empleados a tomar sus vacaciones en septiembre.

(b) Si se debería alquilar capacidad adicional de almacén, lo que elevaría los costes de mantenimiento de stock en 0,2 *um* por caja y, si se hace así, cómo variaría la solución óptima.

(c) Otra planta de la misma empresa ha solicitado que se le embotellen 200 cajas de una cerveza especial (rubia tipo Jasper), para ser entregada a finales de agosto. Esta cerveza sólo puede ser embotellada en el tren DENIS, que puede hacerlo a una tasa de 400 cajas/día, pagando el cliente 1,2 *um*/caja. En cualquier caso no podría comenzarse la producción antes del 1 de agosto. La cuestión es decidir si se acepta el encargo o no.

Vamos a establecer un modelo lineal, aislando la planta de embotellado de Meadow-on-Thames del resto de instalaciones de CHRISTMAS STAR, lo que posiblemente no sea totalmente aceptable.

Selección de variables de decisión y parámetros

Como de costumbre podemos determinar las variables de decisión definiendo exactamente qué información necesita el encargado de la fabricación para establecer su programa de operaciones. Esencialmente debe conocer cuántos días de cada mes debe destinar a cada producto en cada uno de los trenes, y las cantidades de cada producto a situar en el almacén a final de julio. Por tanto, tenemos las siguientes variables de decisión:

AMJ, AMA: días de envasado de cerveza Melchior en el tren ALBERT, en julio y agosto respectivamente.

DMJ, DMA: días de envasado de cerveza Melchior en el tren DENIS, en julio y agosto respectivamente.

ABJ, ABA: días de envasado de cerveza Balthasar en el tren ALBERT, en julio y agosto respectivamente.

DBJ, DBA: días de envasado de cerveza Balthasar en el tren DENIS, en julio y agosto respectivamente.

INVM, INVB: cantidades en cajas en stock a final de julio de cerveza Melchior y Balthasar respectivamente.

En general, dejando a un lado las variables de stock, hay cuatro variables de producción para cada mes, es decir, en cada intervalo las variables de producción son:

número de productos x número de recursos de producción

siendo este planteamiento típico en los programas lineales multiperíodo con recursos alternativos. En cuanto a las variables de inventario, su número, será para cada intervalo,:

número de productos x número de almacenamientos

salvo en aquellos intervalos en que por razones externas se decida que no debe quedar stock (en todos los casos vistos hemos supuesto nulos los stocks al final del último intervalo; si no lo hubiésemos hecho habríamos llegado a dicho resultado en la resolución del programa lineal).

Los parámetros del problema están representados por los requerimientos de demanda, las tasas de producción por día de los dos trenes, los días útiles de cada mes, la disponibilidad máxima de días laborables en el horizonte de planificación y la información de costes y rendimientos marginales.

Definición de restricciones

Existen cuatro tipos de restricciones en este problema:

- Las restricciones de capacidad de las máquinas, que tienen que escribirse en términos de días de producción en cada tren, para lo cual ya hemos elegido las variables apropiadas.

Tenemos:

$AMJ + ABJ \leq 26$	(tren ALBERT en julio)
$DMJ + DBJ \leq 28$	(tren DENIS en julio)
$AMA + ABA \leq 26$	(tren ALBERT en agosto)
$DMA + DBA \leq 27$	(tren DENIS en agosto)

- Las restricciones de atención a la demanda. En el mes de julio la producción de cada producto, reducida en la cantidad destinada a stock, no debe superar la demanda. En agosto la producción, más lo almacenado en julio, debe hacer lo propio:

$400 \cdot AMJ + 500 \cdot DMJ - INVM \leq 12.000$	(Melchior en julio)
$350 \cdot ABJ + 420 \cdot DBJ - INVB \leq 8.000$	(Balthasar en julio)
$400 \cdot AMA + 500 \cdot DMA + INVM \leq 14.000$	(Melchior en agosto)
$350 \cdot ABA + 420 \cdot DBA + INVB \leq 9.000$	(Balthasar en agosto)

Estas restricciones podrían haberse formulado como igualdades si pretendiésemos atender todos los requerimientos de la demanda. En todo caso, dado que la función económica nos llevará a atenderla (si los productos nos producen cierto margen, lo que es el caso), sólo si la capacidad de producción disponible no es suficiente, estas restricciones se satisfarán con el signo menor en la solución óptima.

- Existe una limitación de capacidad en el almacén que lleva a:

$INVM + INVB \leq 200$	(Almacenaje en julio)

- Existe una limitación en el total de días debido a las vacaciones:

$$AMJ + DMJ + ABJ + DBJ + AMA + DMA + ABA + DBA \leq 102$$

(Total días producción)

Además todas las variables utilizadas deben ser no negativas.

Selección de la función económica

Los datos disponibles son rentabilidades marginales (ingresos menos costes directos de producción) y costes de inventario. La función objetivo o económica se formará como la suma de las rentabilidades menos los costes de inventario. Los coeficientes de las variables (al estar éstas expresadas en días de producción, excepto las de stock que están en cajas) deberán ser márgenes por día de producción y costes por caja en inventario:

$$\max z = 525 \cdot AMJ + 580 \cdot ABJ + 546 \cdot DMJ + 590 \cdot DBJ - 0{,}10 \cdot INVM$$
$$- 0{,}12 \cdot INVB + 525 \cdot ABA + 546 \cdot DMA + 590 \cdot DBA$$

La formulación del problema se sumariza en la *figura 3.3.4.1*. Se trata de un modelo multiperíodo, en donde similarmente a lo visto hasta ahora las restricciones del primer intervalo (julio) se relacionan con las del segundo (agosto) solamente mediante las variables de inventario. Este tipo de estructura es común, por tanto, a los problemas multiperíodo. También es corriente en estos modelos que la matriz de coeficientes tenga un gran número de ceros, y por ello es conveniente utilizar un generador de matrices que explote este hecho.

NOMBRE DE LA RESTRICCIÓN	PRODUCCIÓN JULIO				INVENTARIO		PRODUCCIÓN AGOSTO				SIGNO	LÍMITE o 2º MIEMBRO
	AMJ	DMJ	ABJ	DBJ	INVM	INVB	AMA	DMA	ABA	DBA		
RENDIMIENTO	525	546	580	590	-0,10	-0,12	525	546	580	590	=	z (Máx.)
T. ALBERT - días funcionamiento en Julio	1		1								≤	26
T. DENIS - días funcionamiento en Julio		1		1							≤	28
T. ALBERT - días funcionamiento en Agosto							1		1		≤	26
T. DENIS - días funcionamiento en Agosto								1		1	≤	27
Demanda MELCHIOR en Julio	400	500			-1						≤	12000
Demanda BALTHASAR enJulio			350	420		-1					≤	8000
Demanda MELCHIOR en Agosto					1		400	500			≤	14000
Demanda BALTHASAR en Agosto						1			350	420	≤	9000
Capacidad ALMACÉN					1	1					≤	200
TOTAL días	1	1	1	1			1	1	1	1	≤	102

Fig. 3.3.4.1

Resultados del programa lineal CHRISTMAS STAR

El programa lineal anterior se ha resuelto con un paquete de programación lineal estándar que proporciona resultados que pueden solicitarse en los *menús* interactivos del mismo.

Los resultados del paquete proporcionan la solución óptima del problema original recogida en la *figura 3.3.4.2*.

Número de variable	Variables de decisión	Valor de las variables en el óptimo
1	AMJ	2,5714
2	ABJ	23,4286
3	DMJ	21,9429
6	INVB	200,0000
7	AMA	0,8571
8	ABA	25,1429
9	DMA	27,0000

Fig. 3.3.4.2

El valor de la función económica para esta solución es 56.670,23 *um*. Obsérvese que en la base óptima sólo figuran 7 de las 10 variables de decisión posibles. Como el número de variables en la base debe ser igual al número de restricciones lineales, en este caso exactamente 10, figuran obligatoriamente en ella 3 variables de holgura, lo que significa, en principio, que 3 restricciones no se han saturado en el óptimo. Su naturaleza y valor los proporciona también el paquete (*figura 3.3.4.3*).

Número de la restricción	Nombre de la restricción	Valor de la variable de holgura
2	D-días de julio	6,0571
7	M-demanda agosto	157,1429
10	T-días total	1,0571

Fig.3.3.4.3

El significado de este resultado del programa es el siguiente. En la restricción número 2 que exige que el número total de días de uso del tren Denis en el mes de julio no sobrepase los 28 días, la variable de holgura figura con un valor de 6,0571; por tanto, en julio sólo se utiliza en la solución óptima el tren Denis durante 21,9429 días y está inactivo durante 6,0571 días.

Análogamente ocurre en la restricción número 7. Al ser positiva la variable de holgura indica que en agosto, en que estimábamos la demanda de cerveza Melchior en 14.000 cajas, sólo hemos atendido (redondeando) 13.843 cajas, dejando de suministrar, en la solución óptima, 157 cajas. Por tanto el haber tomado la estimación de la demanda como un tope y no como una meta a alcanzar ha sido fructífero, no haberlo hecho nos habría conducido a un programa lineal infactible, sin soluciones.

Finalmente, la tercera variable de holgura positiva señala que de los 102 días de producción que teníamos en total (considerando las vacaciones) sólo hemos empleado 100,9429 días, ya que 1,0571 días serán, en la solución óptima, de inactividad suplementaria.

Como en la base óptima han entrado tres variables de holgura, han dejado de entrar tres variables de decisión. El siguiente informe regular del paquete nos indica las modificaciones (mínimas) a aportar en los coeficientes de la función económica para que las variables de decisión que han quedado fuera de la base y de la solución óptima pasaran a formar parte de la misma (*fig. 3.3.4.4*).

	Reducción necesaria en el coste
DBJ (cerveza Balthasar producida en el tren Denis en julio)	0,1600
INVM (inventario de cerveza Melchior)	0,1360
DBA (cerveza Balthasar producida en el tren DENIS en agosto)	22,0000

Fig. 3.3.4.4

es decir, para que DBJ entrara en la base sería preciso que su coeficiente en la función económica en lugar de 590 fuese 590,16 o mayor; asimismo en el caso de DBA, en lugar de 590 debería ser 612,0 o mayor. En cuanto a INVM, ya que su coeficiente es negativo, el razonamiento puede hacerse análogamente diciendo que para que figure en la base su coeficiente en lugar de -0,1 debería ser 0,036 o mayor (lo cual dado el significado del coeficiente nos llevaría a pedir una prima por tener las cajas de cerveza Melchior en almacén en lugar de registrar un coste).

El paquete también nos proporciona el coste *sombra* asociado a las restricciones saturadas, es decir, aquéllas que se satisfacen con el signo igual (*fig. 3.3.4.5*).

Número de la restricción	Nombre de la restricción	Coste de oportunidad asociado
1	A-días de julio	88,2000
3	A-días de agosto	525,0000
4	D-días de agosto	546,0000
5	M-demanda julio	1,0920
6	B-demanda julio	1,4051
8	B-demanda agosto	0,1571
9	C-stock	1,1280

Fig. 3.3.4.5

Análisis de sensibilidad

El paquete estándar utilizado nos proporciona información sobre los intervalos dentro de los que podrían moverse los valores de los coeficientes de las variables de decisión en la función económica (uno a la vez) sin que se altere la selección de variables de base que comporta la solución óptima, ni su valor (*fig. 3.3.4.6*), aunque sí obviamente el valor concreto de la función objetivo, si el coeficiente cuyo valor se altera corresponde a una variable de base.

	Intervalo de coeficientes de la función económica		
Variable de decisión	Límite inferior de variación	Valor actual	Límite superior de variación
AMJ	436,8000	525,00	525,1334
ABJ	579,8666	580,00	sin límite
DMJ	545,8333	546,00	656,2500
DBJ	sin límite	590,00	590,1600
INVM	sin límite	-0,10	0,0360
INVB	-0,2560	-0,12	sin límite
AMA	477,4000	525,00	543,3333
ABA	561,6667	580,00	627,6000
DMA	524,0000	546,00	sin límite
DBA	sin límite	590,00	612,0000

Fig. 3.3.4.6

Para clarificar el sentido de este informe, que es uno de los instrumentos para el análisis de la sensibilidad más corriente en las paquetes disponibles, vamos a interpretar algunos datos. Por ejemplo, la variable AMJ contribuye a la función económica en la formulación del problema con 525 *um* por día de producción (de cerveza Melchior en el tren Albert). La variable figura en la base de la solución óptima, y toma en ella el valor positivo 2,5714; el límite inferior 436,8 significa que si la contribución de AMJ disminuye, permaneciendo igual o superior a dicho límite, la base óptima seguiría siendo la misma, en particular AMJ seguiría en dicha base, tomando el valor 2,5714. Si dicha contribución se hiciera inferior a 436,8 debería replantearse el problema, partiendo de la última solución posible hallada, que ya no sería óptima, y en el cálculo una nueva variable de decisión entraría en la base saliendo de ella, en consecuencia, una que figuraba en la misma, muy posiblemente AMJ.

El hecho de que no exista límite superior para ABJ significa que podría modificarse al alza la contribución de ABJ al beneficio en forma indefinida sin que la base óptima y la permanencia de ABJ en ella se modificara (por lo menos lo último parece obvio).

DBJ es una variable que *no* forma parte de la base en la solución óptima y que, por tanto, toma el valor cero en dicho óptimo. Si se modifica su contribución unitaria al objetivo (*um* por día de producción de Balthasar en el tren Denis en julio) en sentido descendente, no cambiará nada y en particular su situación de no perteneciente a la base. Lo mismo ocurriría si su contribución aumentara de 590 a 590,16 *um* por día (recordemos que se ha indicado ya que el coste de esta variable debería reducirse en 0,16 *um* como mínimo para que entrara a formar parte de la base óptima). Si la contribución aumenta por encima de 590,16 *um* la variable pasaría a formar parte de la base óptima, desplazando a otra, y el problema debería replantearse. En forma análoga el paquete utilizado nos proporciona un intervalo de valores para los segundos miembros de las restricciones (*fig. 3.3.4.7*); éste es el último instrumento para ayudar al análisis de sensibilidad del indicado paquete.

Tomemos la primera restricción. En el programa se ha planteado que el número de días de producción disponibles en julio para el tren Albert son 26; el análisis de sensibilidad indica que los días de disponibilidad del tren Albert en julio podrían variar entre 23,4286 y 31,2857 sin que cambiasen las variables que integran la base óptima. Lo que sí cambiarían son los valores de dichas variables en la solución óptima al cambiar los límites de los recursos disponibles.

La restricción 6 (demanda de Balthasar en julio) podría variar entre una demanda negativa (-200 cajas) hasta una positiva de 8462,501 cajas, sin que cambiaran las variables que integran la base óptima (aunque sí los valores de dichas variables). Es posible que el límite inferior negativo no tenga ningún significado real posible y que, por tanto, a todos los efectos, el límite inferior de variación plausible sea cero.

Restricción		Intervalo de coeficientes de la función económica		
núm.	Nombre	Límite inferior de variación	Valor actual	Límite superior de variación
1	A-días julio	23,4286	26	31,2857
2	D-días julio	21,9429	28	sin límite
3	A-días agosto	25,1429	26	26,3929
4	D-días agosto	0,0000	27	27,3143
5	M-demanda julio	1.028,5703	12.000	1.2528,5723
6	B-demanda julio	-200,0000	8.000	8.462,5010
7	M-demanda agosto	13.842,8574	14.000	sin límite
8	B-demanda agosto	8.862,5000	9.000	9.300,0000
9	C-stock	0,0000	200	337,5000
10	T-días total	100,9429	102	sin límite

Fig. 3.3.4.7

Respuesta a las preguntas de la dirección de CHRISTMAS STAR

Ya podemos pasar a contestar a las preguntas que se formula la dirección de CHRISTMAS STAR. La primera se refiere a la conveniencia de persuadir a algunos empleados a desplazar sus vacaciones a septiembre. Para contestar a esta pregunta vamos a utilizar en primer lugar el informe sobre las variables de holgura (*fig. 3.3.4.2*),donde veremos que estamos agotando casi la totalidad de días disponibles, 102, y nos sobra sólo 1,0571, mientras se deja de satisfacer 157 cajas de la demanda de cerveza de Melchior de agosto. Por consiguiente, quien impone límite a la producción no son las vacaciones sino los límites mensuales del número de días, consecuencia del mantenimiento preventivo, y el límite de almacenamiento. Trasladando las vacaciones de algunos empleados no se logrará nada si a la vez no se reestructuran los programas de mantenimiento (permitiendo más horas de producción en agosto) o bien se aumenta la capacidad de almacenaje, lo que es el objeto de la segunda cuestión.

En cuanto al alquiler de capacidad adicional de almacén, podría ser interesante para la utilización de los 1,0571 días inaprovechados. Según el coste de oportunidad cada caja marginal en más de almacenaje (dentro de los límites que marca el conservar la base óptima actua) nos proporciona una contribución de 1,128 *um*. Una posibilidad, que parece interesante, sería utilizar dichos 1,0571 días en el tren Denis en julio (mes en el que no está saturado), fabricando del orden de 157 cajas de cerveza Melchior más (para lo que se necesitan 157/500 = 0,314 días) para atender la demanda que deja de servirse en agosto, si incrementáramos en dicha cantidad las posibilidades de almacenaje. Estas 157 cajas nos aportarían:

$$157 \times (1{,}092 - 0{,}1) = 155{,}744 \ um$$

donde 1,092 = 546/500 *um*/caja es la contribución de una caja de cerveza Melchior fabricada en el tren Denis. El valor hallado, 155,744 *um*, marca el límite de lo que podemos pagar, en este caso, por el alquiler del almacén para las 157 cajas (alquiler a añadir al coste de 0,1 *um*/caja para la cerveza Melchior y de 0,12 *um*/caja para la cerveza Balthasar, y que según lo indicado es del orden de 0,2x157 = 31,4 *um*). De hecho la ganancia obtenida es algo mayor puesto que, como indica la *figura 3.3.4.7* si la capacidad del almacén pasa a ser 357 cajas la base se modifica, y por consiguiente cambia la forma óptima de hacer frente a la demanda. La nueva solución, con la capacidad de almacén de 357 cajas, es la de la *figura 3.3.4.8*.

Número de variable	Variables de decisión	Valor de las variables en el óptimo
1	AMJ	2,5686
2	ABJ	23,4314
3	DMJ	22,2571
5	INVM	156,0000
6	INVB	201,0000
7	AMA	0,8600
8	ABA	25,1400
9	DMA	27,0000

Fig. 3.3.4.8

con un valor de la función económica de 56826,11; por consiguiente, las 157 cajas adicionales de capacidad nos proporcionan:

$$56.826{,}11 - 56.670{,}23 = 155{,}88 \ um$$

ya que gracias a la sabia utilización de las diferencias de tasa de producción de las máquinas hemos logrado producir y vender la totalidad de la demanda de ambos tipos de cerveza, fabricando en julio más cerveza Melchior para almacén, como habíamos supuesto pero sólo 156 cajas adicionales, ya que se fabrica 1 caja más de cerveza Balthasar que también se guarda en el almacén.

Por tanto la respuesta a la segunda cuestión es que interesa encontrar más capacidad de almacenaje, siempre que el precio a pagar sea el adecuado (inferior, en todo caso, a 1,128 *um*/caja-mes, como se deduce de los valores duales). En nuestro caso el coste de alquiler es de 0,2 *um*/caja, y la mejora de resultado obtenida con la ampliación de la capacidad de almacén resulta:

$$155{,}88 - (0{,}2 \times 157) = 124{,}48 \ um$$

La tercera cuestión era si se podría atender una demanda especial de 200 cajas en agosto de envasado de cerveza Jasper. Los resultados del programa indican que no existe ningún remanente de capacidad en agosto. Por otra parte, este pedido ocuparía 1/2 día con un rendimiento bruto (a lo sumo) de 240 *um* inferior a los rendimientos de cualquiera de los productos programados (como podemos comprobar analizando el coste de oportunidad asociado al tren Denis en la *figura 3.3.5.1*: 546/2 = 273 *um*). La conclusión es rechazar el pedido.

3.3.5 *Caso BOWLING PUMPS*

La fábrica de la empresa BOWLING PUMPS produce bienes para satisfacer una demanda fluctuante. Las mejores estimaciones disponibles de la demanda de los próximos doce meses son las recogidas en la *figura 3.3.5.1*, medida en una unidad conveniente.

mes	unidades	mes	unidades	mes	unidades
ENERO	**5.300**	**MAYO**	**4.100**	**SEPTIEMBRE**	**7.300**
FEBRERO	**5.100**	**JUNIO**	**4.800**	**OCTUBRE**	**7.800**
MARZO	**4.400**	**JULIO**	**6.000**	**NOVIEMBRE**	**7.600**
ABRIL	**2.800**	**AGOSTO**	**7.100**	**DICIEMBRE**	**6.400**

Fig. 3.3.5.1

Para ajustarse a estas fluctuaciones la dirección puede utilizar cualquier combinación de las medidas siguientes:

1) Cambiar el nivel de la mano de obra contratando y despidiendo.

2) Cubrir los déficits temporales mediante trabajo en horas extra.

3) Almacenar algunos excedentes actuales para cubrir los déficits futuros (es decir, constituyendo stocks).

Cada una de estas medidas tiene limitaciones. Los cambios de nivel de mano de obra, incrementando o disminuyendo, están limitados a un máximo de 40 trabajadores por mes. Además, estos cambios son caros: cuesta 300 *um* contratar y 420 *um* despedir un trabajador. Por otra parte, la producción en horas extra está limitada: cada trabajador, que produce 20 unidades al mes en horas regulares no producirá más de 6 unidades por mes adicionales utilizando el máximo de horas extra permitidas por la ley. Además los costes de producción en horas extra superan a los costes regulares en 20 *um* por unidad producida. Finalmente el almacenamiento puede convertirse en algo muy caro si se mantienen las unidades terminadas mucho tiempo en stock: cuesta 8 *um* al mes mantener almacenada una unidad. Los datos son sólo las mejores estimaciones disponibles, pero no están libres de imprecisiones: las demandas futuras exactas son difíciles (si no imposibles) de prever, las tasas de producción pueden verse afectadas por averías de máquinas, etc. Consecuentemente, todos los resultados de un análisis matemático deben interpretarse como sugerencias posibles y no como órdenes incuestionables.

En la situación actual la plantilla consta de 290 obreros y no hay stock; la política a largo plazo establece que tampoco debe haber stock al final del próximo mes de diciembre. La política establecida sigue la norma de satisfacer toda la demanda y de no mantener personal en la plantilla que esté subempleado en el horario regular aunque sea un solo mes. Uno de los muchos planes posibles que satisface la demanda prevista es el de la *figura 3.3.5.2*. Los sobrecostes correspondientes a este plan son los detallados en la *figura 3.3.5.3*.

PLAN DE PRODUCCIÓN 1					
mes	demanda	mano de obra	P.normal	P.extra	stock
ENE	5.300	265	5.300	))	))
FEB	5.100	255	5.100	))	))
MAR	4.400	220	4.400	))	))
ABR	2.800	220	4.400	))	1.600
MAY	4.100	220	4.400	))	1.900
JUN	4.800	240	4.800	))	1.900
JUL	6.000	280	5.600	))	1.500
AGO	7.100	320	6.400	))	800
SEP	7.300	360	7.200	))	700
OCT	7.800	320	6.400	700	))
NOV	7.600	320	6.400	1.200	))
DIC	6.400	320	6.400	))	))

Fig. 3.3.5.2

COSTES DEL PLAN DE PRODUCCIÓN 1				
mes	**contratos**	**despidos**	**horas extra**	**almacenamiento**
ENE	))	10.500	))	))
FEB	))	4.200	))	))
MAR	))	14.700	))	))
ABR	))	))	))	12.800
MAY	))	))	))	15.200
JUN	6.000	))	))	15.200
JUL	12.000	))	))	15.200
AGO	12.000	))	))	6.400
SEP	12.000	))	))	5.600
OCT	))	16.800	14.000	))
NOV	))	))	24.000	))
DIC	))	))	))	))
TOT	42.000	46.200	38.000	70.400
TOTAL GENERAL = 196.600 *um*				

Fig. 3.3.5.3

Establecer un plan de producción mejor que el PLAN 1

No es claramente obvio que nuestro problema pueda formularse mediante un modelo lineal. Por ello vamos a intentar una descripción formalizada general. En el mes t-ésimo representaremos la demanda por D_t, el nivel de producción normal N_t, el nivel de producción en horas extra E_t y el nivel de stock (a final de mes) I_t. Observemos que no precisamos de ningún símbolo especial para el tamaño de la mano de obra (que en general sería W_t), ya que podemos tomar como dicho valor $N_t/20$.

La cota superior de los cambios mensuales en el nivel de la mano de obra requieren que:

$$\left| \frac{N_t}{20} - \frac{N_{t-1}}{20} \right| \leq 40$$

o equivalentemente:

$$\left| N_t - N_{t-1} \right| \leq 800 \qquad [1]$$

para cada t = 1, ..., 12. La cota superior de la producción en horas extra indica que ésta no puede exceder el 30% del nivel de la producción regular:

$$E_t \leq 0{,}3 \times N_t \qquad [2]$$

para cada t = 1, ..., 12. Una restricción adicional, que define el nivel de stock, es:

$$I_{t-1} + N_t + E_t = D_t + I_t \qquad [3]$$

para t = 1, ..., 12; se trata de una "ley de conservación del flujo". Téngase presente que I_0 es nula.

Por lo que respecta a los costes en que se incurre durante el mes t-ésimo, las horas extra cuestan $20 \cdot E_t$, el almacenamiento $8 \cdot I_t$ y los costes de contratación/despido CD_t, estando definido este valor por:

$$\begin{array}{lll} CD_t = 15 \cdot (N_t - N_{t-1}) & \text{si} & N_t \geq N_{t-1} \\ CD_t = 21 \cdot (N_{t-1} - N_t) & \text{si} & N_t < N_{t-1} \end{array} \qquad [4]$$

Por consiguiente, deseamos minimizar:

$$\sum_{t=1}^{12} \left(20 \cdot E_t + 8 \cdot I_t + CD_t \right) \qquad [5]$$

sometido a [1], [2], [3] y [4], las "condiciones de contorno":

$$N_0 = 5.800 \quad ; \quad I_0 = 0 \quad ; \quad I_{12} = 0 \qquad [6]$$

y naturalmente:

$$N_t \, , \; E_t \, , \; I_t \, , \; CD_t \geq 0 \qquad \text{para todo} \quad t = 1, \ldots, 12 \qquad [7]$$

Excepto por las restricciones [1] y [4] nuestro problema tiene el formato de programa lineal. En realidad [1] puede interpretarse como la conjunción de dos desigualdades lineales:

$$\begin{aligned} N_t - N_{t-1} &\leq 800 \\ N_{t-1} - N_t &\leq 800 \end{aligned} \qquad [8]$$

Por lo tanto el único obstáculo no trivial procede de [4]. Notemos, no obstante, que [4] puede escribirse como:

$$CD_t = \max \left\{ 15 \cdot (N_t - N_{t-1}) \ ; \ 21 \cdot (N_{t-1} - N_t) \right\} \qquad [9]$$

que podemos substituir por:

$$\begin{aligned} CD_t &\geq 15 \cdot \left(N_t - N_{t-1}\right) \\ CD_t &\geq 21 \cdot \left(N_{t-1} - N_t\right) \end{aligned} \qquad [10]$$

[9] y [10] son equivalentes gracias al sentido de la optimización y composición de la función objetivo.

Concluimos así que nuestro problema es equivalente a un programa lineal de minimización de [5] sometido a [8], [2], [3], [10], [6] y [7]. Únicamente queda un pequeño obstáculo: para describir un programa de producción factible los números N_1, N_2, ..., N_{12} deben ser múltiplos de 20 (ya que el número $N_t/20$ de trabajadores en el mes t debe ser necesariamente entero). Sin embargo, ignoraremos este obstáculo, una vez obtenida la solución del programa lineal redondearemos N_t al múltiplo de 20 más próximo y ajustaremos adecuadamente los niveles de horas extra y de inventario. El programa de producción resultante estará al menos muy próximo al óptimo. A la vista de la incertidumbre de los datos este procedimiento es bastante satisfactorio.

La estructura general del programa lineal puede consultarse en la *figura 3.3.5.4*. Para forzar que I_{12} sea igual a cero bastará efectuar una de las tres cosas siguientes:

a) Añadir una restricción más: $I_{12} = 0$

b) Elevar el coste unitario de I_{12}, por ejemplo a 10.000

c) Cambiar el -1 de la fila 70 columna 48 por un 0, en la tabla completa generada a partir de la *figura 3.3.5.4*

En el caso del ejemplo, forzando I_{12} a 0, la solución óptima del programa lineal es la de la *Tabla 2*.

El sobrecoste correspondiente a este plan es el de la *Tabla 3*.

NOMBRE DE LA RESTRICCIÓn	....	MES t-1				MES t				MES t+1				....	SIGNO	SEGUNDO MIEMBRO
		N_{t-1}	E_{t-1}	I_{t-1}	CD_{t-1}	N_t	E_t	I_t	CD_t	N_{t+1}	E_{t+1}	I_{t+1}	CD_{t+1}			
COSTE			0	20	8	1	0	20	8	1	0	2	8	1	=	Z (MIN)
....																....
VARIACIÓN MÁXIMA t			-1				1								≤	800
VARIACIÓN MÍNIMA t			1				-1								≤	800
VARIACIÓN MÁXIMA t+1							-1				1				≤	800
VARIACIÓN MÍNIMA t+1							1				-1				≤	800
....																....
PRODUCCIÓN EXTRA t-1			-0,3	1											≤	0
PRODUCCIÓN EXTRA t							-0,3	1							≤	0
PRODUCCIÓN EXTRA t+1											-0,3	1			≤	0
....																....
DEMANDA t					1		1	1	-1						=	D_t
DEMANDA t+1									1		1	1	-1		=	D_{t+1}
....																....
COSTE AUMENTO P. t			15				-15			1					≥	0
COSTE DISMINUCIÓN P. t			-21				21			1					≥	0
COSTE AUMENTO P. t+1							15				-15			1	≥	0
COSTE DISMINUCIÓN P. t+1							-21				21			1	≥	0
....																....

Fig.3.3.5.4

PLAN DE PRODUCCIÓN 2						
t	mes	D_t	CD_t	N_t	E_t	I_t
1	ENE	5.300	10.500	5.300,00	0,00	0,00
2	FEB	5.100	4.200	5.100,00	0,00	0,00
3	MAR	4.400	14.700	4.400,00	0,00	0,00
4	ABR	2.800	8.050	4.016,67	0,00	1.216,61
5	MAY	4.100	0	4.016,67	0,00	1.133,33
6	JUN	4.800	12.000	4.816,67	0,00	1.150,00
7	JUL	6.000	12.000	5.616,67	0,00	766,67
8	AGO	7.100	12.000	6.416,67	0,00	83,33
9	SEP	7.300	12.000	7.216,67	0,00	0,00
10	OCT	7.800	0	7.216,67	583,33	0,00
11	NOV	7.600	350	7.200,00	400,00	0,00
12	DIC	6.400	16.800	6.400,00	0,00	0,00

Fig.3.3.5.5

SOBRECOSTE DEL PLAN 2	
Coste de contratación/despido	102.600,00
Coste de horas extra	19.666,67
Coste de stocks	34.800,00
TOTAL.	157.066,67 *um*

Fig. 3.3.5.6

PLAN DE PRODUCCIÓN 2 bis					
mes	demanda	mano de obra	P.normal	P.extra	stock
ENE	5.300	265	5.300	))	))
FEB	5.100	255	5.100	))	))
MAR	4.400	220	4.400	))	))
ABR	2.800	201	4.020	))	1.220
MAY	4.100	201	4.020	))	1.140
JUN	4.800	241	4.820	))	1.160
JUL	6.000	281	5.620	))	780
AGO	7.100	321	6.420	))	100
SEP	7.300	361	7.220	))	20
OCT	7.800	361	7.220	560	))
NOV	7.600	360	7.200	400	))
DIC	6.400	320	6.400	))	))

Fig. 3.3.5.7: Plan 2 redondeado

Realizando los redondeos obtendremos el siguiente plan de la *figura 3.3.5.7*, cuyo detalle de costes se encuentra en la *figura 3.3.5.8*. Por tanto, el sobrecoste del plan obtenido por redondeo es casi idéntico al del plan original resultante del programa lineal (la diferencia es inferior al 6 por mil). En términos cualitativos el plan de producción puede describirse como sigue:

- Durante el intervalo comprendido desde enero hasta marzo, no se utilizan horas extra ni se constituyen stocks, el nivel de la mano de obra se ajusta mensualmente para satisfacer la demanda.

- El intervalo desde abril hasta septiembre se caracteriza por un gran stock inicial que gradualmente se reduce a cero. Durante este intervalo no se utilizan horas extra. La mano de obra de abril se mantiene al mismo nivel que la de mayo; desde junio hasta septiembre se contratan 40 nuevos trabajadores cada mes. El nivel de mano de obra de abril se determina de manera que el stock casi se haya acabado al final de septiembre. Evidentemente, este nivel inicial es bastante sensible a la demanda total durante el horizonte.

COSTES DEL PLAN DE PRODUCCIÓN 2 bis				
mes	contratos	despidos	horas extra	almacenamiento
ENE	))	10.500	))	))
FEB	))	4.200	))	))
MAR	))	14.700	))	))
ABR	))	7.980	))	9.760
MAY	))	))	))	9.120
JUN	12.000	))	))	9.280
JUL	12.000	))	))	6.240
AGO	12.000	))	))	800
SEP	12.000	))	))	160
OCT	))	))	11.200	))
NOV	))	420	8.000	))
DIC	))	16.800	))	))
TOT	48.000	54.600	19.200	35.360
TOTAL GENERAL = 157.160 *um*				

Tabla 5: Coste del Plan 2 bis

- Desde octubre hasta diciembre no se constituye stock; de hecho, se requiere alguna producción en horas extra para cubrir la demanda de octubre y noviembre. El movimiento del nivel de la mano de obra durante este intervalo está muy afectado por la caída de la demanda de noviembre a diciembre; esta caída es demasiado pronunciada para que el decrecimiento del nivel de mano de obra asociado se produzca únicamente en diciembre. Por esta razón, noviembre da testimonio de la aparentemente irracional política de despedir y hacer horas extra al mismo tiempo.

Si no hubiésemos forzado I_{12} a 0, manteniendo los datos de la *figura 3.3.5.4* (incluido el coste unitario 8 para I_{12}) la solución obtenida habría sido la de la *figura 3.3.5.9*, con un sobrecoste de 139.600 *um*, es decir 17.467 *um* menos que en el caso anterior. En estas condiciones a final del horizonte existen en stock 1200 unidades, lo que puede no ser tan gran problema como la plantilla que equivale a 7600/20 = 380 personas en lugar de las 320 del plan anterior. En cualquier caso las decisiones correspondientes a los 9 primeros meses son idénticas, y como es de suponer que replanificaremos mucho antes de que hayan transcurrido, adoptar un plan u otro es equivalente a todos los fines prácticos.

PLAN DE PRODUCCIÓN 3						
t	mes	D_t	CD_t	N_t	E_t	I_t
1	ENE	5.300	10.500	5.300,00	0	0,00
2	FEB	5.100	4.200	5.100,00	0	0,00
3	MAR	4.400	14.700	4.400,00	0	0,00
4	ABR	2.800	8.050	4.016,67	0	1.216,67
5	MAY	4.100	0	4.016,67	0	1.133,33
6	JUN	4.800	12.000	4.816,67	0	1.150,00
7	JUL	6.000	12.000	5.616,67	0	766,67
8	AGO	7.100	12.000	6.416,67	0	83,33
9	SEP	7.300	12.000	7.216,67	0	0,00
10	OCT	7.800	5.750	7.600,00	200	0,00
11	NOV	7.600	0	7.600,00	0	0,00
12	DIC	6.400	0	7.600,00	0	1.200,00

Fig. 3.3.5.9

Puesto que el proceso de planificación se repetirá periódicamente (todos los meses) cuando dispongamos de previsiones fiables de la demanda para los meses 13 en adelante podremos apreciar la conveniencia o no de proceder a los despidos y de ajustar o no I_{12} a cero.

3.4 Enunciados

3.4.1 Una fábrica de pinturas desea planificar su producción mensual para 1985 de una determinada gama de esmaltes. La previsión de ventas y el número de días laborables para 1984 son:

Mes	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
Ventas *tm*	6	4	3	4	6	9	11	12	13	12	11	9
Días lab.	22	19	21	21	22	20	12	22	20	23	19	19

Datos:

Stock inicial: 5 *tm*

Stock final deseado: 7 *tm*

Carga equivalente: 10 *h/tm*

Capacidad productiva efectiva: 2,5 *h/turno-día*

Turnos normales: 2

Posibilidad de tercer turno a base de horas extra del personal de turno normal.

Coste de almacenar: 8.000 *um/tm-año*

Sobrecoste de horas extra: 500 *um/h*

Coste de retrasos: 3.000 *um/tm*

Coste de cambiar el ritmo de producción: 30.000 *um/cambio*

Ritmo de producción actual: 0,55 *tm/día*

Se pide plantear planes alternativos y evaluarlos económicamente.

3.4.2 Una empresa está preparando su plan de producción para 1985, para el que dispone de los siguientes datos:

Mes	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
Días lab.	21	20	21	21	22	21	22	5	22	23	22	20
Demanda(*tm*)	320	340	350	370	380	400	380	200	300	250	250	300

La empresa trabaja a dos turnos de 8 horas cada uno. Puede, si es necesario, realizar horas extraordinarias hasta un máximo de 4 en los días laborables. La productividad es de 1 *tm* por hora de trabajo.

El stock previsto para finales de diciembre de 1984 es de 30 *tm*. Siendo la demanda resultado de una previsión, para la que se estima una posible desviación en más o menos de un 10%, la empresa desea que su programa de producción sea tal que si se cumple la cuantía de la demanda indicada, quede un stock al final de cada mes del 10% del valor previsto para dicho mes. Se supone que se puede servir durante un mes la producción realizada durante el mismo.

Las horas extraordinarias suponen un coste de 5.000 *um* por hora mientras que el coste de almacenar una *tm* que quede en stock al final de un mes se considera de 3000 *um/mes.*

a) ¿Cuál es el programa de producción que atiende a los requerimientos indicados al mínimo coste?

La empresa estudia la adquisición de algunos elementos adicionales para su sistema productivo, cuyo coste es de 15.000.000 *um* y que darán como resultado un incremento del 20% en la productividad y una reducción del coste directo de la *tm* del 3%, que en este caso significa una reducción de 1.000 *um*/*tm*.

b) ¿Es conveniente realizar esta inversión considerando un plazo de amortización de 5 años y una tasa de interés del 20% anual?

3.4.3 La empresa TRIPLE B (Baldes, Barreños y Bacías, S.A.) tiene una fábrica de la que, recientemente, usted ha sido nombrado director. En esta fábrica se produce sólo un producto: el X-Celente, cuyas ventas, en los últimos años, figuran en la *figura 3.4.3.1*.

Lo primero que quiere hacer es estudiar estas cifras de ventas y preparar una previsión para el resto del año 1987 y todo el 88.

El stock del que dispone el 1/9/87 es de 3.244 unidades, ya que el anterior director, para evitar rupturas de stock, llevaba una gestión que hacía que los stocks fuesen bastante elevados. Usted quiere rebajarlos, y para ello decide mantener una stock mínimo equivalente a la demanda esperada en los próximos dos meses.

Por otra parte, con ciertas mejoras en el procedimiento de fabricación, que estarán disponibles a partir del 1º de marzo de 1988, la capacidad mensual de producción de la fábrica será de 1.700 unidades en lugar de las 1.000 actuales. Además, para diversificar la producción, usted tiene la intención de desarrollar otros productos para esta fábrica. Por tanto, considera que el lote de fabricación tiene que ser la cantidad que la fábrica pueda producir en un mes, de manera que, en un mes dado, la fábrica estará íntegramente dedicada a la fabricación de X-Celente, o se podrá disponer de toda ella durante el mes entero para destinarla a los otros productos que tiene intención de desarrollar.

Debe tenerse en cuenta que durante el mes de agosto la fábrica hace vacaciones, y por tanto no se puede fabricar nada, pero sí se debe mantener la norma del stock mínimo. Además como que el mes de septiembre del 87 ya ha empezado, decide destinarlo íntegramente a la producción de las 750 unidades ya previstas, y el resto del mes al mantenimiento.

¿En qué meses se fabricarán X-Celente, y de qué meses se podrá disponer para los nuevos productos, de acuerdo con el plan de producción que resulta de todo ello, en el período septiembre'87 a diciembre'88?

1984	600	417	315	221	121	324	564	624	762	795	843	682
1985	592	441	328	243	117	343	563	646	728	779	859	699
1986	608	450	317	264	122	367	553	670	749	806	904	715
1987	604	461	325	270	117	358	567	690				

Figura 3.4.3.1 Ventas mensuales de los últimos años, en unidades

3.4.4 La empresa TRIPLE B (Baldes, Barreños y Bacías, S.A.) ha calculado la carga de trabajo que representa servir la demanda que habrá, de acuerdo con las previsiones, durante el próximo año. Esta carga de trabajo (expresada en horas) figura en la columna D de la tabla.

La política de stock de la empresa obliga a tener permanentemente en stock un mínimo equivante a 1000 horas de trabajo.

Para atender a esta carga de trabajo, se dispone de un personal en nómina, cuyas disponibilidades (en horas) figuran en la columna P de la tabla. Estas horas, que corresponden a la nómina del personal, resultan a un coste de 1.000 *um*/hora y, naturalmente, se pagan íntegramente tanto si se utilizan las horas en trabajos productivos como si no.

También existe un contrato con un taller exterior, según el cual el taller se ha comprometido a suministrar hasta 200 horas/mes a un precio de 1.300 *um* la hora, aunque si estas horas no se utilizan íntegramente, las horas no utilizadas se facturan igualmente, pero a un precio de 100 *um*/hora. Si en un mes se han utilizado íntegramente las 200 horas del contrato, el taller puede hacer aún hasta 400 horas más, a un precio de 1.500 *um*/h. Este taller cierra por vacaciones los meses de julio y agosto, y por tanto, en estos dos meses el taller no factura nada, ni tiene el compromiso de proporcionar ninguna hora de trabajo, ni existe la posibilidad de contratarle ninguna hora adicional.

El producto fabricado en un mes se debe guardar en el almacén para servirlo en meses posteriores y se debe cargar un coste de 150 *um*/hora-mes.

También existe la posibilidad de diferir la entrega del material, con un coste adicional de 750 *um*/hora-mes, con un máximo de tres meses; no obstante, en ningún caso la demanda de un año natural se puede diferir para ser entregada dentro del año natural siguiente.

Se pide elaborar un plan general de producción para el año, teniendo en cuenta que el stock inicial equivale a 1.500 horas de producción.

Mes	D	P
Enero	1.200	800
Febrero	1.000	640
Marzo	1.200	800
Abril	1.300	720
Mayo	1.550	800
Junio	1.700	720
Julio	1.500	800
Agosto	1.200	))
Septiembre	900	720
Octubre	550	800
Noviembre	900	720
Diciembre	1.000	480

3.4.5 La demanda de una línea de productos ha sido, durante los dos últimos años, (se incluye también los días laborables de 1987):

Mes	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
Año 1985	201	246	288	329	378	411	376	330	289	243	198	161
Año 1986	189	244	274	333	370	417	370	332	291	247	202	167
Año 1987												
Días lab.	22	20	21	18	22	20	20	4	20	22	21	20

Se estima que la demanda es estable en tendencia y fuertemente estacional. Durante 1987 está acordado con la representación laboral que se trabajará a dos turnos de 8 horas efectivas cada uno, pero en caso de necesidad se podrán realizar horas extraordinarias hasta un máximo de 4 por día laborable. La productividad alcanzada es una unidad de producto por hora. La plantilla está estabilizada, y cobra lo mismo tanto si hay trabajo durante las horas normales como si no lo hay; sin embargo las horas extraordinarias suponen un sobrecoste de 10.000 *um*/hora. Mantener una unidad del producto en stock representa un coste de 48.000 *um*/unidad-año.

Se considera que al final de 1985 el stock existente es de 100 unidades. En enero se ha planificado la producción de 180 unidades y todavía no se dispone de los datos relativos a las ventas de dicho mes: ¿qué producción deberá planificarse para febrero, marzo y abril?

3.4.6 La empresa PACSA (*Planning And Connsulting*, S.A.) debe preparar el plan maestro de producción de uno de sus clientes para el año 1990, para lo cual dispone de los siguientes datos:

a) *Datos de nómina*

- Número total de trabajadores: 700
- Absentismo laboral previsto: 3%
- Coste total de la nómina para todo el año: 1.890.336.000 *um*

b) *Acuerdos laborales y sindicales*

- En cada día laborable se trabaja 8 horas por persona.

- Se puede hacer horas extra hasta un máximo del 20% de las horas normales del mes, siempre que nadie haga más de 4 en un mismo día.
- Las horas extra se pagarán a razón de 800 *um*/h, incluidos impuestos y Seguridad Social, las cuales se deben incrementar en un 25% en concepto de cuota patronal de la Seguridad Social.
- Según el calendario laboral establecido, los días laborables de cada mes son:

20 , 20 , 23 , 21 , 24 , 21 , 18 , 4 , 20 , 22 , 21 , 18

c) *Costes de producción y almacenamiento*

- La producción de una unidad de producto terminado requiere 40*Hh*, y consume materiales y energía por valor de 45.000 *um*.
- Las reglas de gestión de stocks obligan a cargar un coste en concepto de almacenamiento del 2% de su coste de producción (mano de obra + materiales + energía) a todos los productos terminados que haya en el almacén al final de cada mes.
- La política de stocks obliga, si es posible, a tener al final de cada mes un stock mínimo igual al 10% de la demanda prevista para el mes siguiente.

d) *Demanda prevista*

- La previsión de la demanda se efectúa con un modelo de medias móviles con estacionalidad multiplicativa, para el cual se utilizan datos mensuales, de los que se toman las 12 últimas observaciones para el cálculo de las medias.
- La media móvil de primer orden, con los datos hasta el 31/12/89, es de 2.180 unidades.
- La media móvil de segundo orden, con los datos hasta el 31/12/89 es de 1.630 unidades.
- Los coeficientes de estacionalidad para los doce meses del año con los datos hasta el 31/12/89 son:

0.85 / 0.74 / 0.63 / 0.75 / 0.86 / 1.18 / 1.22 / 1.40 / 1.31 / 1.13 / 1.00 / 0.93

- El producto se vende por unidades, de manera que para obtener las previsiones se deben redondear los resultados de los cálculos a las unidades enteras más próximas.
- Como que la empresa tiene por norma dar el mejor servicio y la demanda llegada en ruptura se pierde, el plan se ha de elaborar procurando servir toda la demanda en el momento que se produce. Sólo se acepta no servir parte de la demanda si es materialmente imposible atenderla.

e) *Subcontratación*

- Si no es posible satisfacer el plan con las propias disponibilidades, se puede subcontratar mano de obra a un taller próximo, que la factura a 1.500 *um/Hh*, más la energía consumida, al que se le debe suministrar los materiales necesarios para la producción.

- Este taller puede suministrar un máximo de 16.000 *Hh* cada mes, excepto en agosto, en el que, debido a las vacaciones, no trabajan.

¿Qué plan maestro obtendría en estas condiciones?

3.4.7 La empresa BYFSA establece mensualmente un plan maestro de producción que comprende un horizonte de seis meses, aunque sólo el primero es ejecutivo. Para una cierta familia de productos que se trata en forma agregada utiliza la siguiente formulación a fin de definir la producción a realizar (medida en cierta unidad) en un mes determinado:

$$\begin{bmatrix}\text{Producción}\\ \text{del mes } t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{demanda mensual}\\ \text{media prevista del}\\ \text{mes } t \text{ al mes } t+11\end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix}\text{stock ideal}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{stock previsto}\\ \text{del mes } t-1\end{bmatrix}}{12}$$

donde:

$$\begin{bmatrix}\text{Stock final}\\ \text{previsto}\\ \text{del mes } t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{stock final}\\ \text{previsto}\\ \text{del mes } t-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{producción}\\ \text{programada}\\ \text{del mes } t\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{demanda}\\ \text{prevista}\\ \text{del mes } t\end{bmatrix}$$

Para prever la demanda utiliza la expresión:

$$x_{T+h} = \left(a_T + h \cdot b_T\right) \cdot c_{T+h}$$

donde

- x_{T+h} es la demanda del mes $(T+h)$ prevista en el mes T
- a_T y b_T son los parámetros estimados de la tendencia
- c_{T+h} es la estimación del coeficiente estacional

Los valores disponibles en diciembre de 1984 eran:

$$a_{DIC} = 218{,}6 \qquad b_{DIC} = 2{,}2$$

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
mes	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
c_{DIC+h}	1,3	0,7	0,9	0,9	1,2	0,8	0,6	0,3	1,1	1,3	1,4	1,5

Para calcular la demanda media se utiliza la siguiente fórmula aproximada:

demanda mensual media prevista del mes t al $t+11$	$= \dfrac{1}{12} \cdot \sum_{i=0}^{11} \left[a_T + (t+i-T) \cdot b_T \right] = a_T + (t+5{,}5-T) \cdot b_T$

El stock final previsto para el mes de diciembre de 1984 era de 60 unidades y el stock ideal para 1985 se fijó en 80 unidades.

a) ¿Cuál fue el plan maestro de producción establecido en diciembre de 1984? (Comprende los seis primeros meses de 1985, siendo ejecutivo el valor determinado para enero). Puede redondearse la demanda estimada para cada mes y la producción a la unidad.

Hoy, 18 de junio de 1985, estamos preparando un nuevo plan maestro (que comprenderá de julio a diciembre de 1985). La demanda real, producción y stock final de los meses transcurridos han sido:

Mes	DIC84	ENE85	FEB85	MAR85	ABR85	MAY85	JUN85
Producción	212	235	243	236	235	234	239
Demanda	328	272	154	202	196	263	?
Stock	60	23	112	146	185	156	?

Los interrogantes corresponden a valores que no se conocen en el momento de planificar.

b) ¿Es significativamente diferente el stock real del previsto en el plan de diciembre?

c) Si es así, ¿conviene actualizar los parámetros de la previsión? Si la respuesta es afirmativa hágase mediante ajuste exponencial (preferentemente por el método de Winters), justificando el valor de los coeficientes de alisado empleados.

Si la respuesta es negativa pasar a la siguiente pregunta.

d) Establecer el plan maestro de producción de junio.

e) Efectuar una crítica (constructiva) del procedimiento empleado por BYFSA.

3.4.8 La demanda prevista para los próximos doce meses de las tres familias de productos A, B y C es la siguiente:

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	70	90	100	120	150	190	170	130	110	90	70	60
B	60	70	80	100	120	110	100	90	80	80	70	60
C	40	40	50	50	40	40	50	60	70	70	80	90
Días lab.	20	18	21	19	22	20	18	4	20	20	21	17

Existe una única instalación cuello de botella, en la cual las unidades de las familias A y B consumen una hora/unidad, mientras que las de la familia C consumen 1,5 horas/unidad. La instalación trabaja a dos turnos de 8 horas efectivas cada uno y, si es necesario, puede realizar hasta 4 horas más por día laborable a un sobrecoste de 5.000 *um*/hora. Las unidades pueden almacenarse, pero el coste de posesión considerado es del 18% anual del inmovilizado medio.

El stock final del mes O se estima que será de 50 unidades de la familia A, 40 de la B y 30 de la C. Para cubrirse frente a los defectos de un eventual error de estimación de la demanda se establece la regla de producir de forma que el stock a final de mes, si la demanda ha coincidido con la anteriormente indicada, no sea inferior al 10% de dicha demanda. El coste medio de una unidad de la familia A es de 25.000 *um*, 32.000 una de B y 64.000 una de C.

Establecer el plan maestro de producción. El plan debe indicar cuántas unidades de A, B y C hay que fabricar cada mes (por lo menos en los cuatro primeros meses).

NOTA: Una forma de enfocar el problema consiste en agregar todos los productos en uno solo (por ejemplo, tomando como unidad la hora de producción en la instalación cuello de botella), determinar el plan en dicha unidad y a continuación desagregar. El único punto ambiguo es la evaluación del coste de almacenamiento de la unidad agregada, pero puede solventarse mediante un valor promedio.

3.4.9 *El juego del plan maestro*

Usted es el director general de SCREW-BALL SHOT COMPANY, una pequeña empresa que fabrica bolas para rodamientos y otros productos industriales. Puesto que la compañía es pequeña, usted hace personalmente cada mes el plan maestro, y deduce del mismo un programa detallado de producción.

Datos de la empresa

SCREW-BALL tiene una sola perdigonera (máquina para hacer bolas) que necesita un operario en cada uno de los tres turnos. La política de la empresa es hacer funcionar la máquina tres turnos diarios, cinco días a la semana. Si hay poco trabajo para mantener ocupada la máquina, los operarios están ociosos, pues SCREW-BALL tiene por norma no despedir ni regular a sus empleados. Asimismo, la empresa tiene la política de no trabajar nunca durante los fines de semana. Por tanto, la capacidad de la máquina es 4 semanas x 5 días x 24 horas = 480 horas por mes (suponiendo meses de cuatro semanas). Puesto que el salario horario es 5 *um*, esto obliga a la empresa a un coste fijo de mano de obra de 5 x 480 = 2.400 *um* por mes. Una vez se ha puesto a punto la máquina para producir una determinada clase de bolas puede hacerlas al ritmo de 5 unidades por hora, independientemente del tipo de bola. El proceso es bastante estable. El contenido de material de cada bola es el mismo, puesto que las bolas varían sólo de forma (bolas esféricas, bolas cuadradas, bolas elípticas, etc.). El coste de material de cada bola, independientemente del tipo, es de 4 *um*. La materia prima no causa nunca problemas y puede aprovisionarse en un plazo muy corto.

SCREW-BALL ha dividido sus líneas de producto en tres categorías: bolas-A, bolas-B y bolas singulares.

Bolas-A

Hay un sólo tipo de bola en esta categoría. La compañía ha decidido producir esta bola-A para stock, ya que se vende a gran número de distribuidores que exigen la expedición inmediata al final de cada mes. Las bolas-A se venden a 8 *um* la pieza. Si las bolas-A no están en stock cuando se piden, el distribuidor compra a otro fabricante y la penalización para SCREW-BALL es una venta perdida. Históricamente, la demanda media de las bolas-A ha sido 700 unidades al mes. Sin embargo, las ventas poseen una ligera estacionalidad.

Se ha estimado la siguiente demanda para este artículo:

MES	DEMANDA	MES	DEMANDA
1	500 *	7	900
2	500	8	900
3	600	9	800
4	700	10	700
5	800	11	600
6	900	12	500

* La compañía espera vender 500 bolas-A al final del mes 1. Se necesitan 40 horas para poner a punto la perdigonera para fabricar bolas-A. SCREW-BALL ha comprobado que sus previsiones son exactas dentro de un intervalo de 200 unidades en más o en menos por mes.

Bolas-B

Como en las bolas-A, hay un sólo producto en la categoría de bolas-B, llamadas bolas BEAN debido a su forma elíptica. Las bolas BEAN se fabrican bajo pedido para un gran fabricante de equipo original (OEM). El precio de SCREW-BALL para dicha compañía es de 7 *um* la pieza. El cliente generalmente pasa pedidos globales tres veces al año. Cuando pasa pedido especifica las cantidades a entregar en cada uno de los cuatro próximos meses. El cliente ha pedido ya 2.400 unidades con entregas de 600 al final de los meses 1, 2, 3 y 4. Se espera que defina las cantidades correspondientes a los meses 5, 6, 7 y 8 al principio del mes 4. El pedido para los meses 9, 10, 11 y 12 se espera que llegue al principio del mes 8. El cliente ha estimado que sus necesidades mensuales medias durante el año serán de 600 unidades al mes, aunque sus estimaciones frecuentemente son erróneas.

Debido a la importancia de este cliente para SCREW-BALL, se intenta satisfacer siempre sus peticiones. La compañía está convencida de que si rechaza alguna vez un pedido perderá el cliente. En las cláusulas del contrato de venta, SCREW-BALL ha aceptado pagar a su cliente 1 *um* por cada unidad no servida a tiempo y por cada mes de retraso (los débitos se acumulan de un mes al siguiente).

Se necesitan 30 horas para poner a punto la perdigonera para la fabricación de bolas BEAN.

Bolas singulares

Las bolas singulares se hacen bajo pedido en firme del cliente debido a su bajo volumen y naturaleza especial. La empresa ha determinado tres tipos de bolas singulares que tienen demanda: bolas SKI, bolas NER y bolas SNOW. Todos los tipos de bolas singulares se venden a los distribuidores al precio de 10 *um* la pieza. Cuando un distribuidor hace un pedido especifica la cantidad y el período en el que debe hacerse la entrega; SCREW-BALL comprueba si puede incluir la orden en su plan maestro y acepta o rechaza el pedido. Si SCREW-BALL acepta un pedido para entregar al final de determinado mes y no cumple su compromiso paga una penalización de 2 *um* por unidad y mes de retraso. Esta penalización debe abonarse cada período hasta que el pedido retrasado se entrega. Se necesitan 40 horas para poner a punto la perdigonera para la fabricación de cada uno de los distintos tipos de bolas singulares. La *figura 3.4.9.1*, cartera de pedidos de SCREW-BALL, muestra los pedidos ya comprometidos para entregar en períodos futuros. La compañía ha intentado prever la demanda de los diferentes tipos de bolas singulares sin que lo haya logrado hasta ahora.

Cartera de pedidos de SCREW-BALL* (final del período 0)

MES	TIPO DE PRODUCTO	CANTIDAD	
1	Bolas BEAN	600	
	Bolas SKI	1.000	
	Bolas NER	200	(débito del período anterior)
2	Bolas BEAN	600	
	Bolas SNOW	400	
	Bolas NER	200	
3	Bolas BEAN	600	
4	Bolas BEAN	600	

Fig. 3.4.9.1

* Todos los pedidos deben servirse al final del período indicado, después de que toda la producción del mes se ha realizado y antes de comenzar la producción del mes siguiente.

Plan maestro

El plan maestro en SCREW-BALL se hace cada mes, después de que se ha realizado y expedido la producción del mes anterior, después de que han llegado los pedidos y antes de empezar la producción del mes en curso. El esfuerzo de planificación se refleja en dos documentos.

El primero es una Cuenta de pérdidas y ganancias del mes anterior. La *figura 3.4.9.2* muestra los componentes de ingresos y costes de producción y ventas, incluyendo las penalizaciones y cargas de posesión de stocks. El coste de posesión, para cualquier tipo de producto, es 0,10 *um* por unidad y mes de permanencia en almacén, contado después, que han tenido lugar las expediciones.

El segundo documento producido es un plan maestro tal como muestra la *figura 3.4.9.3*; en él se indica lo que SCREW-BALL desea que produzca su fábrica cada mes futuro de un determinado horizonte. Puesto que el plan maestro pierde validez (a causa de la incertidumbre) cuando más lejos se proyecta en el futuro, se actualiza cada mes. Nótese que el plan maestro especifica dos cosas que son importantes en el período de "rigidez" (período inmediato para el que se toman decisiones concretas irrevocables). La primera es el número de horas (preparación + fabricación) que se asignan a cada producto a fabricar. Puede calcularse añadiendo al tiempo de preparación el número de unidades a producir dividido por 5. El total de dichas horas en un mes no puede superar las 480 horas. El segundo dato importante indica la secuencia en que los productos deben producirse en la máquina. Esto es importante ya que, a final de mes, la máquina estará dispuesta para el último producto producido. Si se precisa seguir fabricando dicho producto el mes siguiente no se necesitará preparar la máquina de nuevo si dicho producto es el primero del mes, continuando el lote anterior.

El juego

Se le pide que interprete el papel del director general de SCREW-BALL durante el transcurso de la práctica.

Usted preparará un plan maestro para la empresa (utilice la *figura 3.4.9.3*). Es su criterio elegir el horizonte del plan, pero debe incluir el período de rigidez próximo (no olvide que usted debe ya 200 unidades de bolas NER y que la máquina está actualmente preparada para su fabricación). En la práctica, el juego se desarrollará de la siguiente forma:

1. Se le suministra un documento que indicará:
   (a) demanda real del mes uno;
   (b) pedidos nuevos de bolas singulares o bolas BEAN.
2. Usted elaborará una cuenta de pérdidas y ganancias para el mes uno, suponiendo que se ha fabricado lo que había indicado en su programa base y que la demanda es la indicada.
3. Analizará los pedidos y aceptará los que desee rechazando el resto. Los aceptados para entrega en períodos futuros se añadirán a su cartera de pedidos (puede usar la *figuyra 3.4.9.4*). Usted queda irrevocablemente comprometido con ellos y sus consecuencias.
4. Usted preparará entonces un nuevo plan maestro, indicando por lo menos lo que desea que haga la fábrica en el próximo período de rigidez (en este momento será el mes 2). Será útil que haya estructurado una estrategia para realizar la programación. Podrá pedir estadillos extra.

5. El juego seguirá repitiendo varias veces las fases anteriores.

Cuenta de pérdidas y ganancias						
(1) Producto	bolas A	bolas BEAN	bolas SKI	bolas NER	bolas SNOW	totales
(2) Precio (*um*/un.)	8	7	10	10	10	
(3) Stock inicial/(débito)	750	))	))	))	))	
(4) Producción	950	600	))	200	))	1.750 un.
(5) Disponible	1.700	600	))	200	))	
(6) Demanda	500	600	))	400	))	
(7) Ventas (*um*)	4.000	4.200	))	2.000	))	10.200 *um*
(8) Stock final/(débito)	1.200	))	))	(200)	))	
(9) Coste stock/Coste débito	120	))	))	400	))	520 *um*

Ventas (total fila (7))10200 *um*

Costes:

Mano de obra 2400
Materiales (total fila (4) x 4) 7000
Stocks/débitos (total fila (9)) 520
)))))
Coste total .... 9920 *um*

Contribución al beneficio 280

Contribución acumulada 280
(añadir a la contribución del próximo período)

(3) Débito = cantidades comprometidas no expedidas en plazo
(5) = (3) + (4)
(7) = si (6) < (5) : (2) x (6) ; si no (2) x (5)
(9) Coste de stock = 0.10 x número de unidades en el stock final
Coste débito = número de unidades debidas x penalización
(1 *um* para bolas BEAN ; 2 *um* para bolas singulares)

Fig. 3.4.9.2

Plan Maestro (período)									
MES / PRODUC	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Bolas A	950 1								
horas	230								
Bolas BEAN	600 2								
horas	150								
Bolas SKI									
horas									
Bolas NER	200 3								
horas	80								
Bolas SNOW									
horas									
Total horas progr.	460								

Fig. 3.4.9.3

Cartera de pedidos de SCREW-BALL				
MES	TIPO DE PRODUCTO			
ENTREGA	BEAN	SKI	NER	SNOW
1	600	1.000	200	
2	600		200	400
3	600			
4	600			
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Fig. 3.4.9.4