3.1.3 Planificación mediante modelos

En el presente apartado vamos a discutir cierto número de modelos matemáticos que pueden servirnos de ayuda en la planificación. Iniciaremos el camino con dos modelos de interés histórico, el de Bowman y el de Holt, Modigliani, Muth y Simon (HMMS). En rigor el primero de ellos ya lo hemos presentado, si bien de una forma intuitiva.

A continuación describiremos algunas variantes inspiradas en el modelo HMMS y veremos algunos modelos agregados de tipo especial. Seguiremos analizando modelos lineales, explorando su gran riqueza y mostrando sus posibilidades tanto teóricas como prácticas. La muestra presentada no es ni mucho menos exhaustiva, pero recoge toda una gama de modelos de distintos tipos, representativa de las variantes disponibles en este terreno.

Evidentemente ni la formulación del modelo ni su resolución son mecánicos y normalmente se requerirá una gran habilidad para equilibrar el realismo del modelo y la facilidad de su manipulación; un modelo muy realista puede ser de manipulación imposible o muy difícil, y recíprocamente un modelo de manipulación fácil puede ser tan simplista que apenas aporte luz sobre el problema real.

En cualquier caso, y para artículos o gamas de productos importantes los resultados del modelo se considerarán indicativos y se deberán someter a la revisión y al criterio de los responsables de la planificación, que posiblemente tendrán intereses contrapuestos en función del área orgánica de adscripción (por ejemplo, comercial o producción), para que se termine consolidando en una planificación en firme que marcará la pauta productiva a seguir en el futuro inmediato.

Intentaremos presentar los modelos en un formato esquemático que detalle origen, hipótesis en que se basa, variables, parámetros, modelo propiamente dicho, método de resolución, comentarios.

3.1.3.1 Modelo de Bowman

Es un modelo uniproducto que parte de los siguientes supuestos:

- Un solo producto y una sola etapa productiva.

- Hay K formas (fuentes) de obtener el producto, con coste variable de producción diferente.

- No hay coste fijo de producción, ni coste de cambio de nivel de producción (en las fuentes).

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998. Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del "copyright", bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

- El producto puede almacenarse; no se admiten rupturas.

- Las unidades producidas durante un período pueden utilizarse para atender la demanda de dicho período.

Variables:

$X_{k,t}$ cantidad planificada de producción en la fuente *k* durante el período *t*.

I_t stock al final del período *t*.

Parámetros:

t índice de tiempo ($t = 1, 2, 3, ..., T$)

k índice de fuente de producción (p.ej. horas normales, horas extra; $k = 1, 2, 3, ..., K$)

D_t demanda o consumo, previsto o acordado, durante el período *t*.

$P_{k,t}$ capacidad (en unidades) de la fuente *k* durante el período *t*.

$c_{k,t}$ coste (variable) unitario de producción de la fuente *k* durante *t*.

h_t coste de almacenar una unidad del producto de t a $t+1$.

Datos iniciales:

I_0 stock inicial.

Modelo:

$$[MIN]\ z = \sum_{t=1}^{T}\left[\sum_{k=1}^{K} c_{k,t}\cdot x_{k,t} + h_t\cdot I_t\right]$$

sometido a,

$$X_{k,t} \le P_{k,t}$$

$$I_t = I_{t-1} + \sum_{k=1}^{K} X_{k,t} - D_t \qquad k = 1, 2, ..., K \quad ; \quad t = 1, 2, ..., T$$

$$X_{k,t} \ge 0 \quad ; \quad I_t \ge 0$$

Se trata de un programa lineal continuo soluble mediante el algoritmo símplex.

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

3.1.3.1.1 Modificación del modelo

Redefiniendo las variables y parámetros de este programa lineal podemos darle un formato más simple (adaptado al problema del transporte).

Variables:

$Y_{k,i,j}$ número de unidades producidas por la fuente k durante el período i para atender la demanda del período j.

Parámetros:

$'_{k,i,j}$ coste (variable) unitario de producción (y almacenaje) de unidades en la fuente k durante el período i para atender la demanda en j.

en nuestro caso:

$$\Gamma_{k,i,j} = c_{k,i} + h_i + h_{i+1} + \dots + h_{j-1} \qquad \text{si} \quad i \leq j$$

$$= \text{infinito} \qquad \text{si} \quad i > j$$

Modelo:

$$[\,MIN\,]\ z = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{T} \Gamma_{k,i,j} \cdot Y_{k,i,j}$$

sometido a,

$$\sum_{j=1}^{T} Y_{k,i,j} \leq P_{k,i} \qquad k = 1, 2, 3, \dots, K \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, T$$

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{T} Y_{k,i,j} = D_j \qquad j = 1, 2, 3, \dots, T$$

$$Y_{k,i,j} \geq 0$$

Comentarios:

1) La estructura anterior corresponde a la del problema del transporte, y es la que hemos implícitamente utilizado en nuestro esquema de *3.1.2.2*.

2) La formulación supone que no hay stock inicial, o bien que éste se ha asignado a la demanda, empezando por el primer período (la demanda es neta); en caso de incluir explícitamente stock inicial tendríamos:

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

$Y_{0,j}$ número de unidades del stock inicial utilizadas para atender la demanda en el instante j.

$'_{0,j}$ coste unitario del almacenaje necesario para atender la demanda del período j con el stock inicial,

$$\Gamma_{0,j} = h_1 + h_2 + \ldots + h_{j-1}$$

en la función a minimizar aparecerá el término:

$$\sum_{j=1}^{T} \Gamma_{0,j} \cdot Y_{0,j}$$

entre las restricciones del primer grupo, la siguiente:

$$\sum_{j=1}^{T} Y_{0,j} \leq I_0$$

y las del segundo y tercero quedan modificadas como sigue:

$$Y_{0,j} + \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{T} Y_{k,i,j} = D_j \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, T$$

$$Y_{0,j} \, , \, Y_{k,i,j} \geq 0$$

3) La resolución del modelo puede efectuarse tal como se ha hecho en *3.1.2.2* (mes a mes o período a período, atendiendo la demanda a partir de la fuente con potencial de producción no agotado y coste más bajo) con lo que se obteniene la solución óptima gracias a que hemos impuesto indirectamente que $Y_{k,i,j}$ sea cero si $i>j$.

4) Es fácil generalizar, por ejemplo, permitiendo diferir la cumplimentación de la demanda a cierto coste; en dicho caso en lugar de coste infinito, cuando $i > j$, tendremos:

$$\Gamma_{k,i,j} = c_{k,i} + \pi_j + \pi_{j+1} + \ldots + \pi_{i-1} \qquad i > j$$

donde B_j es el coste unitario de retrasar la entrega de unidades que debería hacerse en j a $j+1$ (suponiendo que este coste sea aditivo si la entrega de alguna unidad se retrasa varios períodos).

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

La consideración de retrasos o eventualmente de pérdidas de ventas exige adoptar soluciones especiales en el extremo del horizonte (p.ej. en el caso de retrasos no tolerarlos cuando llevan fuera del horizonte).

5) Si está permitido diferir o perder parte de la demanda de un mes, el procedimiento de resolución del modelo deberá ser el algoritmo del transporte, en el que el procedimiento intuitivo derivado del expuesto en (3) sólo servirá para obtener una solución inicial a mejorar mediante el procedimiento *stepping stone* o alguna de sus variantes.

En el momento en que Bowman desarrolló su modelo la programación lineal era un concepto relativamente nuevo, el método símplex de resolución no demasiado conocido, el ordenador acababa de efectuar su entrada como instrumento al servicio de las empresas y no parecía demasiado claro que las mismas pudiesen disponer nunca de un ordenador lo suficientemente potente como para resolver un programa lineal de dimensiones industriales; en cambio sí parecía posible que los ordenadores de las empresas pudiesen aplicar el algoritmo del transporte, lo que explica la transformación realizada en el modelo. Actualmente la situación es enteramente distinta y muchos PC's tienen la capacidad suficiente para resolver los programas lineales correspondientes a la primera formulación.

3.1.3.2 Reflexiones sobre la resolución de Modelos de Planificación

Supongamos que tenemos que resolver mediante el algoritmo de transporte un modelo de Bowman idéntico al último tratado en **3.1.2.2** (*fig. 3.1.2.10*), es decir, con 2 fuentes cada mes, producción en horas normales y producción en horas extra, y considerando la demanda neta de cada mes (no aparecen ni stock inicial ni final). Disponemos de un paquete informático (por ejemplo el QBS) capaz de tratar y resolver los problemas de transporte, por consiguiente el esquema del procedimiento a desarrollar es el que aparece en la *figura 3.1.3.1*.

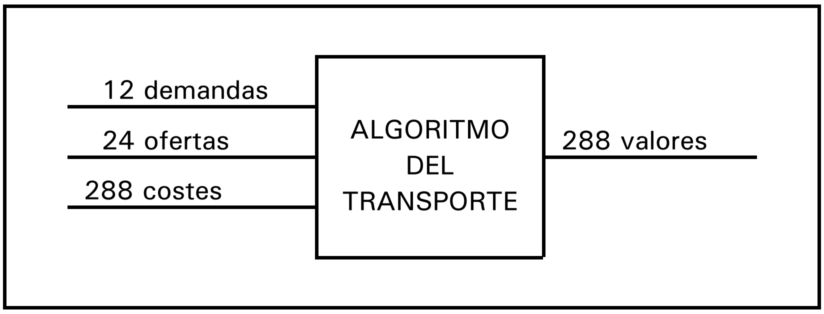

Fig. 3.1.3.1 Esquema inicial de la utilización de un algoritmo matemático sofisticado para la planificación

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

En otras palabras, el usuario/planificador deberá introducir (prescindiendo de la información necesaria para definir el tamaño del problema) 324 datos en el programa informático, el cual, después de hallar la solución, le devolverá 288 valores, muchos de ellos nulos (realmente, incluyendo las variables de holgura, 312 valores). No obstante, los datos los hemos determinado en **3.1.2** de una forma no-ambigua y por tanto automatizable a partir de las demandas netas de cada mes (12 valores) los días laborables de cada mes (12 valores), las tasas de producción diaria en horario normal y extra (2 valores) y los costes unitarios (2 de producción, 1 de stock y otro de diferir, total 4 valores). En definitiva, a partir de 30 valores hemos determinado los 324 datos. Cualquier planificador pedirá que el mismo ordenador sea quien, a partir de los 30 valores primarios, determine los datos del problema del transporte y sin intervención humana los alimente al algoritmo del transporte.

Análogamente, los 288 valores obtenidos como resultados deberán estructurarse convenientemente para conducir a la producción en horas normales y extra de cada mes (24 valores), y aunque sea una consecuencia, al stock esperado a final de cada mes (12 valores). Es decir, los 288 resultados brutos, deben condensarse en 36 resultados definitivos, lo que exige la realización de algunas sumas y restas. También parece adecuado pedir que sea el propio ordenador quien realice esta transformación.

Al módulo del paquete informático encargado de transformar los datos del formato propio de la planificación (o del planificador) al formato propio del algoritmo lo llamaremos *preprocesador*. En el caso presente podrá desempeñar algunas funciones más de las que le hemos atribuido, por ejemplo determinar el stock ideal y de ahí pasar de la demanda a la demanda corregida, etc.

Al módulo del paquete informático encargado de transformar los resultados del formato propio del algoritmo al formato deseado en la planificación lo llamaremos *postprocesador*. Podremos asignarle algunas funciones más, como análisis de sensibilidad, etc.

El paquete informático de ayuda a la planificación (SIAP = sistema interactivo de ayuda a la planificación) comprende por lo menos además del algoritmo o *procesador*, el preprocesador y el postprocesador. Y esto tanto si el algoritmo utilizado es el del transporte como si es otro (por ejemplo el algoritmo símplex).

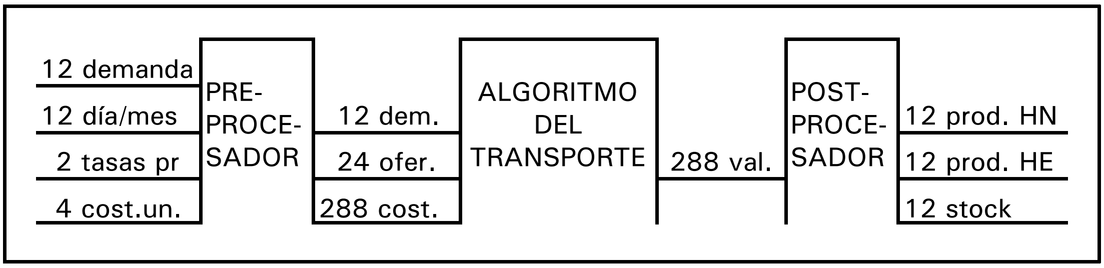

Fig. 3.1.3.2 Esquema ampliado de planificación mediante la utilización de algoritmos matemáticos

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

No obstante ello no es suficiente si tenemos en cuenta que la planificación es una actividad cíclica, con actualizaciones sucesivas del plan, en las que gran parte de los parámetros generales se mantienen de una actualización a la siguiente, y otra parte simplemente desplaza el índice de tiempo. Para facilitar la conservación de los parámetros el SIAP deberá estar provisto de una *base de datos*, con la estructura adecuada y las facilidades para proceder a altas, bajas, consulta, selección, modificación y listados. Un módulo *monitor* (que puede estar físicamente yuxtapuesto con el preprocesador) permitirá elegir el tratamiento: actualización y/o consulta de datos, o bien proceso regular de planificación.

El plan sugerido por el sistema será presentado al usuario/planificador el cual debe poder modificarlo, determinando el sistema su factibilidad y evaluación (utilizando si es necesario partes del procesador); los planes sucesivos con posibilidades de ser elegidos deberán almacenarse en el área de trabajo de la base de datos. Una vez elegido el plan vigente también deberá almacenarse en la base de datos a fin de contrastarlo posteriormente con las realizaciones por una parte y con el nuevo plan actualizado por otra (labores a encomendar, por ejemplo, al postprocesador). Normalmente el plan vigente deberá sufrir una amplia difusión y servir de dato de entrada a otros tratamientos, por lo que deberemos disponer de un módulo *interfaz* (que puede estar yuxtapuesto con el postprocesador).

Por tanto la configuración *mínima* de un SIAP es la que se esquematiza en la *figura 3.1.3.3*. Se supone que el procesador está dotado de uno o varios algoritmos de carácter analítico o heurístico (en el caso precedente el algoritmo del transporte) que precisa de un formato adecuado de datos, obtenido mediante el preprocesador, que se alimenta de la base de datos. Los resultados son transcritos al formato de planificación por el postprocesador, que a su vez obtiene información para ello de la base de datos, en la cual almacena el plan. El resto de funciones y módulos responde a lo descrito en el párrafo anterior.

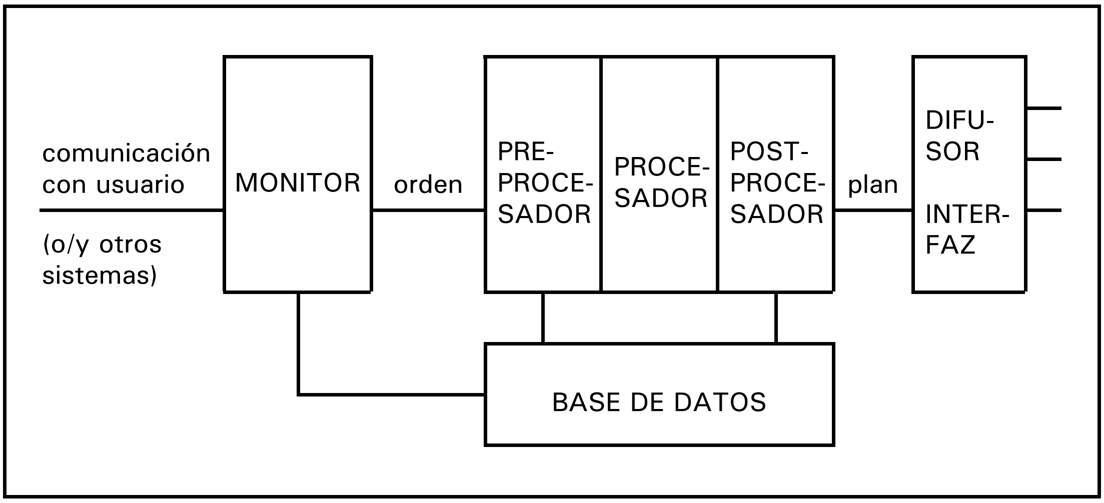

Fig. 3.1.3.3 Esquema completo de la estructura mínima de un SIAP

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

La escasa o nula utilización de los algoritmos sofisticados para la planificación en muchas empresas obedece, a nuestro entender, a la existencia de paquetes informáticos que responden a dichos algoritmos desnudos (Procesador), y a la no disponibilidad en el mercado de SIAP completos. Seguramente la dependencia de los parámetros característicos de cada empresa impide la construcción de SIAP suficientemente generales, lo que aleja a las empresas de *software* de su construcción como producto.

3.1.3.3 Modelo HMMS o de las reglas lineales

Este modelo fue desarrollado por Holt, Modigliani, Muth y Simon durante la década 1950-1960 y se basa en una aproximación mediante funciones cuadráticas de los costes considerados; la aparente complicación que introducen los cuadrados queda posteriormente compensada por la forma que adoptan las reglas de planificación. La aplicación inicial se realizó en una fábrica de pinturas. Las hipótesis básicas son las siguientes:

- Se considera la agregación de todos los productos en una sola familia, midiéndose la demanda y la producción en una unidad adecuada.

- Se considera una sola etapa productiva.

- El producto se puede almacenar y a cada nivel de actividad le corresponde un nivel de stock ideal que proporciona el mínimo coste, mayor stock es excesivo y menor stock, dada la agregación, presupone que de algunos productos hay carencia, que se traduce en incremento de costes a causa de las urgencias.

- La producción depende íntimamente del nivel de la mano de obra, que puede modificarse libremente de un mes a otro mediante contrataciones y despidos.

- A cada nivel de mano de obra le corresponde un nivel de producción agregada ideal; mayor producción equivale a incrementar el coste debido a horas extra, subcontratación, etc., menor producción puede suponer también un coste superior.

- La estructura de los costes se mantiene estable durante largos períodos de tiempo.

Variables:

X_t cantidad de producción agregada planificada para el período t.

I_t stock final agregado del período t.

W_t plantilla existente el período t (no se impone que sea un número entero).

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

Parámetros:

t índice de tiempos (t = 1, 2, .., T)

D_t demanda agregada esperada (compromiso o estimación) para el período t.

c_{01} a c_{13} coeficientes de las expresiones de coste determinados a partir de los datos de la contabilidad mediante ajuste (esencialmente mínimos cuadrados).

Valores iniciales:

I_0 stock inicial.

W_0 plantilla inicial.

El modelo de costes sugeridos es el siguiente:

- Costes de nómina regular:

$$c_{01} \cdot W_t + c_{13}$$

las constantes c_{01} y c_{13} son no negativas y representan respectivamente el coste variable por trabajador en tiempo normal o regular y el coste fijo de mano de obra en un período. La constante c_{13} no afecta a la solución pero debe considerarse para poder estimar c_{01} fiablemente a partir de la información histórica de costes de que se disponga (*fig. 3.1.3.4*).

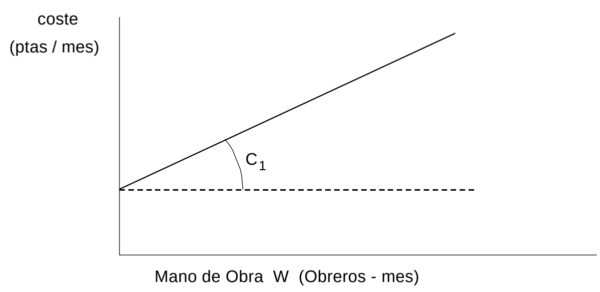

Fig. 3.1.3.4 Nómina de empleados (mano de obra directa)

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

- Costes de contratación y despido:

$$c_{02} \cdot \left[W_t - W_{t-1} - c_{11} \right]^2$$

donde la constante c_{11} mejora el ajuste cuando los costes de contratación y despido son diferentes (*fig. 3.1.3.5*)

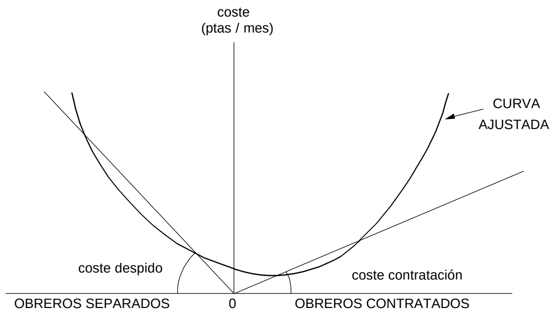

Fig. 3.1.3.5 Costes de contratacion y despido

- Costes de horas extra, sobreproducción y subproducción:

$$c_{03} \cdot \left[X_t - c_{04} \cdot W_t \right]^2 + c_{05} \cdot X_t - c_{06} \cdot W_t + c_{12} \cdot X_t \cdot W_t$$

Si el nivel de mano de obra permanece constante los cambios en la tasa de producción deberán absorberse mediante horas extra o tiempo ocioso. El coste del tiempo ocioso es el de la mano de obra que se paga normalmente, y el de las horas extra depende del número de trabajadores y de la tasa de producción. La justificación de la expresión se adapta a lo ya indicado donde $c_{04} \cdot W_t$ corresponde a la producción ideal con la plantilla W_t. Dado que cada uno de los trabajadores tiene una función más o menos especializada, es probable que si la producción aumenta poco, también sean pocos los empleados necesarios en los cuellos de botella; pero cuando la producción sigue aumentando se requieren más trabajadores haciendo horas extra, de una forma más que proporcional, con lo cual una función cuadrática puede reflejar convenientemente tal situación. Se añadirá a lo anterior el que progresivamente los medios e instalaciones se utilizarán en forma más inadecuada, incrementando por tanto el coste. A medida que la tasa de producción X_t excede $c_{04} \cdot W_t$, los costes de horas extra empiezan a actuar cuadráticamente, pero para mejorar el ajuste se añaden los términos lineales y el bilineal *(fig. 3.1.3.6)*.

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

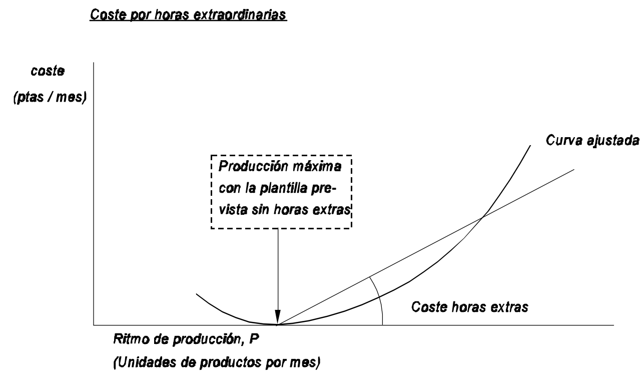

Fig. 3.1.3.6 Sobrecostes de producción (horas extra)

- Costes de stock, retrasos y puestas a punto:

$$c_{07} \cdot \left[I_t - II_t\right]^2 = c_{07} \cdot \left[I_t - c_{08} - c_{09} \cdot D_t\right]^2$$

Estos costes se suponen porporcionales al cuadrado de la diferencia entre el stock neto real y el stock neto ideal II_t. Si $I_t > II_t$ los costes de posesión y almacenamiento en los que se incurre son demasiado altos, mientras que si $I_t < II_t$ se incrementan los costes debido a pedidos pendientes, retrasos, urgencias, partición de lotes o lotes más pequeños de lo conveniente con el consiguiente aumento de puestas a punto. El equipo investigador inicial supuso que el stock ideal era una función lineal de la actividad durante el período, representable por el volumen de la demanda, es decir $II_t = c_{08} + c_{09} \cdot D_t$ (*fig. 3.1.3.7*).

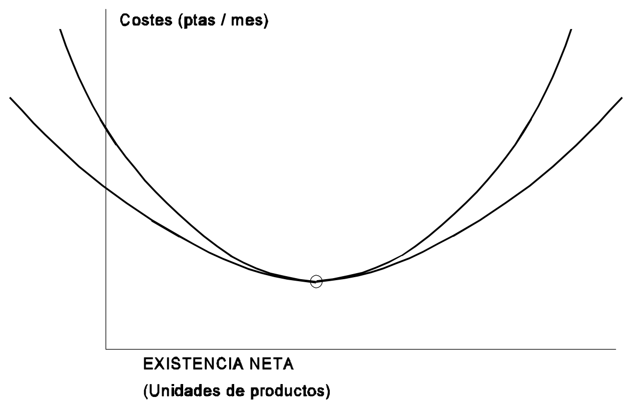

Fig. 3.1.3.7 Costes de stock y de diferir entregas

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

Modelo:

$$[MIN]\, z = \sum_{t=1}^{T} \{ c_{01} \cdot W_t + c_{13} + c_{02} \cdot \left[W_t - W_{t-1} - c_{11} \right]^2 + c_{03} \cdot \left[X_t - c_{04} \cdot W_t \right]^2 +$$
$$+ c_{05} \cdot X_t - c_{06} \cdot W_t + c_{12} \cdot X_t \cdot W_t + c_{07} \cdot \left[I_t - c_{08} - c_{09} \cdot D_t \right]^2 \}$$

sometido a:

$$I_t = I_{t-1} + X_t - D_t \; ; \qquad t = 1, 2, 3, \ldots, T$$

El modelo sólo contiene restricciones referentes al equilibrio de producción, demanda y stock y no considera limitaciones de nivel de mano de obra, horas extra, capacidad de producción, etc.

Mediante métodos analíticos y numéricos podemos deducir los valores óptimos de las variables de acción para el primer período del horizonte, que tienen el siguiente formato:

$$W_1 = \sum_{t=1}^{T} \mu_t \cdot D_t + \theta_1 \cdot W_0 + \theta_2 \cdot I_0 + \theta_3$$

$$X_1 = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t \cdot D_t + \beta_1 \cdot W_0 + \beta_2 \cdot I_0 + \beta_3$$

Reglas de decisión lineales (LDR)

donde W_0 e I_0 son los valores iniciales de la plantilla y del stock, y los $2 \cdot T + 6$ coeficientes ", $\$$, μ y *2* son función exclusivamente de las constantes c_{01}, ..., c_{13} del modelo de costes. Además los valores absolutos de μ_t y "$_t$ son decrecientes a partir de cierto valor reducido de t, lo cual implica una escasa influencia de las demandas D_t lejanas en las decisiones inmediatas.

La tercera variable del primer período claramente adopta el valor correspondiente a la restricción.

$$I_1 = I_0 + X_1 - D_1$$

Efectuando un deslizamiento temporal, podemos, a partir de los valores del primer período, determinar los del segundo:

$$W_2 = \sum_{t=1}^{T} \mu_t \cdot D_{t+1} + \theta_1 \cdot W_1 + \theta_2 \cdot I_1 + \theta_3$$

$$X_2 = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t \cdot D_{t+1} + \beta_1 \cdot W_1 + \beta_2 \cdot I_1 + \beta_3$$

$$I_2 = I_1 + X_2 - D_2$$

en donde precisamos, en todo caso, el valor D_{T+1}. El proceso puede repetirse para $t = 2$,

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

3, ..., T hasta generar un plan completo para el horizonte T, disponiendo de valores de la demanda D_t para valores de t comprendidos entre 1 y $2 \cdot T - 1$. Si la demanda no es conocida con certeza utilizaremos una previsión, en la que dado el comportamiento de los coeficientes sólo los 4 o 5 períodos primeros exigen especial cuidado.

Es más lógico aplicar el procedimiento período a período, revisando cada vez las previsiones y actualizando los valores W_0 e I_0 de acuerdo con la realidad. Un ejemplo dado en el artículo de los autores, obtenido a partir del caso real de la fábrica de pinturas pero disfrazando los valores, conduce a la siguiente ecuación de costes:

$$z = \sum_{t=1}^{T} \left\{ 340 \cdot W_t + 64{,}3 \cdot \left[W_t - W_{t-1} \right]^2 + 0{,}2 \cdot \left[X_t - 5{,}67 \cdot W_t \right]^2 + 51{,}2 \cdot X_t - 281 \cdot W_t + 0{,}0825 \cdot \left[I_t - 320 \right]^2 \right\}$$

cuya solución es:

$$X_1 = \left[D_t \right] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}463 \\ 0{,}234 \\ 0{,}111 \\ 0{,}046 \\ 0{,}013 \\ -0{,}002 \\ -0{,}008 \\ -0{,}010 \\ -0{,}009 \\ -0{,}008 \\ -0{,}007 \\ -0{,}005 \end{bmatrix} + 0{,}993 \cdot W_0 + 153 - 0{,}464 \cdot I_0$$

$$W_1 = 0{,}743 \cdot W_0 + 2{,}09 - 0{,}010 \cdot I_0 + \left[D_t \right] \cdot \begin{bmatrix} 0{,}0101 \\ 0{,}0088 \\ 0{,}0071 \\ 0{,}0054 \\ 0{,}0042 \\ 0{,}0031 \\ 0{,}0023 \\ 0{,}0016 \\ 0{,}0012 \\ 0{,}0009 \\ 0{,}0006 \\ 0{,}0005 \end{bmatrix}$$

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

donde $[D_t]$ representa el vector fila de las demandas reales o previstas. Puede observarse que, si bien el modelo es complejo, las reglas lineales a las que conduce son de aplicación sencilla, no precisando medios de cálculo especiales.

Estas reglas mostraron su potencialidad de mejora de la planificación en la fábrica de pinturas contrastándolas mediante datos históricos. Las reglas determinadas con los datos de 1949 a 1954 se aplicaron por simulación a los tres últimos años, y se obtuvieron las conclusiones:

coste real	100	
reglas con media móvil sobre 12 meses	92	(- 8)
reglas con estimación sofisticada	87	(-13)
reglas con estimación perfecta	71	(-29)

No es ocioso recordar que tanto Modigliani como Simon han sido galardonados con el premio Nobel de Economía.

3.1.3.4 Coeficientes de gestión

Bowman, que había recibido muchas críticas a su modelo basado en el algoritmo del transporte, estudió un enfoque enteramente distinto (1963) que consiste en modelizar directamente el proceso de decisión de las personas que toman las decisiones de planificación según el procedimiento que se resume a continuación. Tómese nota de que pasamos de un enfoque prescriptivo, en el que se buscan los valores óptimos de las variables de decisión a base de tratar matemáticamente un modelo en el que aparecen una función objetivo y unas restricciones con dichas variables, a uno descriptivo en el que se busca la forma en que los expertos agregan, informalmente en la mayoría de los casos, las informaciones disponibles para transformarlas en decisiones.

Inicialmente se debe definir cuáles son las variables de acción y las informaciones que se utilizan para establecer su valor, considerando las primeras como variables dependientes de las segundas, variables independientes. Mediante entrevistas con los expertos se procura estructurar un modelo que represente la relación entre dichas variables. Dicho modelo contendrá unos coeficientes cuyos valores representarán los *pesos* que los decisores asignan a los distinos elementos de información. Para estimar los valores de dichos coeficientes se pueden utilizar técnicas tales como la regresión múltiple a partir de datos históricos, probando estadísticamente la significación de la influencia de los distintos elementos de información en las decisiones tomadas, lo cual permitirá simplificar el modelo eliminando los elementos de poca influencia. Este modelo podrá usarse en el futuro para prever lo que habría hecho el decisor enfrentado a una situación descrita por ciertos elementos de información.

El interés de disponer de un modelo que describe el comportamiento del decisor estriba en la idea de que éste conoce su oficio y por consiguiente toma decisiones acertadas en

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

promedio pero que, impulsado por las urgencias, las presiones y los acontecimientos recientes altera, a veces poco hábilmente, el peso que da a los datos de un período a otro. La utilización de métodos estadísticos permite paliar dicha variabilidad de criterio y estimar los valores reales de los coeficientes de ponderación, con lo cual se puede ayudar al decisor o incluso en algunos casos substituirle.

En una versión equivalente a las reglas de HMMS, Bowman acortó el horizonte a 4 meses, y consideró únicamente el promedio de la demanda del mes 2 al 4. Consideremos las siguientes variables y parámetros adicionales:

Variables:

$$R_t = W_t - W_{t-1}$$

Parámetros:

DE_t demanda media de los períodos t+1, t+2 y t+3

DM demanda media durante el período test

WM plantilla media durante el período test

IM stock neto medio durante el período test

$a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ coeficientes

Modelo:

$$R_t = b_1 \cdot \left[DE_t - \frac{DM}{WM} \cdot W_{t-1} \right] + b_2 \cdot \left[\frac{IM}{DM} \cdot D_t - I_{t-1} \right] + a_1$$

$$X_t = b_3 \cdot W_t + b_4 \cdot \left[\frac{WM}{DM} \cdot DE_t - W_t \right] + b_5 \cdot \left[\frac{IM}{DM} \cdot D_t - I_{t-1} \right] + a_2$$

puede observarse la utilización de *DM*, *WM* e *IM* para obtener factores para la transformación de las unidades en que se miden unas variables en unidades equivalentes correpondientes a otras variables.

Ajustando los coeficientes a partir de datos históricos de la fábrica de pinturas del modelo HMMS de 1950 a 1954, y utilizando la media móvil para la previsión de la demanda obtuvo por simulación un coste significativamente inferior al real, lo que justificaba sus premisas, aunque la disminución no era tan importante como la obtenida con las reglas lineales.

El enfoque de los *coeficientes de gestión* puede ser útil en otras áreas de la dirección de operaciones, particularmente en programación, donde es difícil tratar matemáticamente ciertos problemas.

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

3.1.3.5 Modelo de Jones

El modelo debido a C. H. Jones también puede denominarse *paramétrico* y, al igual que en en el de HMMS de costes cuadráticos, llega a un conjunto de reglas de decisión lineales, pero que en lugar de derivarse analíticamente a partir de la expresión de costes se hallan por un método de búsqueda.

Las reglas de decisión establecidas son función de unos pocos parámetros cuyos valores óptimos se determinan a través de un procedimiento de búsqueda que utiliza una simulación contra datos históricos de costes y demandas, es decir, una simulación retrospectiva. Se tienen en cuenta los valores iniciales de stock, mano de obra y producción y, naturalmente, la previsión de la demanda para los próximos períodos. Se plantea el modelo de la forma siguiente período a período.

En el período $t=0$ se establece que para el período siguiente el nivel de la mano de obra será el actual W_0 más una fracción " de la diferencia entre el nivel ideal WI_1 y W_0. Puede considerarse que WI_1 sería el nivel que tendría la mano de obra en el período 1 si no hubiese ningún coste asociado al cambio de la fuerza de trabajo.

$$W_1 = W_0 + \alpha \cdot \left(WI_1 - W_0 \right) = \alpha \cdot WI_1 + (1 - \alpha) \cdot W_0$$
$$\text{con} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

es decir, que se promedian ponderadamente los valores inicial e ideal (alisado exponencial).

El modelo de Jones propone el cálculo del nivel ideal de mano de obra a través de la siguiente fórmula:

$$WI_1 = \sum_{t=1}^{T} b_t \cdot g(D_t) + b_1 \cdot \left(II_1 - I_0 \right)$$

siendo:

D_t la previsión de la demanda para el período t.

g una función que transforma unidades de producto en horas-hombre de trabajo.

b_t el peso dado a la previsión para el período t; estos pesos son monótonamente decrecientes, positivos y su suma vale 1.

II_1 el stock objetivo para el final del primer período, basándose en consideraciones de stock de seguridad y no en las de alisado; se determina externamente de forma no precisada por Jones.

I_0 el stock neto inicial (la diferencia II_1 - I_0 es la diferencia de stock a corregir en el primer período y que se multiplica por el coeficiente b_1 una vez transformada en hombres-hora equivalentes).

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

Para reducir el número de parámetros en la regla, Jones sugiere calcular b_t como:

$$b_t = \frac{\beta^t}{\sum \beta^t} \qquad 0 \le \beta \le 1$$

De forma análoga se propone la siguiente regla para la tasa de producción:

$$X_1 = h \cdot (W_1 + \tau \cdot \left(XI_1 - h(W_1) \right) \qquad 0 \le \tau \le 1$$

con:

h la función inversa de *g* que convierte hombres-hora en unidades de producto, de forma que $h(W_1)$ es la capacidad productiva normal en el período 1 con la plantilla W_1.

XI_1 el nivel ideal de la tasa de producción en el período 1, dada por:

$$XI_1 = \sum_{t=1}^{T} d_t \cdot D_t + d_1 \cdot \left(II_1 - I_0 \right)$$

Los pesos d_t se determinan fácilmente escogiendo un único parámetro *:

$$d_t = \frac{\delta^t}{\sum \delta^t} \qquad 0 \le \delta \le 1$$

Obsérvese que el modelo queda en función de cuatro parámetros: *", $, J* y * puesto que una vez fijados queda totalmente determinada la decisión para el próximo período en cuanto a mano de obra y tasa de producción. Resumiendo el significado de los parámetros:

" determina la fracción de cambio para el próximo período en el nivel de la mano de obra.

$ determina el peso relativo de las demandas futuras para equilibrar el nivel de mano de obra.

J determina la fracción de cambio que se desea realizar en el próximo período en la magnitud de la tasa de producción.

* determina el peso relativo de las demandas futuras en la regla de producción.

Para adaptar específicamente las reglas a una empresa dada se debe examinar el espacio de cuatro dimensiones a la búsqueda de la mejor combinación de valores de los cuatro parámetros, para lo cual debe plantearse una estructura de costes (función económica) sin restricciones impuestas por el modelo empleado, puesto que no se deriva de ella, que sirva de patrón de comparación de la bondad de las soluciones que se hubiesen obtenido en el

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

pasado con cada una de las combinaciones probadas en el procedimiento de simulación contra datos históricos.

Considérese como ejemplo a qué políticas conducirá el adoptar valores extremos de los parámetros (*", $, J, **):

(0, 0, 0, 0) plan de producción en el que todas las variaciones de demanda se absorben mediante fluctuación del stock sin cambios en la plantilla ni en las tasas de producción,

(0, 0, 1, 0) el stock y la plantilla se mantendrán constantes pero se ajustarán continuamente las horas trabajadas para variar la tasa de producción,

(1, 0, 0, 0) la plantilla se modifica continuamente para adaptarse a las fluctuaciones de la demanda, sin cambiar las horas trabajadas ni el stock.

Al emplear la planificación paramétrica, Jones insiste en que se utilicen heurísticas externas a su modelo, filtrando las decisiones generadas por el modelo mediante las distintas restricciones que se quieran tener en cuenta, como capacidades máximas de planta o niveles máximo y/o mínimo de plantilla, así como consideraciones de tipo político o econométrico.

Jones aplicó esta técnica en varios entornos distintos comparando los resultados obtenidos con los generados por métodos de programación lineal y de costes cuadráticos para llegar a la conclusión de que los resultados eran perfectamente comparables en cuanto a su bondad en el coste total estimado, siendo su método más simple de usar.

3.1.3.6 Modelo de las reglas de decisión por búsqueda

En 1967 Taubert desarrolló una nueva metodología, llamada reglas de decisión por búsqueda (SDR), para abordar el problema de la planificación agregada, y que consiste en la exploración (soportada mediante ordenador) del espacio de soluciones para buscar óptimos. Aplicó dicho método a la solución LDR de la fábrica de pinturas, mejorándola, y otros investigadores lo han extendido aplicándolo a entornos más complejos.

El enfoque de la SDR intenta satisfacer las necesidades de dotar de un mayor realismo los modelos utilizados para resolver el problema, sin pretender garantizar el óptimo sino una solución cercana a él. La consideración de partida se basa en que pequeñas extensiones de un modelo incrementan, generalmente de una forma muy grande, la complejidad de los métodos matemáticos que aseguran una solución óptima, por lo cual el modelizador se ve obligado a diseñar modelos de costes que se adapten a los requerimientos particulares de

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

las técnicas de resolución, lo cual repercute en una simplificación excesiva de los mismos al tener que reducir el número de variables y suponer que actúan de forma simple (cuadrática, lineal, ...) en las funciones de coste. Esta forzosa simplificación es la causa del poco uso industrial de muchos de los modelos aparecidos en la bibliografía especializada por la desconfianza de los directores o ejecutivos, que han preferido continuar usando métodos heurísticos o intuitivos.

La SDR propone la creación de un modelo de costes o beneficios lo más realista posible, expresándolo en forma de subrutina de ordenador que sea capaz de calcular el coste asociado a cualquier conjunto de valores de las variables de decisión. Matemáticamente la subrutina define una superficie de respuestas de coste de muchas dimensiones, puesto que el número de las variables de decisión y de los períodos del horizonte de planificación puede ser elevado. Se utiliza una rutina de análisis de soluciones que examina sistemáticamente la superficie de respuestas en busca del punto que representa el menor coste. No se garantiza la solución óptima, pero el método encuentra soluciones muy difíciles de mejorar. Para un solo período puede representarse el modelo como muestra la *figura 3.1.3.8*.

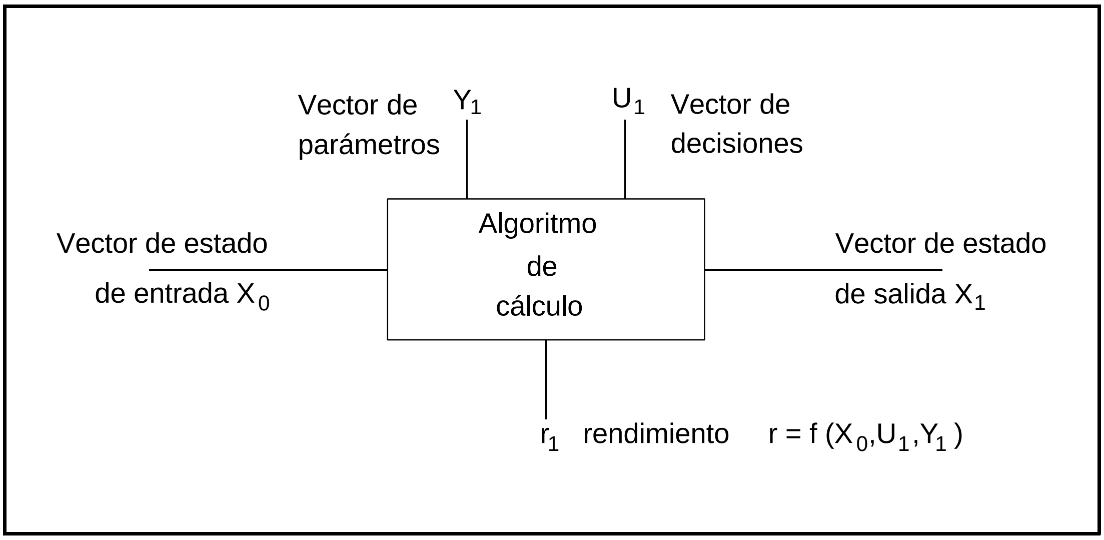

Fig. 3.1.3.8 Modelo SDR para un sólo período

Al considerar varios períodos se dice que el sistema es homogéneo (en el tiempo) si se toman funciones de coste idénticas para cada uno, y heterogéneo en caso contrario, debido a reorganizaciones, cambios técnicos en los recursos, nuevos productos, ajustes salariales, etc. El método SDR maneja con facilidad los modelos heterogéneos, que son los más interesantes, a base de utilizar una subrutina diferente para cada período. El esquema es el de la *figura 3.1.3.9*.

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

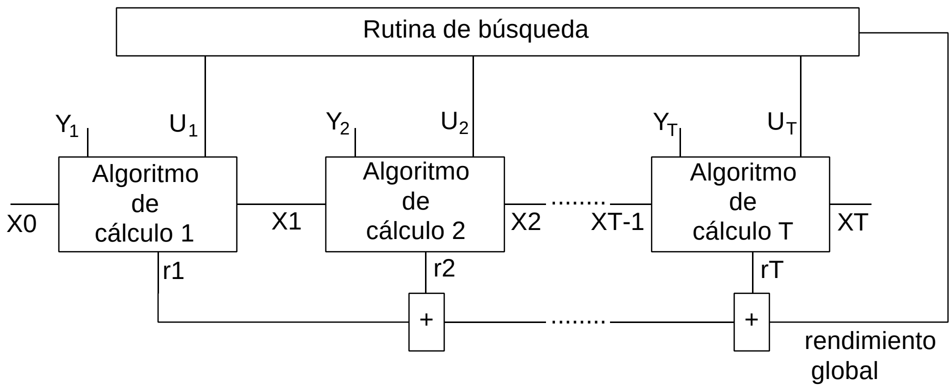

Fig. 3.1.3.9 Modelo SDR para varios períodos

El vector U_1 representa las decisiones que se han de tomar en el período en curso y los U_2, ..., U_T proporcionan una estimación o pronóstico de las posibles acciones para los períodos siguientes, pero su valor operativo es limitado puesto que el modelo se actualiza mes a mes con nuevos datos de previsión de demanda, condiciones iniciales, etc. y se ejecuta de nuevo. Sin embargo, estos resultados (U_2, ..., U_T) no se descartan puesto que sirven de vector inicial para arrancar la búsqueda en el mes 2, y así sucesivamente, con lo que aumenta la eficacia del proceso. El programa informático que implementa este sistema de planificación SDR se puede esquematizar como muestra la *figura 3.1.3.10*.

Evidentemente la parte más delicada es escoger una buena rutina de exploración. Se han probado hasta el momento muchas de ellas que se basan en el método del gradiente, en criterios heurísticos más o menos sofisticados, etc., respondiendo todos a dos preguntas básicas:

- ¿cuál es la dirección del movimiento siguiente?
- ¿de qué magnitud debe ser dicho movimiento?

Cuantitativamente se puede plantear esto mediante la siguiente ecuación iterativa:

$$U^{t+1} = U^{t} + \mu_t \cdot V^{t}$$

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

donde U^t es un vector de decisión de dimensión n, que representa la solución analizada en la t-ésima iteración, μ_t una constante positiva y V^t un vector de dirección en el espacio n-dimensional. V^t contesta a la primera pregunta y μ_t a la segunda.

Resumiendo, se podría decir que el método SDR tiene como ventajas principales el permitir modelos de costes reales, variarlos de un período a otro, considerar restricciones complejas, obtener en general resultados muy buenos y ser un método general de resolución de problemas. Como desventajas se podría citar el que la preparación de rutinas de examen es difícil (todavía más un arte que una ciencia), que puede dar en algún caso soluciones no cercanas al óptimo global y que la dimensión de la superficie de respuestas puede ser un factor limitativo.

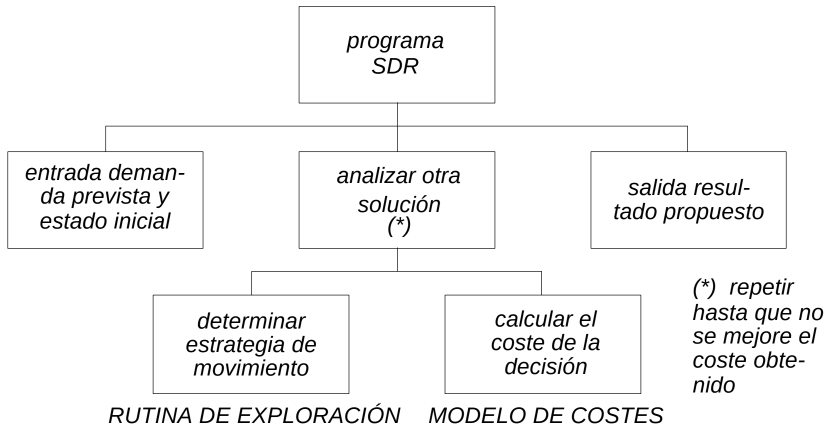

Fig. 3.1.3.10 Esquema del procedimiento SDR

3.1.4 Modelos de decisiones secuenciales (programación dinámica)

El esquema anterior de la *figura 3.1.3.9* tiene una evidente analogía con los modelos de decisiones secuenciales tratados habitualmente mediante la programación dinámica (PD), lo que muestra un posible camino para la planificación de la producción sobre varios períodos, aunque limitado por las dificultades de resolución de los modelos planteados y de la explosión de estados. Sin embargo, bajo ciertas condiciones que dependen esencialmente de la estructura de costes adoptada puede tenerse conocimiento de ciertas

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

propiedades que deberá poseer la política óptima, y de ahí la posibilidad de emplear procedimientos de cálculo de la misma mucho más sencillos que los adaptados a un caso general.

Para ilustrar la formulación orientada hacia la PD planteamos a continuación un modelo general; sea:

X_t la producción planificada para el período t (t = 1, 2, ...,T),

D_t la demanda prevista para el período t,

I_t el stock neto al final del período t,

$C_t(X,I)$ el coste en el período t de producir X unidades y tener un stock final I,

$f_t(I_0)$ el mínimo coste acumulado de los períodos t, $t+1$, ..., T, si el stock inicial es I_0,

La ecuación de recurrencia "hacia atrás" nos permite escribir:

$$f_t(I_0) = \underset{X \geq 0}{MIN} \left\{ C_t(X, I_0 + X - D_t) + f_{t+1}(I_0 + X - D_t) \right\}$$

$$\text{para} \quad t = T,\ T-1,\ \ldots,\ 2,\ 1 \quad \text{con} \quad f_{T+1}(I_0) = 0$$

a la que pueden añadirse otras restricciones existentes (por ejemplo del tipo $X_t \# P_t$ y $L1_t \# I_t \# L2_t$). Obsérvese que la ecuación de balance de stock:

$$I_{t-1} + X_t - D_t = I_t$$

nos ha permitido expresar $C_t(X_t, I_t)$ en función del stock inicial I_0 y de la tasa de producción.

Planteado así el problema pueden utilizarse los procedimientos estándar de PD para resolverlo y hallar la política de producción óptima definida por las X_t, que en definitiva constituye el plan.

Para simplificar el problema y encontrar algoritmos rápidos de resolución, en muchos casos puede suponerse que C es separable, dependiendo de un coste de posesión o almacenaje función exclusivamente del stock, y de un coste de producción dependiente únicamente de la tasa de producción X, es decir:

$$C_t(X, I) = CP_t(X) + CS_t(I)$$

Respecto a los costes CP y CS pueden considerarse distintos casos:

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

a) *CP* y *CS* son lineales

$$CP_t(X) = cp_t \cdot X \qquad \text{para } X \geq 0 \quad (cp \geq 0)$$

$$CS_t(I) = cs_t \cdot I \qquad \text{para } I \geq 0 \quad (cs \geq 0)$$

$$= cd_t \cdot (-I) \qquad \text{para } I < 0 \quad (cd \geq 0)$$

b) *CP* y *CS* son cóncavos o semicóncavos (discontinuos)

$CP(t, X) \geq 0$ cóncavo para $X \geq 0$

$CS(t, I) \geq 0$ cóncavo para $I \geq 0$ y para $I < 0$ con discontinuidad en 0

Este caso incluye el modelo con coste fijo de producción:

$$CP_t(X) = 0 \qquad \text{si } X = 0$$

$$= k_t + cp_t \cdot X \qquad \text{si } X > 0$$

c) *CP* y *CS* son convexos

Cuando el coste de un período depende no sólo de X e I, sino de la tasa de producción X_{t-1} del período anterior, es decir, se considera el coste de cambio de tasa de producción, el problema se complica. La formulación vía PD requiere dos variables de estado en cada período: el stock neto inicial y la tasa de producción del período anterior, lo cual aumenta la complejidad del cálculo. El modelo será ahora:

$$f_t(I_0, X_0) = \underset{X \geq 0}{MIN} \left\{ C_t(X, I, X_0) + f_{t+1}(I, X) \right\}$$

$$\text{con } I = I_0 + X - D_t$$

Al igual que antes, en ciertos casos puede suponerse la separabilidad de costes:

$$C_t(X, I, X_0) = CP_t(X) + CS_t(I) + CC_t(X, X_0)$$

siendo $CC_t(X,X_0)$ el coste de cambio de la tasa de producción, las formulaciones típicas que se encuentran en la bibliografía especializada son las siguientes:

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

$$CC_t(X, X_0) = \mu_t \cdot |X - X_0|$$

$$CC_t(X, X_0) = \mu_t^+ \cdot MAX\{0, X - X_0\} + \mu_t^- \cdot MAX\{0, X_0 - X\}$$

$$CC_t(X, X_0) = \mu_t \cdot (X - X_0)^2$$

$$CC_t(X, X_0) = k_t \quad \text{si } X > 0 \text{ y } X_0 = 0$$

$$= 0 \quad \text{en los otros casos}$$

$$\begin{aligned} CC_t(X, X_0) &= k1_t \quad \text{si } X > 0 \text{ y } X_0 = 0 \\ &= k2_t \quad \text{si } X = 0 \text{ y } X_0 > 0 \\ &= 0 \quad \text{en los otros casos} \end{aligned}$$

3.1.5 Modelos de flujos en grafos

La mayoría de los problemas de programación agregada admiten una representación en forma de grafo que vamos a explicitar en los ejemplos siguientes.

a) Un producto, una etapa, sin rupturas. Considérese la estructura de la *figura 3.1.5.1*.

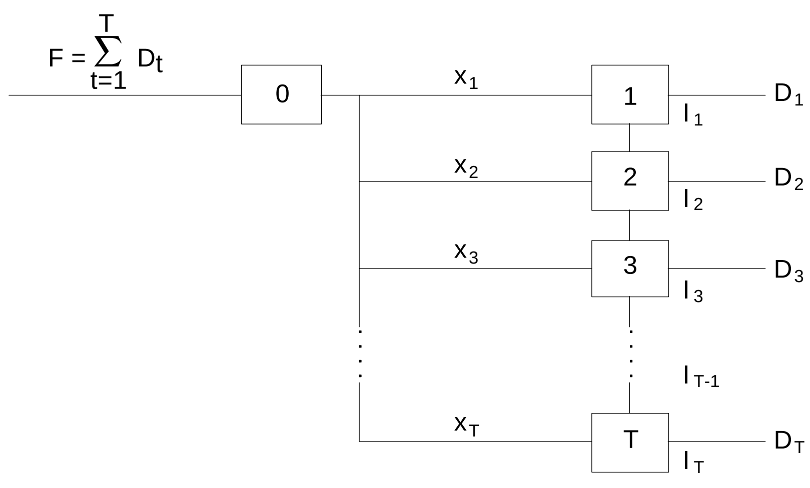

Fig. 3.1.5.1 Monoproducto, monoetapa, sin rupturas

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

Suponiendo que hay un coste asociado a cada arco según su flujo, $CP_t\,(t,X_t)$ y $CS_t\,(t,I_t)$ el problema consiste en escoger la opción de mínimo coste. Matemáticamente hay que hallar las X_t tales que minimicen:

$$z = \sum_{t=1}^{T} CP_t(X_t) + \sum_{t=1}^{T-1} CS_t(I_t)$$

con:

$$\sum_{t=1}^{T} D_t = \sum_{t=1}^{T} X_t$$

$$I_{t-1} + X_t - D_t = I_t \qquad \text{para todo } t \text{ (excepto } t = 1 \text{ y } t = T)$$

$$I_t\,,\ X_t \geq 0$$

siendo las demandas netas (deduciendo un eventual I_0 de los primeros valores de D_t y acumulando un stock final objetivo, si existe con D_T para obtener:

$$X_1 - D_1 = I_1$$

$$I_{T-1} + X_T - D_T = 0$$

b) Permitiendo demanda diferida los flujos entre los vértices adoptan la forma de la *figura 3.1.5.2*.

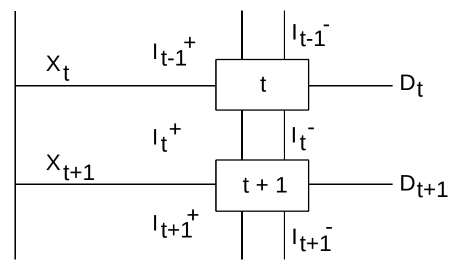

Fig. 3.1.5.2 Monoproducto, monoetapa, con diferidos

La función de coste del flujo es ahora:

$$z = \sum_{t=1}^{T} \left[CP_t(X_t) + CS_t(I_t^+) + CD_t(I_t^-) \right]$$

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

con las condiciones de contorno que se impongan para el vértice *T* (en principio $I_T^+ = I_T^- = 0$)

c) Con múltiples etapas (en la *figura 3.1.5.3*, 3 etapas):

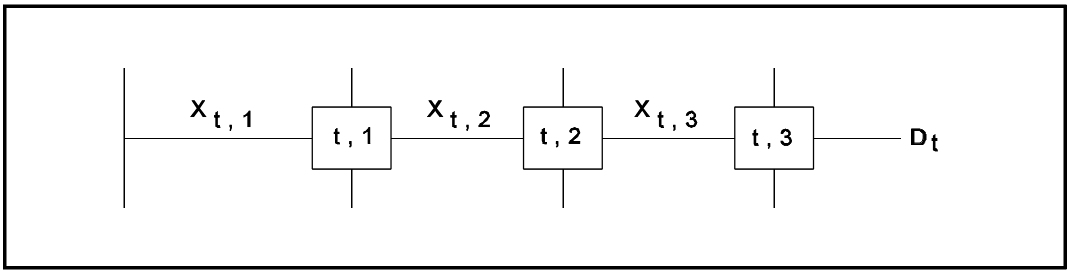

Fig. 3.1.5.3 Múltiples etapas

Para todos estos casos y otros, cuando los costes son cóncavos, Zangwill estudió las propiedades de la solución óptima de las cuales dedujo los algoritmos de resolución correspondientes.

3.1.6 Planificación mediante modelos lineales

Una herramienta muy poderosa para la planificación es la constituida por los modelos lineales, cuyo tratamiento numérico puede realizarse mediante el algoritmo símplex del que existen en el momento presente numerosos paquetes informáticos para ordenadores y micro-ordenadores en el mercado.

TIPOLOGÍA DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS MODELOS LINEALES DE PLANIFICACIÓN		
01-HORIZONTE	monoperíodo	multiperíodo
02-PRODUCTOS	monoproducto	multiproducto
03-RECURSOS CRÍTICOS	uno	varios
04-ETAPAS DE FABRIC.	monoetapa	multietapa
05-RUPTURAS	imposibilidad	retrasos/pérdida
06-DEMANDA	determinada	previsión
07-PLANTILLA	fija	variable
08-INSTALACIONES	definidas	variables
09-NIVEL PRODUCTIVO	uno	varios
10-PROCESOS	definidos	variables

Fig. 3.1.6.1 Características a tener en cuenta en los modelos lineales

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

En la *figura 3.1.6.1* hemos indicado algunas de las características de los modelos lineales de planificación. Dichas características pueden obligar a utilizar formatos de variables y/o restricciones peculiares. A continuación señalamos algunos:

- *Multiperíodo*

  Introduce el índice temporal, *t*, y las restricciones correspondientes a la conservación del flujo:

$$I_t = I_{t-1} + X_t - D_t$$

- *Multiproducto*

  Además del índice de producto *i*, la utilización conjunta de los recursos por varios productos conduce a restricciones de capacidad:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{k,i} \cdot X_{i,t} \leq b_{k,t} \qquad k = 1, 2, \ldots, K$$
$$t = 1, 2, \ldots, T$$

- *Multietapa*

  Obligará a considerar en la planificación productos semielaborados, con sus ecuaciones de flujo correspondientes, y expresiones que relacionen componentes con compuestos.

- *Aceptación de rupturas*

  El stock considerado en las expresiones de flujo corresponde al stock neto y para poder penalizar diferencialmente las existencias y los débitos deben materializarse ambos conceptos a partir de restricciones como:

$$I_t = I^+ - I_t^-$$

- *Demanda prevista*

  Habitualmente llevará a introducir stock de seguridad

- *Plantilla variable*

  Además del impacto de la plantilla existente en un período determinado en la capacidad productiva del mismo, obligará a considerar las variaciones de plantilla (y su repercusión en el coste):

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

$$W_t = W_{t-1} + \delta_t^+ - \delta_t^-$$

- *Instalaciones variables*

  Una de las preguntas de la planificación se centrará en qué instalaciones están activas en cada período y cuáles no, lo que implicará la utilización de variables binarias (0/1).

- *Varios niveles productivos*

  Llevará a distinguir la producción realizada en cada nivel (por ejemplo en horas normales y en horas extra) con sus limitaciones de capacidad y costes propios.

- *Procesos variables*

  La elección del proceso concreto para cada producto exigirá variables específicas, en su caso binarias, si dichos procesos son alternativos.

3.1.6.1 Modelo lineal con entregas diferidas y variación de plantilla

Hipótesis:

- Un solo producto y un solo nivel productivo.
- El producto puede almacenarse.
- Las entregas pueden diferirse indefinidamente.
- No hay coste fijo de producción, ni coste fijo de cambio de nivel de producción.
- El coste unitario de diferir una unidad no depende de la magnitud del retraso en la entrega.
- La variación de la capacidad productiva se realiza mediante el incremento o la disminución de las unidades existentes de un recurso (plantilla), estando asociado un coste a dicha variación.
- Las unidades producidas durante un período pueden utilizarse para atender la demanda de dicho período.

Variables:

- X_t cantidad planificada de producción durante el período *t*,
- W_t plantilla disponible durante el período *t*,
- δ_t^+ aumento de plantilla entre *t-1* y *t*,
- δ_t^- disminución de plantilla entre *t-1* y *t*,
- I_t stock neto al final del período *t*,
- I_t^+ stock físico (en mano) al final de *t*,
- I_t^- entregas diferidas (unidades) al final de *t*,

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

Parámetros:

- t índice de tiempo (t = 1, 2, 3, ..., T)
- D_t demanda o consumo, previsto o acordado, durante el período t,
- n_t factor que transforma el número de operarios en número de unidades producibles o capacidad de producción en el período t,
- c_t coste (variable) unitario de producción (de la única fuente) durante el período t,
- h_t coste de almacenar una unidad del producto de t a $t+1$,
- B_t coste de diferir la entrega de una unidad del período t al período $t+1$,
- $"_t$ coste de contratar un operario al inicio del período t,
- $\$_t$ coste de despedir un operario al inicio de t,
- PM plantilla máxima posible (limitada por las instalaciones)

Datos iniciales:

- I_0 stock inicial,
- W_0 plantilla inicial.

Modelo:

$$[MIN]\ z = \sum_{t=1}^{T} \left[c_t \cdot X_t + h_t \cdot I_t^+ + \pi_t \cdot I_t^- + \alpha_t \cdot \delta_t^+ + \beta \cdot \delta_t^- \right]$$

s.a

$$I_t = I_{t-1} + X_t - D_t$$

$$I_t = I_t^+ + I_t^-$$

$$X_t \le n_t \cdot W_t$$

$$W_t = W_{t-1} + \delta_t^+ - \delta_t^-$$

$$W_t \le PM$$

$$X_t\ ,\ I_t^+\ ,\ I_t^-\ ,\ W_t\ ,\ \delta_t^+\ ,\ \delta_t^- \ge 0 \qquad t = 1, 2, ..., T$$

Un nuevo tipo adicional de restricción es:

$$L1_t \le I_t \le L2_t$$

$L1_t < 0$ indica el límite aceptable de unidades diferidas en el período t,
$L2_t > 0$ indica la capacidad de almacén en el período t.

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

(Naturalmente si $L1_t = 0$, o bien $L2_t = 0$ podemos utilizar el modelo anterior, pero será más adecuado simplificarlo eliminando la variable I_t^- o I_t^+ correspondiente.)

Comentarios:

1) Aunque el modelo, tal como se ha escrito, presupone una sola fuente de producción, no es difícil generalizar, si introducimos, por ejemplo, la posibilidad de horas extra; sea:

Y_t cantidad planificada de producción durante el período t en horas extra,

e_t coeficiente que transforma la plantilla en capacidad de producción en tiempo extra durante el período t,

c'_t coste variable de producir una unidad en tiempo extra durante el período t.

La función objetivo sería ahora:

$$[MIN]\, z = \sum_{t=1}^{T} \left[c_t \cdot X_t + c_t' \cdot Y_t + h_t \cdot I_t^+ + \pi_t \cdot I_t^- + \alpha_t \cdot \delta_t^+ + \beta_t \cdot \delta_t^- \right]$$

la restricción de la demanda quedaría:

$$I_t = I_{t-1} + X_t + Y_t - D_t$$

debiéndose añadir la restricción de limitación del tiempo extra:

$$Y_t \leq e_t \cdot W_t$$

2) El coste de mantenimiento de la plantilla se considera incluido en c_t; si la plantilla percibiera, como suele ocurrir, un salario independientemente de su nivel de producción, podríamos adoptar:

c_t coste (variable) unitario de producción en horas normales durante el período t, excluido el coste de la mano de obra directa,

s_t salario durante el período t de un operario (independiente del trabajo realizado),

añadiendo el término $s_t \cdot W_t$ a la función económica:

$$[MIN]\, z = \sum_{t=1}^{T} \left[s_t \cdot W_t + c_t \cdot X_t + c_t' \cdot Y_t + h_t \cdot I_t^+ + \pi_t \cdot I_t^- + \alpha_t \cdot \delta_t^+ + \beta_t \cdot \delta_t^- \right]$$

Esta formulación puede considerarse como la versión linealizada del modelo HMMS.

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

3.1.6.2 Modelo multiproducto, con limitación de recursos

Hipótesis:

- Varios productos (o familias de productos).
- Varios recursos productivos compartidos por los productos.
- Los productos se pueden almacenar.
- Las entregas pueden diferirse.
- No hay coste fijo de producción, ni coste fijo de cambio de nivel de producción.
- La variación de la capacidad productiva viene definida exógenamente a partir de la disponibilidad de recursos; no entra en la planificación la posibilidad de aumento o disminución de dicha disponibilidad.
- Las unidades producidas durante un período pueden utilizarse para atender la demanda de dicho período.

Variables:

- $X_{i,t}$ producción del producto i durante t,
- $I_{i,t}$ stock neto de i al final de t,
- $I_{i,t}^+$ stock en mano de i al final de t,
- $I_{i,t}^-$ P unidades diferidas de i al final de t.

Parámetros:

- t índice de tiempo ($t = 1, 2, 3, ..., T$)
- i índice de producto ($i = 1, 2, 3, ..., n$)
- k índice de recurso ($k = 1, 2, 3, ..., K$)
- $D_{i,t}$ demanda del producto i durante el período t,
- $c_{i,t}$ coste (variable) unitario de producción de i en t,
- $h_{i,t}$ coste de almacenaje de una unidad de i de t a $t+1$,
- $B_{i,t}$ coste de diferir la entrega de una unidad de i de t a $t+1$,
- $a_{k,i}$ coeficiente tecnológico: cantidad del recurso k necesaria para fabricar una unidad de i (se supone constante a lo largo del horizonte),
- $b_{k,t}$ cantidad del recurso k disponible en t (se supone que la parte eventualmente inempleada no es transportable a $t+1$).

Modelo:

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

$$[MIN]\, z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} \left[c_{i,t} \cdot X_{i,t} + h_{i,t} \cdot I_{i,t}^{+} + \pi_{i,t} \cdot I_{i,t}^{-} \right]$$

s.a

$$I_{i,t} = I_{i,t-1} + X_{i,t} - D_{i,t} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$I_{i,t} = I_{i,t}^{+} + I_{i,t}^{-} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{k,i} \cdot X_{i,t} \le b_{k,t} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, K$$

$$t = 1, 2, 3, \ldots, T$$

$$X_{i,t},\ I_{i,t}^{+},\ I_{i,t}^{-} \ge 0$$

Datos iniciales: $I_{i,0}$

Restricciones adicionales:

$$L1_{i,t} \le I_{i,t} \le L2_{i,t}$$

$$P1_{i,t} \le X_{i,t} \le P2_{i,t}$$

3.1.6.3 Modelo multicentro

Hipótesis:

- Varios productos (o familias de productos).
- Varios centros de producción que producen productos comunes.
- Varios recursos productivos compartidos por los productos.
- Varios centros de consumo (o distribución) a los que hay que transportar los productos.
- Los productos se pueden almacenar en los centros productivos.
- Las entregas no pueden diferirse.
- No hay coste fijo de producción, ni coste fijo de cambio de nivel de producción.
- La variación de la capacidad productiva viene definida exógenamente a partir de la disponibilidad de recursos; no entra en la planificación la posibilidad de aumento o disminución de dicha disponibilidad.
- Las unidades producidas durante un período pueden transportarse y utilizarse para atender la demanda de dicho período.

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

Variables:

- $X_{i,j,t}$ producción del producto i en la fábrica j durante el período t,
- $I_{i,j,t}$ stock de i situado en j al final de t,
- $Y_{i,j,l,t}$ cantidad de i transportada desde j a l en t.

Parámetros (adicionales):

- t índice de tiempo (t = 1, 2, 3, ..., T)
- i índice de producto (i = 1, 2, 3, ..., n)
- k índice de recurso (k = 1, 2, 3, ..., K)
- j fábrica o centro de producción (j = 1, 2, ..., J)
- l depósitos o centros de consumo (l = 1, 2, ..., L)
- $D_{i,l,t}$ demanda del producto i en el depósito l durante el período t,
- $c_{i,j,t}$ coste (variable) unitario de producción de i en la fábrica j durante t,
- $h_{i,j,t}$ coste de almacenaje de una unidad de i en j de t a $t+1$,
- $r_{i,j,l}$ coste unitario de transportar el producto i de j a l (supuesto constante durante el horizonte),
- $a_{k,i,j}$ coeficiente tecnológico: cantidad del recurso k necesaria para fabricar una unidad de i en j,
- $b_{k,j,t}$ cantidad del recurso k disponible en j durante t.

Modelo:

$$[MIN]\, z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} \left[c_{i,j,t} \cdot X_{i,j,t} + h_{i,j,t} \cdot I_{i,j,t} + \sum_{l=1}^{L} r_{i,j,l} \cdot Y_{i,j,l,t} \right]$$

s.a

$$I_{i,j,t} = I_{i,j,t-1} + X_{i,j,t} - \sum_{l=1}^{L} Y_{i,j,l,t}$$

$$\sum_{j=1}^{J} Y_{i,j,l,t} = D_{i,l,t} \qquad l = 1, 2, 3, \ldots, L$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{k,i,j} \cdot X_{i,j,t} \leq b_{k,j,t} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, K$$

$$t = 1, 2, 3, \ldots, T$$

$$X_{i,j,t}\,,\; I_{i,j,t}\,,\; Y_{i,j,l,t} \geq 0$$

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

Datos adicionales: $I_{i,j,0}$

Comentarios: Este modelo acumula al anterior el efecto del transporte desde las fábricas a los depósitos.

3.1.7 Planificación jerárquica: desagregación

El esquema que vamos a presentar a continuación está basado en los trabajos de Bitran, Hax, Meal y otros autores, fundamentalmente coincide con algunas de las ideas que hemos ido expresando en los párrafos anteriores de las que constituye un reflejo concreto. Se consideran tres niveles en la agregación de productos:

1. Artículos (*items*) son los productos finales que reciben los clientes y representan el máximo grado de especificación relativo a los productos fabricados.

2. Familias (*families*) son grupos de artículos que poseen el mismo lanzamiento a fabricación (y por tanto el mismo coste de lanzamiento); por ello se realizan economías de escala agrupando lotes de fabricación pertenecientes a la misma familia.

3. Tipos (*types*) son grupos de familias cuyas cantidades se determinarán mediante un plan agregado; las familias pertenecientes al mismo tipo tienen normalmente un coste unitario variable de producción similar y una estructura estacional de la demanda también similar.

Estos tres niveles son suficientes para caracterizar la estructura del producto en muchos ambientes productivos con fabricación en lotes, aunque podría definirse, para aplicaciones concretas, un número distinto de niveles.

El primer paso de la planificación jerárquica consiste en asignar la capacidad de producción a los tipos mediante un modelo de planificación agregada, normalmente con un horizonte de un año para tener en cuenta las fluctuaciones estacionales de la demanda. Los autores proponen un modelo lineal y su resolución mediante la programación lineal; su peor defecto es que en dicho modelo pueden tenerse en cuenta los costes variables de producción pero no los costes de lanzamiento. El segundo paso consiste en repartir las cantidades de cada tipo entre las familias que lo forman, desagregando los resultados obtenidos en el paso anterior. Usualmente se desagrega únicamente el primer período del horizonte, por lo que la cantidad de datos que se precisan y su proceso se reduce considerablemente. La desagregación debe garantizar la coherencia entre las decisiones de producción de tipos y familias y la factibilidad de ambas, a la vez que intenta minimizar los costes totales de lanzamiento en la fabricación de familias. Finalmente la producción de las familias se distribuye entre los artículos; el objetivo de esta última desagregación, además de la

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

coherencia y factibilidad, es mantener los artículos en niveles de stock que maximicen el plazo entre lanzamientos de la familia.

El procedimiento recibe el nombre RKM ("regular knapsack method") a causa de los modelos de desagregación utilizados basados en el denominado problema de la mochila ("knapsack problem").

El primer paso utiliza un modelo similar al descrito en **3.1.7.2.** El modelo de desagregación en familias es el siguiente:

$$[\,MIN\,] \sum_{j \in j_0} \frac{CL_j \cdot D_j}{Y_j}$$

s.a

$$\sum_{j \in J_0} Y_j = X_i$$

$$a_j \leq Y_j \leq b_j \qquad j \in J_0$$

donde:

- Y_j número de unidades a producir de la familia j,
- CL_j coste de lanzamiento de la familia j,
- D_j demanda prevista de la familia j (usualmente anual),
- a_j, b_j cotas inferior y superior de Y_j,
- X_i cantidad total que debe distribuirse entre las familias del tipo i (determinada en el plan agregado),
- J_0 familias activas durante el actual período de planificación (es decir tales que su stock inicial disponible no puede absorber toda la demanda prevista dentro del período de vigencia de la actual decisión).

Siendo L el plazo de fabricación, el período de vigencia es L más el tiempo entre revisiones del plan, usualmente 1. Este mismo concepto se utiliza para determinar la cota inferior a_j:

$$a_j = \max\left\{0\,,\left(d_{j,1} + d_{j,2} + \ldots + d_{j,L+1}\right) - I_j + ss_j\right\}$$
$$b_j = IL_j - I_j$$

donde:

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

- $d_{j,t}$ demanda prevista de la familia j en el período t,
- I_j posición de stock inicial de la familia j (suma del stock físico disponible, más órdenes menos débitos),
- ss_j stock de seguridad de la familia j,
- IL_j stock límite para la familia j.

Si $\sum_{j \in J_0} b_j < X_i$ asignando producción a las familias activas no se puede utilizar toda la cantidad de producción asignada al tipo, el modelo de desagregación no es factible; en la práctica se hará:

$$Y_j = b_j \qquad j \in J_0$$

y el sobrante se asignará a familias no activas.

Si $\sum_{j \in J_0} a_j > X_i$ el modelo de desagregación no es factible; fatalmente, deberán planificarse débitos (por ejemplo proporcionalmente a a_j).

Si $\sum_{j \in J_0} a_j \le X_i \le \sum_{j \in J_0} b_j$ el modelo de desagregación es factible. Si no existiesen las cotas de Y_j su resolución sería sencilla. Llamemos, para simplificar

$$(u_j)^2 = CL_j \cdot D_j$$

y escribamos el lagrangiano:

$$L = \sum_{j \in J_0} \frac{(u_j)^2}{Y_j} + \mu \cdot \left(\sum_{j \in J_0} Y_j - X_i \right)$$

y derivando:

$$\frac{(u_j)^2}{(Y_j)^2} = \mu \qquad j \in J_0$$

$$\sum_{j \in J_0} Y_j = X_i$$

de donde:

$$Y_j = \frac{u_j}{\sum_{j \in J_0} u_j} \cdot X_i \qquad j \in J_0$$

Se reparte pues X_i proporcionalmente a las u_j. En caso de que se cumplan las acotaciones la solución es óptima; en caso contrario, deberemos utilizar un algoritmo que progresivamente fija los valores de Y_j que las incumplen a sus valores límite:

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

inicialización: $s = 1,\ P_1 = X_i,\ J_1 = J_0$

paso 1: calcular para todo $j \in J_s$

$$Y_j(s) = \frac{u_j}{\sum\limits_{j \in J_s} u_j} \cdot P_s$$

paso 2: comprobar para todo $j \in J_s$ si $a_j \leq Y_j(s) \leq b_j$
si es así hemos alcanzado el óptimo, fin
en caso contrario, **ir al paso 3**

paso 3: determinar $J_s^+ = \{ j \in J_s : Y_j(s) \geq b_j \}$

$$J_s^- = \{ j \in J_s : Y_j(s) \leq a_j \}$$

determinar $\alpha = \sum\limits_{j \in J_s} \left[Y_j(s) - b_j \right]$, $\beta = \sum\limits_{j \in J_s} \left[a_j - Y_j(s) \right]$

paso 4: si $\alpha \geq \beta$ hacer $Y_j = b_j,\ j \in J_s^+$

$$J_{s+1} = J_s - J_s^+ \quad , \quad P_{s+1} = P_s - \sum_{j \in J_s^+} b_j$$

si $\alpha < \beta$ hacer $Y_j = a_j,\ j \in J_s^-$

$$J_{s+1} = J_s - J_s^+ \ , \ P_{s+1} = P_s - \sum_{j \in J_s^-} a_j$$

si $J_s + 1$ es vacío, **fin**
en caso contrario, **ir al paso 1**

El algoritmo es finito ya que en cada iteración se fija por lo menos el valor de la producción de una familia.

Cuando llegamos a la desagregación en artículos se han considerado en teoría todos los costes; por tanto, todas las soluciones darán el mismo coste. Sin embargo la solución elegida establecerá las condiciones inciales para el próximo ciclo de planificación y afectará a los costes futuros. Para ahorrar lanzamientos en el futuro, pueden distribuirse las cantidades de la familia entre los artículos de forma que los tiempos de rotación de los mismos coincidan con el tiempo de rotación de la familia, lo que tiene como consecuencia que toda la familia se volverá activa a la vez. Para lograrlo los autores proponen el modelo:

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

$$[MIN]\ \frac{1}{2}\cdot\sum_{k\in K_0}\left[\frac{Y_j+\sum_{k\in K_0}(I_k-ss_k)}{\sum_{k\in K_0}\sum_{t=1}^{L+1}d_{k,t}}-\frac{Z_k+I_k-ss_k}{\sum_{t=1}^{L+1}d_{k,t}}\right]^2$$

sometido a:

$$\sum_{k\in K_0}Z_k=Y_j$$

$$Z_k\le IL_k-I_k$$

$$Z_k\ge \max\left\{0\ ,\ \sum_{t=1}^{L+1}d_{k,t}-I_k+ss_k\right\}$$

donde:

- Z_k número de unidades a producir del artículo *k*,
- I_k,ss_k,IL_k posición de stock, stock de seguridad y stock límite del artículo *k*,
- $d_{k,t}$ demanda prevista del artículo *k* en *t*,
- K_0 indíce de los artículos de la familia *j*,
- Y_j cantidad total a distribuir entre los artículos de la familia *j*, determinada con el modelo anterior.

El modelo busca la minimización de la suma de las discrepancias cuadráticas entre el tiempo de rotación de la familia y el de los artículos (el 1/2 se ha escrito por conveniencia en la formulación). Haciendo:

$$h_k=Z_k+I_k-ss_k\quad ;\quad h=Y_j+\sum_{k\in K_0}\left(I_k-ss_k\right)$$

$$D_k=\sum_{t=1}^{L+1}d_{k,t}\qquad ;\quad D=\sum_{k\in K_0}D_k$$

$$b_k=IL_k-ss_k$$

$$a_k=\max\left\{0\ ,\ D_k-I_k+ss_k\right\}+I_k-ss_k=\max\left\{I_k-ss_k\ ,\ D_k\right\}$$

el modelo queda:

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

$$[MIN]\ \frac{1}{2}\cdot\sum_{k\in K_0}\left[\frac{h}{D}-\frac{h_k}{D_k}\right]^2$$

sometido a:

$$\sum_{k\in K_0} h_k = h$$

$$a_k \le h_k \le b_k \qquad k\in K_0$$

Prescindiendo de las acotaciones, la solución obtenida sería:

$$h_k = \frac{D_k}{D}\cdot h$$

es decir, el reparto de h proporcionalmente a D_k. Si estos valores satisfacen las acotaciones porporcionan la solución óptima; en caso contrario se deberá utilizar un algoritmo semejante al visto para el reparto entre las familias que vaya fijando progresivamente en sus valores límite las variables que adoptan valores fuera de su intervalo de variación.

3.1.8 Planificación de la producción de unidades homogéneas

Analizaremos a continuación unos procedimientos originales desarrollados en parte para unas aplicaciones industriales concretas y dentro de un proyecto de investigación subvencionado por la DGICYT (PB 89-0504).

3.1.8.1 Introducción

En ciertos sistemas productivos, especialmente en aquéllos en los que existe una línea de montaje final, los productos pueden agruparse en familias de acuerdo con los requerimientos productivos, y las restricciones de producción, las que permiten definir si un plan maestro es factible o no, se reducen a la limitación del número máximo de unidades a producir por unidad de tiempo de ciertas familias o grupos de familias. En dichos sistemas productivos es natural referirse al volumen de producción midiéndolo en unidades por unidad de tiempo y por dicha causa los denominaremos *sistemas de producción de unidades homogéneas*. Un ejemplo típico de este caso lo encontramos en la fabricación de automóviles.

En la *figura 3.1.8.1* presentamos un ejemplo, basado en una situación real: los productos de la empresa HJ se pueden agrupar en ocho familias, y existen cuatro restricciones o

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

recursos limitados a tener en cuenta para la elaboración del plan. La familia o conjunto de familias a las que alude la restricción, es decir, que consumen el recurso limitado, son las que en la tabla en la columna y fila correspondiente tienen un 1, y las que no están afectadas las que tienen un blanco (que podemos interpretar como un 0). La restricción PROD_A señala que la suma de las cantidades de productos de las cuatro primeras familias a producir un día determinado no puede superar las 86 unidades (posiblemente esta es la capacidad de la cadena propia al modelo A). La restricción PROD_LARGOS indica que la suma de unidades a producir determinado día de las familias 4, 5, 7 y 8 no puede superar las 36 unidades (la causa puede ser que estos productos calificados de "largos" ocupan mayor posición en la cadena de montaje y sólo pueden intervenir, sin causar problemas y pérdida de producción, en cierta proporción en el mix de productos). Análogamente para el resto de restricciones.

k-RECURSO/	FAMILIAS								LÍMITE (L_K)
RESTRICCIÓN	F01	F02	F03	F04	F05	F06	F07	F08	un./día
1-PROD_A	1	1	1	1					86
2-PROD_B					1	1	1	1	42
3-PROD_LARGOS			1	1			1	1	36
4-PROD_CD		1		1		1		1	32

Fig. 3.1.8.1 Limitaciones en la producción de las unidades diarias de ocho familias de productos de la empresa HJ

La clasificación de los productos concretos en familias puede haberse realizado explícitamente, lo que significa que en la definición del producto se ha incluido la familia de pertenencia, o bien resultar indirectamente de los valores concretos que el producto tiene de ciertas características (relacionadas con las exigencias en recursos del producto y con significado físico concreto). En el ejemplo las características consideradas son tres, con dos valores cada una de ellas, como puede verse en la *figura 3.1.8.2*.

	CARACTERÍSTICAS		
VALORES	CARACT._1 "modelo"	CARACT._2 "longitud"	CARACT._3 "conducción"
1	mod. A	corto	CD
2	mod. B	largo	CI

Fig. 3.1.8.2 Características y valores de las mismas de los productos de la empresa HJ

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

La combinación de los 2 valores de las 3 características permite definir las 8 familias de productos (*fig. 3.1.8.3*). A la familia F_{01} pertenecen aquellos productos cuyas características, tomen los valores 1, 1, 1; a la F_{02} los de valores 1, 1, 2; ....; a la F_{08} los de valores 2, 2, 2. Si en la descripción de cada producto figuran los valores de sus características resulta sencillo deducir a qué familia pertenecen y por tanto proceder a la agregación de los datos relativos a los productos para obtener los correspondientes a las familias.

valor car. 1	valor car. 2	valor car. 3	familia F_i	valor car. 1	valor car. 2	valor car. 3	familia F_i
1	1	1	F_{01}	2	1	1	F_{05}
1	1	2	F_{02}	2	1	2	F_{06}
1	2	1	F_{03}	2	2	1	F_{07}
1	2	2	F_{04}	2	2	2	F_{08}

Fig. 3.1.8.3 Valores de las características de los productos integrados en cada familia en la empresa HJ

PRODUCTO j	DESCRIPCIÓN	VALOR CAR.1	CAR.2	CAR.3	FAMILIA i
P_{0001}	xxxxxxxxxxxx	1	1	1	F_{01}
P_{0002}	xxxxxxxxxxxx	1	2	1	F_{03}
P_{0003}	xxxxxxxxxxxx	1	2	2	F_{04}
P_{0232}	xxxxxxxxxxxx	2	2	1	F_{07}

Fig. 3.1.8.4 Cartera de productos de la empresa HJ con los valores de sus características

En la *figura 3.1.8.4* se presenta un listado de los productos de HJ, en el que se indican los valores de las características y, en consecuencia, la familia de adscripción.

El número de unidades de cada familia $X_{01}, X_{02}, \ldots, X_{08}$ a producir dentro de un intervalo de tiempo t en un plan de producción factible debe satisfacer las siguientes relaciones lineales, donde $ND(t)$ es el número de días laborables del intervalo:

$$X_{01} + X_{02} + X_{03} + X_{04} \leq ND(t) \cdot 86$$

$$X_{05} + X_{06} + X_{07} + X_{08} \leq ND(t) \cdot 42$$

$$X_{03} + X_{04} + X_{07} + X_{08} \leq ND(t) \cdot 36$$

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

$$X_{02} + X_{04} + X_{06} + X_{08} \quad \leq \quad ND(t) \cdot 32$$
$$X_{01}, X_{02}, X_{03}, \ldots, X_{08} \geq 0 \text{ y enteros}$$

Normalmente existirán muchos juegos de valores que satisfarán las restricciones anteriores, incluso saturando algunas de ellas, por ejemplo:

$$X_{01} = ND(t) \cdot 86 \quad , \quad X_{05} = ND(t) \cdot 42$$
$$X_{02} = X_{03} = X_{04} = X_{06} = X_{07} = X_{08} = 0$$

Sin embargo todas las soluciones posibles no serán igualmente buenas a los ojos del planificador el cual tendrá en mente un *plan ideal*, y deseará que el plan factible elegido, si el ideal no es factible, sea lo más parecido posible, lo más *próximo* posible a dicho plan ideal. No resulta sencillo medir la *distancia* entre dos planes y plantearse como objetivo la reducción a un mínimo de la misma, puesto que el concepto de proximidad o parecido entre dos planes no carece de ambigüedad. Algunos supuestos que hemos utilizado en realizaciones prácticas nos llevarían a un procedimiento (*fig. 3.1.8.5*) basado en las siguientes líneas:

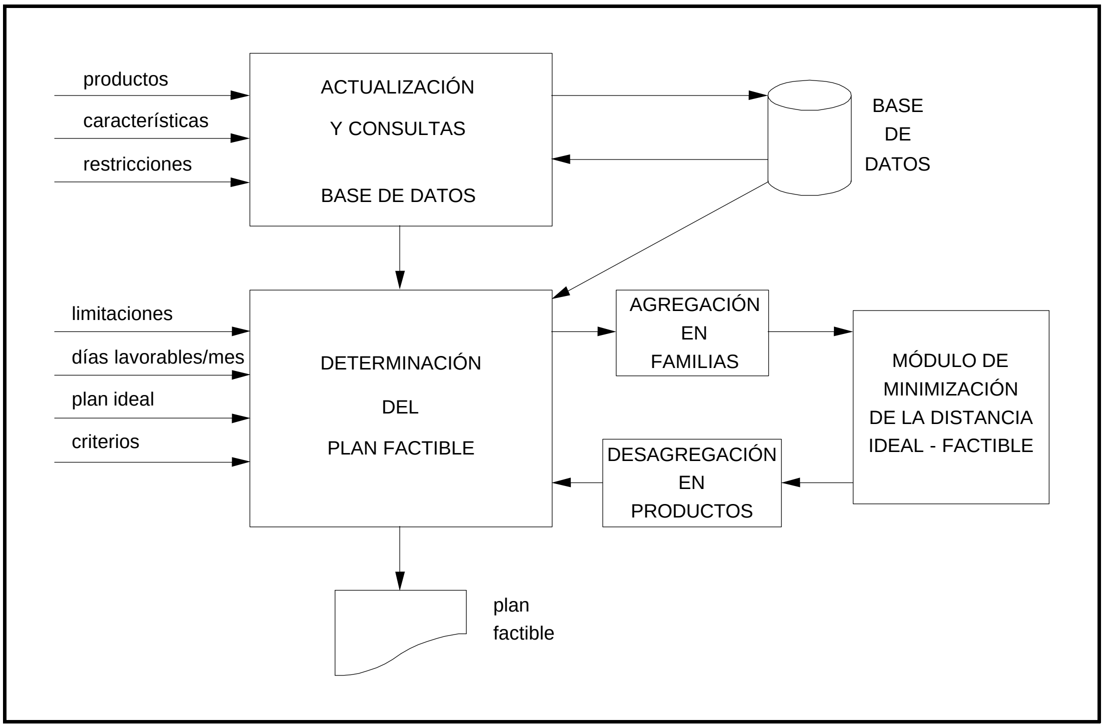

Fig. 3.1.8.5 Esquema general de determinación del plan factible a partir de uno ideal para un intervalo temporal

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

a) Dado el plan ideal en cantidades de productos, proceder a la agregación de las mismas para disponer del plan ideal en número de unidades por familia, Y_{01}, Y_{02}, ..., Y_{08}.

b) Determinar los valores del plan factible que, satisfaciendo las limitaciones de recursos productivos, den una suma de diferencias, en más o en menos, respecto a los valores ideales mínima; es decir, que minimicen:

$$z = | Y_{01} - X_{01} | + | Y_{02} - X_{02} | + \ldots + | Y_{08} - X_{08} |$$

(muy posiblemente será necesario añadir algún condicionante relativo al volumen global de producción).

c) Desagregar las cantidades de las familias en los productos en forma aproximadamente proporcional a las cantidades ideales de los mismos (utilizando técnicas también basadas en la minimización de discrepancias, bien analíticas y exactas, bien de tipo heurístico, similares a las empleadas en otras problemáticas, tales como la distribución de escaños de un parlamento en función de los votos obtenidos por las listas de los partidos, por ejemplo).

Para la realización del paso (b) hemos empleado, dada la linealidad de las restricciones, técnicas basadas en la programación lineal. La programación lineal no conduce, en general, a planes factibles cuya distancia al plan ideal posea todas las características de mínimo deseables en la realidad, pero se trata de una técnica robusta, profundamente estudiada, para la que existen paquetes informáticos para ordenadores y micro-ordenadores rápidos y cómodos. La utilización de otras técnicas que sobre el papel darían planes factibles más parecidos al ideal, como la programación cuadrática entera, no están tan a punto y en todo caso serían de ejecución más lenta.

Con los datos del ejemplo supongamos que el plan ideal para un día determinado es el indicado en la *figura 3.1.8.6*, que no es factible (excede en 4 unidades la restricción sobre la producción de largos, y en 2 la de CD). La minimización de las discrepancias, mediante la programación lineal, conduce al plan factible 1 (entre otros), en la que se ha reducido la cantidad deseada de X_{08} en 4 unidades. Probablemente otra solución en la que se redujera en una unidad las cantidades deseadas de X_{03}, X_{04}, X_{07} y X_{08}, que tiene la misma discrepancia global resultaría más agradable (plan factible 2).

Posiblemente el inconveniente mayor hallado a los planes factible 2 y 3 en la práctica sería la menor producción respecto a la del plan ideal. En éste, el número de unidades era 128 mientras que en los determinados es 124. Imponiendo que el número de unidades producidas sea por lo menos 128 obtendremos el plan factible 3, en el que la discrepancia es de 8 unidades, el doble que antes ya que las reducciones se han compensado con aumentos. La formulación del modelo lineal es la de la *figura 3.1.8.7*. No es necesario

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

imponer explícitamente la condición de integridad de las variables X, ya que dada la estructura del problema la programación lineal continua conducirá, si el sistema es compatible, a una solución entera en todas las variables.

	X_{01}	X_{02}	X_{03}	X_{04}	X_{05}	X_{06}	X_{07}	X_{08}
Plan ideal	48	12	16	10	22	6	8	6
Plan factible 1	48	12	16	10	22	6	8	2
Plan factible 2	48	12	15	9	22	6	7	5
Plan factible 3	52	12	14	8	22	6	8	6

Fig. 3.1.8.6 Planes factibles obtenidos a partir de uno ideal

$$[MIN]\,z = N_{01} + N_{02} + N_{03} + N_{04} + N_{05} + N_{06} + N_{07} + N_{08} + Q_{01} + Q_{02} + Q_{03} + Q_{04} + Q_{05} + Q_{06} + Q_{07} + Q_{08}$$

s.a

$$\begin{aligned}
&X_{01} + N_{01} - Q_{01} = 48\\
&X_{02} + N_{02} - Q_{02} = 12\\
&X_{03} + N_{03} - Q_{03} = 16\\
&X_{04} + N_{04} + Q_{04} = 10\\
&X_{05} + N_{05} - Q_{05} = 22\\
&X_{06} + N_{06} - Q_{06} = 6\\
&X_{07} + N_{07} - Q_{07} = 8\\
&X_{08} + N_{08} - Q_{08} = 6\\
&X_{01} + X_{02} + X_{03} + X_{04} + X_{05} + X_{06} + X_{07} + X_{08} \geq 128\\
&X_{01} + X_{02} + X_{03} + X_{04} \leq 86\\
&X_{05} + X_{06} + X_{07} + X_{08} \leq 42\\
&X_{03} + X_{04} + X_{07} + X_{08} \leq 36\\
&X_{02} + X_{04} + X_{06} + X_{08} \leq 32\\
&X_{01}\ ,\ X_{02}\ ,\ X_{03}\ ,\ \ldots\ ,\ X_{08} \geq 0 \text{ y enteros}\\
&N_{01}, \ldots, N_{08}, Q_{01}, \ldots, Q_{08} \geq 0
\end{aligned}$$

Fig. 3.1.8.7 Modelo lineal para la determinación de un plan factible para el ejemplo

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

La novena restricción podría escribirse:

$$X_{01} + X_{02} + X_{03} + X_{04} + X_{05} + X_{06} + X_{07} + X_{08} + N_{00} - Q_{00} = 128$$

introduciendo en la función económica el término:

$$M \cdot \left(N_{00} + Q_{00} \right)$$

donde M será un coeficiente numérico lo bastante grande como para garantizar que el objetivo de alcanzar 128 unidades tendrá prioridad respecto al de acercarse a los valores ideales de cada familia (pudiéndose adaptar al caso en que 128 sea un tope máximo o mínimo).

Puesto que un plan se extiende a un cierto horizonte, en el caso del plan maestro agregado a 12 meses con intervalos de un mes, por ejemplo, el esquema anterior puede aplicarse globalmente considerando las variables anteriores mes a mes:

$$X_{01,t} \ , \ X_{02,t} \ , \ \ldots \ X_{08,t} \ , \ N_{00,t} \ , \ N_{01,t} \ , \ \ldots \ , \ P_{08,t}$$

en total $12 \times [(3 \times 8) + 2] = 312$ variables. Las restricciones serán $12 \times 13 = 156$. La función económica adoptará la forma:

$$[MIN]\ z = M \cdot \left(\sum_{t=1}^{T} \left(N_{0,t} + Q_{0,t} \right) \right) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{I} \left(N_{i,t} + Q_{i,t} \right)$$

Lo que tenderá a minimizar las divergencias respecto al plan ideal mes a mes con poca compensación entre meses sucesivos. Si esta compensación fuese importante las restricciones podrán tomar la forma:

$$X_{i,t} - N_{i,t-1} + Q_{i,t-1} + N_{i,t} - Q_{i,t} = D_{i,t}$$

$$\sum_{i=1}^{I} X_{i,t} - N_{0,t-1} + N_{0,t} - Q_{i,t} = \sum_{i=1}^{I} D_{i,t}$$

y la función económica:

$$[MIN]\ z = \sum_{t=1}^{T} M_t \cdot \left(N_{0,t} + Q_{0,t} \right) + \sum_{t=1}^{T} m_t \cdot \sum_{i=1}^{I} \left(N_{i,t} + Q_{i,t} \right)$$

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

donde las constantes M_t, m_t se elegirán de forma que se dé más importancia a las divergencias de los primeros intervalos que a las de los últimos.

Nota: En el ejemplo numérico (*figuras 3.1.8.6 y 3.1.8.7*) hemos considerado producciones por familia (del plan factible y del ideal) así como límites de las restricciones en unidades por día laborable, mientras que en los últimos planteos nos referimos a intervalos mensuales y a compensaciones mes a mes (a través de stock y débitos). Podrán utilizarse unidades/día, como es habitual en la industria del automóvil, si los intervalos considerados tienen todos el mismo número de días laborables o bien introducimos una corrección para tener en cuenta las diferencias.

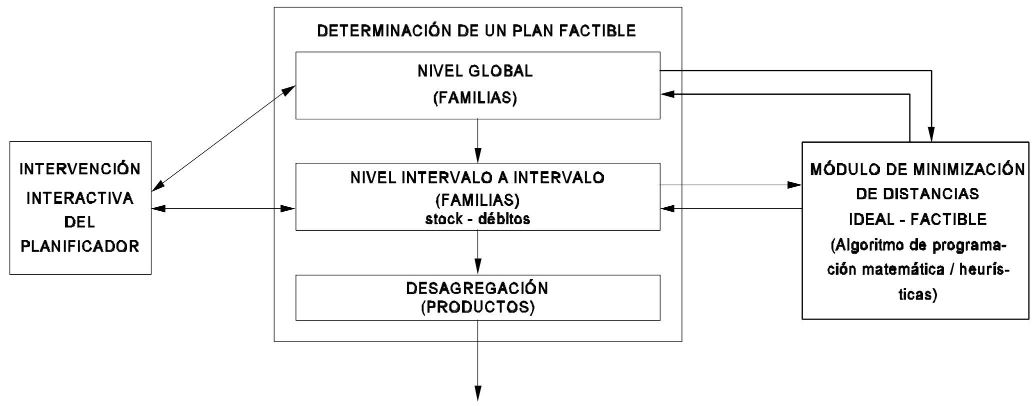

Fig. 3.1.8.8 Planificación con dos niveles de agregación, temporal y de producto (metodología POUM)

Si la proliferación de variables lo aconseja, puede desarrollarse un esquema a tres niveles (*fig. 3.1.8.8*), los dos últimos alternativamente en T pasos (uno por mes):

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

- *Nivel global*: acumulando en un solo intervalo todo el horizonte, y teniendo en cuenta para las limitaciones los días laborables de cada mes y los eventuales cambios de los límites en las restricciones y en la cartera de productos, se determina un plan factible cercano (globalmente) al ideal a nivel familias.

- *Nivel mensual por familias*: una vez acordadas las cantidades globales a nivel familia, por lo menos, a fabricar dentro del horizonte, se determinarán a nivel agregado y desagregado las cantidades a fabricar cada mes, inicialmente a nivel familias. Al minimizar la distancia entre el plan factible y el ideal del mes se tendrá en cuenta el objetivo de la producción global establecida para el horizonte; para ello se dividirá el horizonte en el mes considerado y el resto hacia el futuro.

- *Nivel mensual por productos*: una vez determinada la cantidad de cada familia a fabricar durante un mes, se distribuirá entre los productos de la familia, teniendo eventualmente en cuenta las limitaciones a nivel producto, utilizando procedimientos de prorrateo.

- *Actualización*: definidas las cantidades a nivel familia y producto de un mes se actualizan los valores restantes hacia el futuro, acumulando en todo o en parte los desfases (stock o débitos) en la parte a realizar el próximo mes.

La metodología resultante la hemos denominado POUM (planificación óptima de unidades modulares). En el párrafo siguiente desarrollamos una aplicación concreta.

3.1.8.2 El sistema Artemisa

El sistema Artemisa fue desarrollado para una empresa del sector de la automoción; tiene por objeto descomponer un plan de producción mensual (cantidades de cada producto a realizar durante el mes) en planes diarios (cantidad de cada producto a realizar cada día del mes); una vez secuenciadas las unidades del plan diario (utilizando, por ejemplo, los procedimientos descritos en el **capítulo 7**) se dispondrá del programa diario de lanzamientos a la línea de montaje. Los tres criterios a tener en cuenta en la descomposición fueron:

- consumo de recursos críticos (restricciones)
- fabricación de ciertos productos durante ciertos períodos (inhibiciones)
- regularidad de producción.

Desde el punto de vista del sistema los productos están formados por dos módulos: carrocería y color:

$$<\text{producto}> = <\text{carrocería}> * <\text{color}>$$

Cada módulo está asociado a ciertas características y atributos. Las características son propiedades de los módulos relacionadas con el consumo de recursos críticos, los atributos

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

son otras propiedades de los módulos utilizadas primordialmente para fines de clasificación:

< carrocería > - - - - - - - - - < país >

- < modelo >
- < longitud >
- < conducción >

< color >

- < tipo >
- < número >

El módulo carrocería está asociado a un atributo (país) y a tres características (modelo, longitud y conducción). Cada característica puede tomar, en este caso, dos valores (*fig. 3.1.8.2*). El módulo color está asociado a dos características (tipo y número) pudiendo tomar cada una dos valores (*fig. 3.1.8.9*).

CARACTERÍSTICA	TIPO	NÚMERO
valor 1	pastel	uno
valor 2	metalizado	dos

Fig. 3.1.8.9 Valores de las características asociadas al módulo color

El número de ejemplares del módulo carrocería es del orden de 50 y el del módulo color 15, lo que conduce a un número potencial de productos distintos de 750, aunque en el plan mensual sólo figuren unos 200. Las combinaciones de los valores de las características permite clasificar los productos en 32 familias; los productos de cada familia tienen el mismo comportamiento respecto al consumo de recursos críticos. Utilizaremos el índice i para designar a las familias y F_i al conjunto de productos j de la familia. Es fácil determinar a qué familia pertenece cada producto conociendo los valores de las características de los ejemplares de sus módulos componentes.

Las restricciones están planteadas a nivel familia. Una restricción k queda definida dados el conjunto de familias implicadas R_k y el límite diario de producción L_k, lo que permite escribirla de la forma:

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

$$\sum_{i \in R_k} X_i \leq L_k$$

donde X_i es la cantidad diaria a producir de la familia i. La descripción de R_k se puede realizar en forma booleana a través de valores de las características gracias a que las mismas sólo pueden adoptar dos valores (para cada restricción debe indicarse el valor de las características implicado, utilizando un valor comodín cuando es indiferente). Por ejemplo, una restricción sobre los productos "largos" se describirá:

RESTRICCIÓN		CAR._1	CAR._2	CAR._3	CAR._4	CAR._5	LÍMITE
k	largos	*	2	*	*	*	36

donde * es el valor comodín. La adscripción a R_k de las 16 familias afectadas se realiza automáticamente.

Las inhibiciones se definen a nivel producto, puesto que en general el mismo tipo de inhibición puede afectar a parte de los productos de una familia y/o a productos de diferentes familias. En su forma definitiva indican que cierto producto j puede o no fabricarse un día t determinado. La formalización se realiza a través de una matriz de elementos $u_{j,t}$ cero o uno, con el significado:

$u_{j,t}$ = 0 el producto j no puede fabricarse el día t,
= 1 el producto j puede fabricarse el día t.

También la comunicación de las inhibiciones al sistema puede realizarse en forma automática indicando el producto o los grupos de productos (utilizando características y atributos para construirlos) y los intervalos del mes en que están inhibidos.

La regularidad de la producción implica que una vez satisfechas las restricciones e inhibiciones se intente repartir la producción de cada producto por igual entre los días no inhibidos. Este criterio, en apariencia inofensivo, tiene como consecuencia aumentar la complejidad del problema doblando, por lo menos, las variables a considerar, dado que en cierta forma introduce un plan ideal.

El proceso de cálculo concreto se ha realizado siguiendo la metodología indicada al final del apartado anterior. En primer lugar el sistema Artemisa comprueba si globalmente el plan mensual es factible o no. Sea p_j la producción mensual en el plan del producto j; calcula la producción mensual a nivel familia.

$$P_i = \sum_{j \in F_i} p_j$$

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

y siendo *ND* el número de días del mes, contrasta cada una de las restricciones *k*:

$$\sum_{i \in R_k} P_i \leq L_k \cdot ND$$

En el caso de que no se satisfaga alguna restricción se indica cuál es y la divergencia correspondiente (también se indica el remanente en las restricciones satisfechas), y el sistema aborta el proceso esperando la corrección del plan por parte del usuario. En el caso favorable continúan los cálculos (aunque el plan mensual puede no ser factible a causa de las inhibiciones). El proceso consta de *ND* pasos (uno para cada día), descompuestos en dos fases, una a nivel familia y otra a nivel producto. Una vez efectuados los cálculos para un día determinado se consideran definitivos los valores hallados y se reajustan los valores de las producciones pendientes. Supongamos que se ha efectuado el cálculo para los días *1, 2, ..., t-1* y vamos a proceder al cálculo del día *t*; p_j y P_i significan ahora la producción pendiente de los productos *j* y de las familias *i*. Sea X_i la cantidad a producir el día *t* de la familia *i*; para cada *k* debe cumplirse:

$$\sum_{i \in R_k} X_i \leq L_k$$

y además la producción pendiente para los días $t+1$, $t+2$, ..., *ND* debe ser factible, lo que introduce una restricción para el resto:

$$\sum_{i \in R_k} \left(P_i - X_i\right) \leq (ND - t) \cdot L_k$$

que puede escribirse:

$$\sum_{i \in R_k} X_i \geq \sum_{i \in R_k} P_i - (ND - t) \cdot L_k = I_k$$

I_k varía a lo largo de la aplicación del algoritmo; pueden darse tres casos:

- $I_k \# 0$ la factibilidad del resto no introduce ninguna restricción suplementaria.
- $0 < I_k < L_k$ la factibilidad del resto introduce una restricción adicional.
- $I_k = L_k$ la restricción de limitación del recurso *k* debe cumplirse con el signo igual.

Si en algún paso del algoritmo se verifica (a causa de las inhibiciones que han impedido la producción necesaria de los productos de alguna familia) que $I_k > L_k$ ello es signo de la infactibilidad del plan en curso de cálculo. Esta infactibilidad puede estar producida por el procedimiento desagregado utilizado o por la infactibilidad del plan mensual; en la

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

explotación industrial del sistema Artemisa, siempre que éste ha indicado infactibilidad, se ha podido comprobar que se debía a infactibilidad real del plan mensual a causa de la rigidez de las inhibiciones.

Se consideran una cota superior de X_i, C_i, y un valor ideal Y_i, en los que pueden intervenir efectos derivados de las inhibiciones. En principio la acotación superior tiene por objeto no asignar a una familia cantidades superiores a las que pueden realizarse con los productos no inhibidos:

$$C_i = \sum_{j \in F_i} u_{j,t} \cdot p_j$$

El valor ideal en cuanto a regularidad será:

$$y_0 = \frac{P_i}{ND - t + 1}$$

es decir, el cociente de la producción pendiente por el número de días restante. Sin embargo puede ocurrir que las inhibiciones del día t conduzcan a un valor inferior, debido a que los productos fabricables tengan en conjunto una producción pendiente menor que y_0; o aconsejen un valor superior debido a que algunos de los productos con producción pendiente no sean fabricables los $(ND - t + 1)$ días. Sea F_i' el conjunto de los productos j, F_i tales que $u_{j,t} = 1$ y E un subconjunto cualquiera de F_i tal que cumple las condiciones de encadenamiento siguientes:

a) contiene por lo menos un producto de F_i',

b) se puede construir una secuencia de los productos de E tal como $j_1, j_2, \ldots, j_r$, tal que j_1, F_i' y j_{s-1} y j_s tienen por lo menos un día común de producción en el intervalo t a $(ND-t+1)$,

y sea d_E el número de días restante en que se puede producir algún producto de E:

$$\begin{aligned} u_{E,t} &= 0 \quad \text{si todos } u_{j,t} = 0 \text{ para } j \in E \\ &= 1 \quad \text{en caso contrario} \\ d_E &= \sum_{s=t}^{ND} u_{E,s} \\ P_E &= \sum_{j \in E} p_j \end{aligned}$$

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

llamando, con cierto abuso de lenguaje:

$$d_j = d_{\{j\}} = \sum_{s=t}^{ND} u_{j,s}$$

Una repartición homógenea de la producción de E sería la que por día conduciría a un volumen P_E/d_E, cantidad que puede ser mayor que y_0 aunque hay que garantizar la posibilidad de distribuir por igual P_E entre los d_E días, que no se produce un "estrangulamiento". Para ello sea S un subconjunto cualquiera de E que cumple las condiciones de encadenamiento. Entonces:

$$y(E) = MIN \left\{ \frac{P_E}{d_E} \; , \; \underset{S}{MIN} \left\{ \frac{P_S}{d_E - d_S} \mid S \text{ subconjunto de } E \text{ con } d_E > d_S \right\} \right\}$$

de donde:

$$y = \underset{E}{MAX} \{ y(E) \}$$

sería un valor ideal que conduciría a cumplir cierto criterio de regularidad habida cuenta de las inhibiciones (una producción inferior a y de la familia i el día t conducirá fatalmente a una superior algún día posterior en cualquier solución factible y viceversa; esto puede ser especialmente perturbador si $y > y_0$ pues indica que algunos productos de la familia deben producirse dentro de un margen de tiempo apreciablemente menor del total disponible y conviene aprovechar los días en que la producción de i es posible).

El sistema Artemisa utiliza un procedimiento heurístico para determinar dicho valor (que garantiza el tener en cuenta el efecto de un posible estrangulamiento, pero puede conducir a valores inferiores estrictamente al definido para y): considera los conjuntos E formados por un sólo elemento, y determina el producto j_1 tal que:

$$y_1 = y(j_1) = \max \{ y(j) \} = \max \left\{ \frac{p_j}{d_j} \right\} \quad j \in F_i'$$

A continuación utiliza progresivamente el siguiente procedimiento constructivo: sea E el conjunto, con r productos, P_E la producción total pendiente de los productos de E, u_E el indicador de los días en que algún producto de E se puede producir, d_E el número de días (en el intervalo de t a ND) en que se puede producir algún producto de E e y_r el valor obtenido. Sea j un producto no contenido en E que tiene algún día de producción (en dicho intervalo) común con alguno de los productos de E. Sea d_E' el número de días (en dicho intervalo) en que se puede producir algún producto de E pero no j y sea:

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

$$y_{r+1} = \underset{j}{MAX} \left\{ \begin{array}{ll} \min \left\{ \dfrac{P_E + p_j}{d_{E'} + d_j} \,,\, \dfrac{P_E}{d_{E'}} \right\} & \text{si } d_{E'} > 0 \\ \dfrac{P_E + p_j}{d_j} & \text{si } d_{E'} = 0 \end{array} \right\}$$

con $j \in F_i - E$ y $u_{i,s} = u_{E,s} = u_{E,s} = 1$ para alguna s, $t \leq s \leq ND$

si $y_r > y_{r\%1}$ se toma y_r como aproximación de y, en caso contrario se añade el producto j que ha conducido a y_{r+1} a E (que ahora tendrá $r+1$ productos) y se vuelve a aplicar el procedimiento. Finalmente se adopta como valor ideal:

$$Y_i = \min \left\{ C_i \,,\, -\text{INT}\left[-\max \left\{ y_0 \,,\, y \right\} \right] \right\}$$

donde se ha redondeado el mayor de los valores y_0 e y a un entero por exceso.

Puede ser conveniente considerar una cota inferior c_i de X_i basada en:

$$c_i = [\underset{E}{MAX}] \left\{ p_E \mid d_E = 1 \right\}$$

En el caso de que para todo E no vacío $d_E > 1$, se tomará $c_i = 0$.

Esto nos lleva a introducir además de las restricciones relativas a los recursos las correspondientes a las cotas y valores ideales:

$$X_i + N_i - Q_i = Y_i$$
$$c_i \leq X_i \leq C_i$$

y a adoptar una función económica del tipo:

$$[MIN] \; z = \sum_{i=1}^{32} \left(M1_i \cdot N_i + M2_i \cdot Q_i \right)$$

La distinción de los coeficientes de la función económica permite, si es procedente, penalizar con pesos distintos las divergencias por exceso y las que son por defecto (éstas últimas son normales hasta cierto punto dado el sentido del redondeo), así como las divergencias respecto a un valor ideal obtenido como media global (y_0), como límite superior debido a las inhibiciones ($Y_i = C_i$) o como valor medio debido a las mismas ($y > y_0$ especialmente si $Y_i = c_i$).

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

Artemisa dispone de dos procedimientos de cálculo de X_i, uno heurístico, suficiente en gran proporción de los casos, y otro utilizando el algoritmo símplex.

Una vez hallados los valores X_i para el día t se reparte la producción entre los productos no inhibidos de la familia proporcionalmente al cociente p_j/d_j (con $u_{j,t} = 1$). El procedimiento utilizado es similar al *LF* (ver apartado **7.1.5**), pero teniendo en cuenta la elevada criticidad de los productos con d_j netamente inferior a $(ND - t + 1)$, especialmente con $d_j = 1$. Por ello para los productos con $d_j = 1$ se asigna directamente la producción p_j, prorrateándose el resto entre los demás.

Una vez realizada la desagregación se procede a actualizar los valores p_j y P_i y se pasa al siguiente día.

El sistema se preparó para un PC-AT (con 640 *Kb* y disco duro de 20 *Mb*) utilizando dBaseIII y Quick-Basic. El tamaño de los programas es de 500 *Kb*, 1.5 *Mb* con las bases de datos. Se desarrollaron comunicaciones desde y hacia un ordenador central, así como, a través de archivos, con Open Acces.

3.2 Bibliografía

[1] BERRY, W. L; VOLLMANN, T. E; WHYBARK, D. C. *Master Production Scheduling. Principles and Practices*. Apics, 1979.

[2] BUFFA, E. S; TAUBERT, W. H. *Production-Inventory Systems*. Irwin, 1972.

[3] COMPANYS, R. *Planificación y Programación de la Producción*. Marcombo, 1989.

[4] FOGARTY, D. W; HOFFMANN, Th. R. *Production and Inventory Management*. South-Western Publishing Co., 1983.

[5] HAX, A; CANDEA, D. *Production and Inventory Management*. Prentice-Hall, 1984.

[6] HOLT, C.C; MODIGLIANI, F; MUTH, J. M; SIMON, H. A. *Planning, Production, Inventories and Work Force*. Prentice-Hall, 1960.

[7] JOHNSON, L. A; MONTGOMERY, D. C. *Operations Researh in Production Planning, Scheduling and Inventory Control*. Wiley, 1974.

[8] LARRAÑETA, J. C; ONIEVA, L. *Métodos modernos de gestión de la producción*. Alianza Editorial, 1988.

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.

[9] McLEAVY, D. W; NARASIMHAN, S. L. *Production Planning and Inventory Control*. Allyn and Bacon, 1985.

[10] VOLLMANN, T. E; BERRY, W. L; WHYBARK, D. C. *Manufacturing planning and control systems*. Dow Jones-Irwin, 1984.

Comentarios

Excelentes textos son [8] y [10], siendo los autores de este último los que han redactado [1], que expresa la visión ortodoxa de la APICS (*American Production and Inventory Control Society*). El modelo HMMS tiene su fuente en [6] y sus prolongaciones se tratan en [2]. La planificación mediante modelos lineales está descrita en [5] y [7], y la planificación jerárquica en [7], [8] y [9].

© los autores, 1998; © Edicions UPC, 1998.