Anexo: Programa para el cálculo de los parámetros de las previsiones

Se han incluido algunos programas informáticos escritos en Quick-BASIC que ajustan para un juego de datos dado el modelo de tendencia lineal con variación estacional multiplicativa en las variantes incluidas en los apartados **2.1.6.3**, **2.1.6.4** y **2.1.6.5**. Los datos de las observaciones (con órdenes de magnitud de 1 a 1000) deben encontrarse inicialmente en un vector *x(i,1)*, siendo *n* el número de datos y *l* la periodicidad de la estacionalidad. Debe cumplirse la relación $n > l$ (que no se comprueba en las sentencias adjuntas).

Los resultados obtenidos se almacenan en las variables *a*, *b*, *sse* y el vector *c(i)* ($i=1, 2, ..., l$).

Es fácil aumentar el número de iteraciones realizadas haciéndolas depender del mayor o menor parecido entre los resultados obtenidos en una fase respecto a los obtenidos en la anterior.

```
'previsiones
'el número de observaciones es n
'la periodicidad de la estacionalidad l
'en x(i,1) se almacenan las observaciones
'en x(i,2) las medias móviles de primer orden
'en x(i,3) las medias móviles de segundo orden
'en x(i,4) la serie desestacionalizada
'los resultados se denominan a (ordenada), b (pendiente),
'c(i) coeficiente estacional y sse

'procedimiento tradicional (2.1.6.3)
l1 = l
k0 = 1
GOSUB 1000 'cálculo de las medias de primer orden
GOSUB 1200 'cálculo de las medias de segundo orden
GOSUB 2000 'regresión sobre las medias de segundo orden
           'y traslación
GOSUB 3000 'cálculo de los coeficientes estacionales
GOSUB 4000 'desestacionalización y cálculo de la recta
           'de regresión
GOSUB 3000 'cálculo de los coeficientes estacionales
GOSUB 5000 'cálculo de SSE
END
```

```
'procedimiento mejorado (2.1.6.5)
l1 = l
k0 = 1
GOSUB 1000 'cálculo de las medias de primer orden
GOSUB 1200 'cálculo de las medias de segundo orden
GOSUB 2000 'regresión sobre las medias de segundo orden
           'y traslación
GOSUB 6000 'cálculo de c, dados a y b
GOSUB 7000 'cálculo de a y b, dado c
GOSUB 6000 'cálculo de c, dados a y b
GOSUB 5000 'cálculo de SSE
END

'método de Shiskin (2.1.6.4)
l1 = l
GOSUB 8000 'cálculo de la media móvil centrada
GOSUB 8200 'cálculo de coeficientes de est. con media centrada
GOSUB 4000 'desestacionalización
l1 = 5
k0 = 4
GOSUB 1000 'cálculo de la media móvil de amplitud 5
GOSUB 8400 'regresión sobre las med. móviles de amplitud 5
           'y traslación
GOSUB 3000 'cálculo coeficientes estacionales
GOSUB 5000 'cálculo de SSE
END

1000 'sr-cálculo de medias móviles primeras de amplitud l1
s = 0
FOR i = 1 TO l1
  x(i, 2) = 0
  s = s + x(i, k0)
NEXT i
x(l1, 2) = s / l1
FOR i = l1 + 1 TO n
  s = s + x(i, k0) - x(i - l1, k0)
  x(i, 2) = s / l1
NEXT i
RETURN
```

```
1200 'sr-cálculo de medias móviles segundas (de amplitud l1)
s = 0
FOR i = 1 TO l1 - 1
  x(i, 3) = 0
NEXT i
FOR i = l1 TO 2 * l1 - 1
  x(i, 3) = 0
  s = s + x(i, 2)
NEXT i
x(2 * l1 - 1, 3) = s / l1
FOR i = 2 * l1 TO n
  s = s + x(i, 2) - x(i - l1, 2)
  x(i, 3) = s / l1
NEXT i
RETURN

2000 'sr-cálculo de la recta de regresión de la segunda media
i0 = 2 * l - 1
k0 = 3
GOSUB 2500
'colocación de la recta
a = a + (l - 1) * b
RETURN

2500 'sr-regresión lineal sobre la serie x(i,k0) de i0 a n
s = 0
p = 0
FOR i = i0 TO n
  s = s + x(i, k0)
  p = p + i * x(i, k0)
NEXT i
c0 = n - i0 + 1
c1 = n * (n + 1) / 2 - (i0 - 1) * i0 / 2
c2 = n * (n + 1) * (2 * n + 1) / 6 - (i0 - 1) * i0 * (2 * i0 - 1) / 6
p = p / c1
c2 = c2 / c1
s = s / c0
c1 = c1 / c0
b = (p - s) / (c2 - c1)
a = s - c1 * b
RETURN
```

```
3000 'sr-cálculo de los coeficientes estacionales asociados
      'a una recta de regresión definida por ordenada en el
      'origen a y pendiente b
s = 0
FOR i = 1 TO l
  s1 = 0
  s2 = 0
  i1 = i
  WHILE i1 <= n
    s1 = s1 + x(i1, 1)
    s2 = s2 + a + b * i1
    i1 = i1 + l
  WEND
  c(i) = s1 / s2
  s = s + c(i)
NEXT i
WHILE ABS(l - s) > .00001
  s1 = s
  s = 0
  FOR i = 1 TO l
    c(i) = c(i) * l / s1
    s = s + c(i)
  NEXT i
  a = a * s1 / l
  b = b * s1 / l
WEND
RETURN

4000 'sr-desestacionalización y regresión sobre serie
FOR i = 1 TO n
  k = i
  WHILE k > l
   k = k - l
  WEND
  x(i, 4) = x(i, 1) / c(k)
NEXT i
i0 = 1
k0 = 4
GOSUB 2500
RETURN
```

```
5000 'sr-cálculo de SSE
sse = 0
FOR i = 1 TO n
  k = i
  WHILE k > l
    k = k - l
  WEND
  y = (a + b * i) * c(k)
  sse = sse + (x(i, 1) - y) * (x(i, 1) - y)
NEXT i
RETURN

6000 'sr-dados a y b, calcular c que minimice sse
dd = 0
ee = 0
FOR i = 1 TO l
  k = i
  d(i) = 0
  e(i) = 0
  WHILE k <= n
    d(i) = d(i) + (a + b * k) * x(k, 1)
    e(i) = e(i) + (a + b * k) * (a + b * k)
    k = k + l
  WEND
  d(i) = d(i) / e(i)
  e(i) = 1 / e(i)
  dd = dd + d(i)
  ee = ee + e(i)
NEXT i
mu = (l - dd) / ee
s = 0
FOR i = 1 TO l
  c(i) = d(i) + mu * e(i)
  s = s + c(i)
NEXT i
RETURN

7000 'sr-dado c, calcular a y b que minimicen sse
c0 = 0
```

```
c1 = 0
c2 = 0
s = 0
p = 0
FOR i = 1 TO n
  k = i
  WHILE k > l
    k = k - l
  WEND
  c0 = c0 + c(k) * c(k)
  c1 = c1 + i * c(k) * c(k)
  s = s + c(k) * x(i, 1)
  c2 = c2 + i * i * c(k) * c(k)
  p = p + i * c(k) * x(i, 1)
NEXT i
p = p / c1
c2 = c2 / c1
s = s / c0
c1 = c1 / c0
b = (p - s) / (c2 - c1)
a = s - c1 * b
RETURN

8000 'medias móviles centradas (de amplitud l1)
s = 0
FOR i = 1 TO l1
  x(i, 2) = 0
  s = s + x(i, 1)
NEXT i
s = s + x(l1 + 1, 1) / 2 - x(1, 1) / 2
x(l1 + 1, 2) = s / l1
FOR i = l + 2 TO n
  s = s + (x(i, 1) + x(i - 1, 1)) / 2
  s = s - (x(i - l1, 1) + x(i - l1 - 1, 1)) / 2
  x(i, 2) = s / l1
NEXT i
RETURN
```

```
8200 'coeficientes de estacionalidad con medias móviles centradas
s = 0
FOR i = 1 TO l1
  k = i + l1 / 2
  WHILE k < l1 + 1
    k = k + l1
  WEND
  s0 = 0
  s1 = 0
  WHILE k <= n
    s0 = s0 + x(k, 2)
    s1 = s1 + x(k - l1 / 2, 1)
    k = k + l1
  WEND
  c(i) = s1 / s0
  s = s + c(i)
NEXT i
WHILE ABS(s - l1) > .00001
  s1 = s
  s = 0
  FOR i = 1 TO l1
    c(i) = c(i) * l1 / s1
    s = s + c(i)
  NEXT i
WEND
RETURN

8400 'regresión sobre las medias móviles de amplitud l1
i0 = l1
k0 = 2
GOSUB 2500
a = a + b * (l1 - 1) / 2
RETURN
```

2.3 Problemas resueltos

2.3.1 *Tendencia constante con estacionalidad (A)*

Una empresa fabrica tres productos acabados A, B y C (esencialmente el mismo aparato en tres calidades: normal, extra y lujo), y sus ventas durante 1990 han sido:

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
A	110	92	92	60	64	72	78	50	156	176	150	128
B	70	79	60	49	41	60	44	50	120	139	104	98
C	55	71	36	30	38	28	39	25	84	86	75	52

Se estima que la demanda de los tres productos está estabilizada (por lo que en 1991 se venderán aproximadamente la misma cantidad de cada uno que en 1990) y que los tres están sometidos a la misma estacionalidad.

¿Cual será la previsión de la demanda para los diferentes meses de 1991?

Sumando los valores mensuales obtenemos los totales anuales que, de acuerdo con las hipótesis del enunciado, constituyen la mejor estimación para el total anual de 1991:

A	1228
B	914
C	619

Para calcular las estimaciones de los valores mensuales deberemos tener en cuenta que los tres productos tienen la misma estacionalidad, es decir, *los mismos coeficientes estacionales*. Podemos calcular para cada mes los tres coeficientes estacionales, uno para cada producto, y promediar. Por ejemplo, tomando estacionalidad multiplicativa (en este caso, al ser la tendencia constante, suponer la estacionalidad multiplicativa o aditiva es indiferente, pues en ambos casos obtenemos idénticos resultados, siempre que la estimación del valor estacional a partir de los tres estimados, uno para cada producto, se haga coherentemente de la misma forma. La expresión utilizada para agregar las tres estimaciones asume que el peso de cada estimación es proporcional a la cuantía de la tendencia) para enero una media ponderada será:

$$\hat{c}_1 = 12 \times \frac{110 + 70 + 55}{1228 + 914 + 619} = 1{,}02$$

de donde, las tres estimaciones para enero, serán:

$$A \qquad 1{,}02 \times \frac{1228}{12} = 104{,}38$$

$$B \qquad 1{,}02 \times \frac{914}{12} = 77{,}69$$

$$C \qquad 1{,}02 \times \frac{619}{12} = 52{,}615$$

y análogamente:

1991

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
$\hat{c}_t$	1,02	1,05	0,82	0,60	0,62	0,70	0,70	0,54	1,56	1,74	1,43	1,21
A	105	108	84	62	64	71	72	56	160	178	146	124
B	78	80	62	46	47	53	53	41	119	133	109	92
C	53	54	42	31	32	36	36	28	81	90	74	62

Debido a los redondeos los totales anuales son 1230, 913 y 619; si deseamos obtener exactamente los valores anteriormente indicados deberemos proceder a un reajuste que conduce finalmente a:

1991

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
A	104	108	84	62	64	71	72	56	160	178	146	123
B	78	80	62	46	47	53	53	41	120	133	109	92
C	53	54	42	31	32	36	36	28	81	90	74	62

2.3.2 *Tendencia constante con estacionalidad (B)*

Deseamos estimar la demanda de cierto artículo para el año 1991 a partir de los datos correspondientes a 1988, 1989 y 1990 (ver tabla adjunta). Consideramos que dicha demanda es estable a nivel anual (tendencia constante) pero altamente estacional a nivel mes.

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
1988	688	98	424	516	468	400	257	110	381	557	658	779
1989	682	161	377	536	532	431	306	100	363	506	649	761
1990	632	103	412	514	500	392	234	120	401	511	621	776

Cualquier procedimiento razonable, con los datos e hipótesis indicados, conducirá a estimar para 1991 una demanda mensual, mes a mes, igual a la media aritmética de los meses homólogos de los años anteriores. Redondeando al entero más próximo tenemos:

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
1991	667	121	404	522	500	408	266	110	382	525	643	772

Los valores sin redondear eran:

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN
1991	667,33	120,67	404,33	522,00	500,00	407,67

	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
1991	265,67	110,00	381,67	524,67	642,67	772,00

2.3.3 *Tendencia constante y estacionalidad (C)*

Con los datos del problema anterior, estimar los parámetros del modelo constante con estacionalidad multiplicativa:

$$a \cdot c_t + \theta_t$$

En este caso tan sencillo basta considerar la proyección para 1991. La suma de las demandas mensuales estimadas (sin redondear) es 5318,7 por tanto:

$$\hat{a} = \frac{5318{,}7}{12} = 443{,}22$$

Los coeficientes estacionales se determinan análogamente, por ejemplo:

$$\hat{c}_1 = \frac{667{,}3}{443{,}22} = 1{,}51$$

Los valores obtenidos son:

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_1 &= 1{,}505\ 6400 \\
\hat{c}_2 &= 0{,}272\ 2487 \\
\hat{c}_3 &= 0{,}912\ 2588 \\
\hat{c}_4 &= 1{,}177\ 7390 \\
\hat{c}_5 &= 1{,}128\ 1020 \\
\hat{c}_6 &= 0{,}919\ 7794 \\
\hat{c}_7 &= 0{,}599\ 3983 \\
\hat{c}_8 &= 0{,}248\ 1825 \\
\hat{c}_9 &= 0{,}861\ 1180 \\
\hat{c}_{10} &= 1{,}183\ 7550 \\
\hat{c}_{11} &= 1{,}449\ 9880 \\
\hat{c}_{12} &= 1{,}741\ 7900 \\
\hline
\sum &= 11{,}999\ 9997
\end{aligned}
$$

Puesto que la suma de los coeficientes es prácticamente 12 (únicamente aparecen los errores de redondeo) no procedemos a ningún ajuste más.

2.3.4 *Tendencia lineal*

Cierto fenómeno tiene una tendencia lineal a la que se superpone una perturbación aleatoria, por lo que estimamos que obedece a un modelo de la forma:

$$a + b \cdot t + \theta_t$$

Determinar una estimación de los parámetros *a* y *b* del modelo a partir de la serie temporal formada por los 15 valores siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
449	487	450	507	502	579	532	603	562	628	619	630	703	633	713

Determinar que la recta de regresión correspondiente a los datos anteriores puede efectuarse por diversos métodos, incluyendo los incorporados a muchas calculadoras de bolsillo (que se reducen a introducir los datos y apretar una tecla, según opinan muchos usuarios). Una variante útil para el cálculo manual es la siguiente (que incluye un cambio de origen de tiempos):

Si los datos estuviesen centrados, es decir, si el punto 0 de la escala de tiempos correspondiera a la observación central (en este caso la octava), el sistema de ecuaciones para determinar a y $\hat{b}$ se reduciría a:

$$\hat{a} \cdot N = \sum_{i=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} x_i = \sum_{t=1}^{N} x_t$$

$$\hat{b} \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} i^2 = \sum_{i=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} i \cdot \left[x_i - x_{-i} \right]$$

donde $i = t - \frac{N-1}{2}$ es la nueva escala, y N el número (impar) de observaciones.

Puesto que:

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N \cdot (N+1) \cdot (2 \cdot N + 1)}{6}$$

tenemos:

$$\sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} i^2 = \frac{N \cdot (N^2 - 1)}{24}$$

y en nuestro caso (N = 15):

$$\sum_{i=1}^{7} i^2 = 140$$

Una vez hallados los valores de $\hat{a}$ y $\hat{b}$ habrá que deshacer la traslación de los datos; $\hat{b}$ seguirá teniendo el mismo valor, pero $\hat{a}$ se obtendrá restando del valor hallado:

$$\hat{b} \cdot \frac{N+1}{2}$$

t	$i = t - 8$	x_t	$x_i - x_{-i}$	$i \cdot [x_i - x_{-i}]$	$\hat{x}_t$	$\lvert x_t - \hat{x}_t \rvert$
1	-7	449			449,13	0,13
2	-6	487			466,85	20,15
3	-5	450			484,56	34,56
4	-4	507			502,28	4,72
5	-3	502			519,99	17,99
6	-2	579			537,70	41,30
7	-1	532			555,42	23,42
8	0	603	0	0	573,13	29,87
9	1	562	30	30	590,85	28,85
10	2	628	49	98	608,56	19,44
11	3	619	117	351	626,28	7,28
12	4	630	123	492	643,99	13,99
13	5	703	253	1265	661,70	41,30
14	6	633	146	876	679,42	46,42
15	7	713	264	1848	697,13	15,87
Σ	0	8597		4960		error cuadrático 10664,071

En nuestro caso:

$$\hat{a} = \frac{8597}{15} = 573{,}133333 \qquad \hat{b} = \frac{4960}{2 \times 140} = 17{,}714285$$

y deshaciendo el cambio de origen:

$$\hat{a} = 573{,}133333 - 8 \times 17{,}714285 = 431{,}41909$$

2.3.5 *Tendencia lineal con estacionalidad (A)*

Los precios a que se cotiza determinado producto se establecen trimestralmente. Disponemos de las últimas 14 cotizaciones y deseamos estimar los valores correspondientes a los cuatro trimestres de 1991.

	1987	1988	1989	1990
1er trimestre		519	590	665
2º trimestre		393	442	524
3er trimestre	245	282	278	338
4º trimestre	107	122	155	162

En la figura hemos representado los valores de la serie temporal y los de la media móvil de primer orden (la de segundo orden estaría muy próxima a la de primero, y para evitar confusión se ha omitido). Aparentemente existe una tendencia lineal y estacionalidad, siendo el período $L = 4$.

	Media móvil de 1er orden			Media móvil de 2º orden	
	1988	1989	1990	1989	1990
1er trim.		346,75	385,00	329,25	367,06
2º trim.	316,00	359,00	405,50	340,00	378,69
3er trim.	325,25	358,00	420,50	348,19	394,31
4º trim.	329,00	366,25	422,25	357,50	408,31

Consideremos un modelo de tendencia lineal y estacionalidad multiplicativa:

$$(a + b \cdot t) \cdot c_t + \theta_t$$

La recta de regresión determinada con los valores de la media móvil de 2º orden (tomando como origen 0 de tiempos el 2º trimestre de 1987) es:

$$249{,}6562 + 11{,}02456 \times t$$

Media móvil de 2º orden		
Valores reales	Valores teóricos	Diferencia
329,2500	326,8281	2,4219
340,0000	337,8527	2,1473
348,1875	348,8772	-0,6897
357,5000	359,9018	-2,4018
367,0625	370,9263	-3,8638
378,6875	381,9509	-3,2634
394,3125	392,9755	1,3370
408,3125	404,0000	4,3125

Efectuando un traslado de L-1 = 3 unidades de tiempo, obtendremos la estimación de la recta asociada a la serie:

$$282{,}7299 + 11{,}02456 \times t$$
$$(282{,}7299 = 249{,}6562 + 3 \times 11{,}02456)$$

Calculamos los primeros valores estacionales a partir de las estimaciones:

$$\hat{a} = 282{,}7299 \qquad \hat{b} = 11{,}02456$$

Para el 3^er^ trimestre tendremos:

$$\hat{c}_3 = \frac{\sum \textit{valores observados}}{\sum \textit{valores de la recta}} = \frac{245 + 282 + 278 + 338}{4 \cdot \hat{a} + (1 + 5 + 9 + 13) \cdot \hat{b}} = 0{,}7940$$

y análogamente para los demás:

	multiplicando por 4/4,0263	
$\hat{c}_1 = 1{,}6430$		$\hat{c}_1 = 1{,}6323$
$\hat{c}_2 = 1{,}2213$		$\hat{c}_2 = 1{,}2133$
$\hat{c}_3 = 0{,}7940$		$\hat{c}_3 = 0{,}7888$
$\hat{c}_4 = 0{,}3680$		$\hat{c}_4 = 0{,}3656$
$\Sigma = 4{,}0263$		$\Sigma = 4{,}0000$

y, en consecuencia, corregimos $\hat{a}$ y $\hat{b}$ mediante el factor inverso 4,0263/4:

$$\hat{a} = 284{,}5869 \qquad \hat{b} = 11{,}09697$$

Con los valores iniciales de los coeficientes estacionales desestacionalizamos la serie:

	Serie desestacionalizada			
	1987	1988	1989	1990
1^er^ trimestre		317,9562	361,4532	407,4006
2º trimestre		323,9100	364,2957	431,8800
3^er^ trimestre	310,5984	357,5051	352,4341	428,4990
4º trimestre	292,6696	333,6980	423,9606	443,1072

La recta de regresión correspondiente a los valores desestacionalizados es:

$$283{,}1251 + 11{,}1409 \times t$$

con la que podemos obtener una nueva estimación de los valores estacionales:

$\hat{c}_1 = 1{,}6332$	multiplicando por	$\hat{c}_1 = 1{,}6330$
$\hat{c}_2 = 1{,}2127$	4/4,0005	$\hat{c}_2 = 1{,}2126$
$\hat{c}_3 = 0{,}7892$		$\hat{c}_3 = 0{,}7891$
$\hat{c}_4 = 0{,}3654$		$\hat{c}_4 = 0{,}3654$
$\Sigma = 4{,}0005$		$\Sigma = 4{,}0001$

y corrigiendo (con el factor 4,005/4) los parámetros $\hat{a}$ y $\hat{b}$:

$$\hat{a} = 281{,}8378 \qquad \hat{b} = 11{,}4691$$

Con dichos valores la suma de los errores cuadráticos es 1607,41.

La proyección la realizaremos mediante:

$$\hat{x}_t = (\hat{a} + \hat{b} \cdot t) \cdot \hat{c}_t$$

y para 1991 tendremos:

1er trimestre (t = 15)	$\hat{x}_{15} = 741{,}16$
2º trimestre (t = 16)	$\hat{x}_{16} = 564{,}26$
3er trimestre (t = 17)	$\hat{x}_{17} = 376{,}25$
4º trimestre (t = 18)	$\hat{x}_{18} = 178{,}41$

2.3.6 *Tendencia lineal con estacionalidad (B)*

Considerando que la media móvil de 1er orden de la serie temporal del problema anterior es bastante lisa (a la escala del dibujo), realizar los desarrollos anteriores partiendo de la recta de regresión de la media móvil de 1er orden, en lugar de la de 2º orden.

La recta de regresión de la media móvil de 1er orden es:

$$266{,}41375 + 11{,}1409 \times t$$

Media móvil de 1er orden		
Valores reales	Valores teóricos	Diferencia
316,00	310,9774	5,0226
325,25	322,1182	3,1318
329,00	333,2592	-4,2592
346,75	344,4000	2,3500
359,00	355,5410	3,4590
358,00	366,6818	-8,6818
366,25	377,8228	-11,5728
385,00	388,9636	-3,9636
405,50	400,1046	5,3954
420,50	411,2454	9,2546
422,25	422,3864	-0,1364

Efectuando un traslado de (L-1)/2 = 1,5 unidades de tiempo, obtendremos la estimación de la recta asociada a la serie:

$$283{,}1251 + 11{,}1409 \times t$$

$$283{,}1251 = 266{,}41375 + 1{,}5 \times 11{,}1409$$

Calculamos los primeros valores estacionales a partir de las estimaciones:

$$\hat{a} = 283{,}1251 \qquad \hat{b} = 11{,}1409$$

Para el 3er trimestre tendremos:

$$\hat{c}_3 = \frac{\Sigma \textit{ valores observados}}{\Sigma \textit{ valores de la recta}} = \frac{245 + 282 + 278 + 338}{4 \cdot \hat{a} + (1 + 5 + 9 + 13) \cdot \hat{b}} = 0{,}7913$$

y análogamente para los demás:

$\hat{c}_1 = 1{,}6375$	multiplicando por	$\hat{c}_1 = 1{,}6325$
$\hat{c}_2 = 1{,}2169$	4/4,0124	$\hat{c}_2 = 1{,}2131$
$\hat{c}_3 = 0{,}7913$		$\hat{c}_3 = 0{,}7889$
$\hat{c}_4 = 0{,}3667$		$\hat{c}_4 = 0{,}3655$
$\Sigma = 4{,}0124$		$\Sigma = 4{,}0000$

y, en consecuencia, corregimos $\hat{a}$ y $\hat{b}$ mediante el factor inverso 4,0124/4:

$$\hat{a} = 284{,}0001 \qquad \hat{b} = 11{,}17557$$

Con los valores iniciales de los coeficientes estacionales desestacionalizamos la serie:

	Serie desestacionalizada			
	1987	1988	1989	1990
1er trimestre		317,9173	361,4089	407,3507
2º trimestre		323,9634	364,3558	431,9512
3er trimestre	310,5590	357,4598	352,3894	428,4990
4º trimestre	292,7136	333,7893	424,0766	443,2284

La recta de regresión correspondiente a los valores desestacionalizados es:

$$281{,}8019 + 11{,}46947 \times t$$

con la que podemos obtener una nueva estimación de los valores estacionales:

$\hat{c}_1 = 1{,}6331$	multiplicando por	$\hat{c}_1 = 1{,}6330$
$\hat{c}_2 = 1{,}2127$	4/4,0004	$\hat{c}_2 = 1{,}2126$
$\hat{c}_3 = 0{,}7892$		$\hat{c}_3 = 0{,}7891$
$\hat{c}_4 = 0{,}3654$		$\hat{c}_4 = 0{,}3654$
$\Sigma = 4{,}0004$		$\Sigma = 4{,}0001$

y corrigiendo (con el factor 4,005/4) los parámetros $\hat{a}$ y $\hat{b}$:

$$a = 281{,}8273 \qquad b = 11{,}4705$$

Con dichos valores la suma de los errores cuadráticos es 1607,55.

La proyección la realizaremos mediante:

$$x_t = (\hat{a} + \hat{b} \cdot t) \cdot \hat{c}_t$$

y para 1991 tendremos:

1er trimestre (t = 15)	$\hat{x}_{15}$ = 741,18
2º trimestre (t = 16)	$\hat{x}_{16}$ = 564,27
3er trimestre (t = 17)	$\hat{x}_{17}$ = 376,26
4º trimestre (t = 18)	$\hat{x}_{18}$ = 178,41

(no existe diferencia apreciable con el caso anterior)

2.3.7 *Tendencia lineal con estacionalidad (C)*

Dada la forma de la media móvil de 1er orden de la serie temporal tratada en los dos problemas anteriores, ajustar el modelo con tendencia lineal y estacionalidad aditiva.

$$(a + b \cdot t) + c_t + \theta_t$$

Partimos de la recta determinada con los valores de la media móvil de 1er orden, tras su traslación:

$$283{,}1251 + 11{,}1409 \times t$$

y calculamos los *términos* estacionales, por ejemplo:

$$\hat{c}_3 = \frac{(245 + 282 + 278 + 338) - (4 \cdot \hat{a} + 28 \cdot \hat{b})}{4} = -75{,}3614$$

y análogamente los demás:

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= 230{,}22200 \\ \hat{c}_2 &= 80{,}74772 \\ \hat{c}_3 &= -\ 75{,}36140 \\ \hat{c}_4 &= -235{,}75230 \\ \hline \Sigma &= -\ 0{,}1439285 \end{aligned}$$

si consideramos que este valor es demasiado distinto de 0, sumaremos a cada c_t:

$$\frac{0{,}1439285}{4} = 0{,}0359821$$

y, para complementar, restaremos de $\hat{a}$ dicha cantidad:

$$\hat{c}_1 = 230{,}25800$$
$$\hat{c}_2 = 80{,}78370 \qquad \hat{a} = 283{,}0891$$
$$\hat{c}_3 = -\ 75{,}32538$$
$$\hat{c}_4 = -235{,}71630 \qquad \hat{b} = 11{,}1409$$
$$\Sigma = -\ 0{,}000008$$

Desestacionalizando la serie (restando de cada valor observado la estimación de la estacionalidad) obtenemos:

	Serie desestacionalizada			
	1987	1988	1989	1990
1er trimestre		288,74	359,74	434,74
2º trimestre		312,22	361,22	443,22
3er trimestre	320,33	357,33	353,33	413,23
4º trimestre	342,72	357,72	390,72	397,72

A partir de los valores de la serie desestacionalizada obtenemos la recta de regresión:

$$297{,}646 + 9{,}19998 \times t$$

a la que corresponden los términos estacionales:

$$\hat{c}_1 = 229{,}28750$$
$$\hat{c}_2 = 81{,}75419$$
$$\hat{c}_3 = -\ 76{,}29584$$
$$\hat{c}_4 = -234{,}74580$$
$$\Sigma = -\ 0{,}000084$$

Dada la magnitud de la suma de los cuatro términos estacionales no procedemos a ninguna corrección. La suma de los errores cuadráticos entre los valores observados y los teóricos es 7126,18, y la previsión para 1991:

1er trimestre	664,93
2º trimestre	526,60
3er trimestre	377,75
4º trimestre	228,50

La diferencia con las previsiones anteriores es notable, así como el error cuadrático. En consecuencia, consideramos que los modelos con estacionalidad multiplicativa son preferibles en este caso.

2.4 Enunciados

2.4.1 Las ventas de cierto artículo en los últimos 10 años han sido:

año	unidades vendidas (en millares)
1974	87
1975	104
1976	114
1977	129
1978	134
1979	140
1980	146
1981	165
1982	179
1983	188

Realizar una proyección para 1984, 1985 y 1986, teniendo en cuenta la posible saturación del mercado.

Ídem con los datos:

año	unidades vendidas (en millares)
1974	76
1975	65
1976	99
1977	103
1978	104
1979	138
1980	149
1981	157
1982	176
1983	202

2.4.2 Se dispone de los datos de venta de un producto durante los cuatro últimos años:

		1979	1980	1981	1982
enero	....	68	76	44	26
febrero	....	95	75	75	48
marzo	....	110	100	91	80
abril	....	118	136	100	108
mayo	....	157	143	115	127
junio	....	176	148	108	134
julio	....	182	122	113	126
agosto	....	154	102	104	105
septiembre	....	120	76	70	79
octubre	....	85	56	56	41
noviembre	....	63	38	36	6
diciembre	....	60	32	15	4

¿Hay estacionalidad? Si cree que sí, determínela.

2.4.3 Los índices de precios de un determinado producto A se publican trimestralmente. Disponemos de los siguientes valores:

	1984	1985	1986
1er trimestre	118,8	124,5	123,0
2^{o} trimestre	122,6	114,0	138,2
3er trimestre	126,4	123,6	
4^{o} trimestre	118,0	110,8	

a) Analizar el modelo de previsión más conveniente.

b) Considerando que los índices están estabilizados, salvo variaciones aleatorias, establecer la previsión que corresponde a los dos últimos trimestres de 1986.

2.4.4 Los índices de precios de un determinado producto B se publican trimestralmente. Disponemos de los siguientes valores:

	1983	1984	1985	1986
1er trimestre	76,7	83,5	91,4	115,6
2^{o} trimestre	83,3	97,9	103,6	100,5
3er trimestre	79,9	87,2	100,9	
4^{o} trimestre	85,5	100,6	102,1	

a) Analizar el modelo de previsión más conveniente.

b) Considerando que los índices sufren una tendencia lineal creciente, sin estacionalidad pero con perturbaciones aleatorias, establecer la previsión correspondiente para los dos últimos trimestres de 1986.

2.4.5 Los índices de precios de un determinado producto C se publican trimestralmente. Disponemos de los siguientes valores:

	1983	1984	1985	1986
1er trimestre	59,4	46,1	49,9	58,2
2º trimestre	105,0	119,5	115,3	102,2
3er trimestre	41,2	43,6	57,1	
4º trimestre	128,5	123,6	125,1	

a) Analizar el modelo de previsión más conveniente.

b) Considerando que los índices están estabilizados en tendencia, pero están sometidos a una fuerte estacionalidad y a perturbaciones, establecer la previsión correspondiente al último trimestre de 1986.

2.4.6 Los índices de precios de un determinado producto D se publican trimestralmente. Disponemos de los siguientes valores:

	1983	1984	1985	1986
1er trimestre	77,4	84,8	90,6	99,0
2º trimestre	130,7	153,8	161,5	181,6
3er trimestre	71,7	78,0	78,7	
4º trimestre	156,9	177,6	190,8	

a) Analizar el modelo de previsión más conveniente.

b) Establecer la previsión correspondiente a los dos últimos trimestres de 1986.

2.4.7 Se conoce la serie cronológica de ventas de un determinado artículo destinado al sector de la hostelería correspondiente a los años 1977, 1978, 1979 y primeros meses de 1980 (estamos en abril de 1980):

		1977	1978	1979	1980
enero	....	302	400	450	518
febrero	....	335	330	539	501
marzo	....	406	546	565	725
abril	....	396	549	583	
mayo	....	302	426	606	
junio	....	353	505	558	
julio	....	271	387	554	
agosto	....	320	437	489	
septiembre	....	356	489	613	
octubre	....	339	554	513	
noviembre	....	372	628	631	
diciembre	....	533	713	643	

Se pide efectuar la previsión de ventas para el resto del año 1980, para lo cual deberá emplearse un modelo que estime la tendencia y la estacionalidad.
Los datos reales de ventas durante 1980 han sido (estamos en enero de 1981)

mes		1980
abril	....	662
mayo	....	593
junio	....	548
julio	....	489
agosto	....	491
septiembre	....	704
octubre	....	629
noviembre	....	668
diciembre	....	770

Evaluar el funcionamiento del modelo.

2.4.8 Se conoce la serie cronológica de ventas de un determinado artículo destinado al sector de la hostelería, correspondiente a los años 1988, 1989, 1990 y primeros meses de 1991:

		1988	1989	1990	1991
enero	....	302	400	450	518
febrero	....	335	330	539	501
marzo	....	406	546	565	725
abril	....	396	549	583	
mayo	....	302	426	606	
junio	....	353	505	558	
julio	....	271	387	554	
agosto	....	320	437	489	
septiembre	....	356	489	613	
octubre	....	339	554	513	
noviembre	....	372	628	631	
diciembre	....	533	713	643	

a) Efectuar la previsión de ventas para el resto del año 1991, preparando un modelo de ajuste exponencial con estacionalidad.

b) Los datos reales de ventas en 1991 han sido:

mes		1991
abril	....	662
mayo	....	593
junio	....	548
julio	....	489
agosto	....	491
septiembre	....	704
octubre	....	629
noviembre	....	668
diciembre	....	770

Comprobar los resultados de la previsión y evaluar el funcionamiento del modelo. Actuar mes a mes, como si fuésemos teniendo datos progresivamente.

2.4.9 A un enfermo que está ingresado en un hospital se le toma la temperatura cada cuatro horas. La serie de observaciones desde su ingreso es la siguiente:

Día ↓ hora →	4	8	12	16	20	24
1			39,7	40,1	41,0	40,2
2	39,5	39,6	39,7	40,0	40,9	40,2
3	39,4	39,6	39,7	40,0	40,8	40,4
4	39,5	39,5	39,6	39,8	40,7	39,9
5	38,9	38,6	39,0	38,9	39,7	39,0
6	38,1	38,1	38,2	38,3	39,1	38,4
7	37,5	37,5	37,6	37,8	38,8	37,9

Dada la mucha fiebre observada, el médico ordenó un tratamiento antifebril , el cual se suministró a partir de las 12 horas del día 3.

a) ¿Ha producido efectos positivos dicho tratamiento? Desde el inicio del tratamiento, ¿cuánto tiempo tardó el enfermo en reaccionar?

b) Si sigue la misma evolución observada actualmente, ¿cuántos días tardará el enfermo en recuperar la temperatura normal?

c) ¿Qué influencia tiene la hora del día en la temperatura observada?

Información médica complementaria: la temperatura normal en un cuerpo humano sano es de 36,5 ºC; sin embargo, esta temperatura media no es constante; tiene oscilaciones periódicas que varían según la hora.

2.4.10 El propietario del hotel Mar&Vent, de 500 habitaciones, está preocupado por cómo obtener la máxima ocupación durante la temporada alta de verano: junio, julio y agosto. Durante estos tres meses puede ofrecer un total de 46.000 noches (500 camas x 92 días), pero sabe que si hace sólo 46.000 reservas, es seguro que tendrá muchas camas vacías. El historial desde que se inauguró el hotel es éste:

Año	Reservas	Efectivamente vendidos
73	46.000	38.180
74	46.000	36.616
75	46.000	36.524
76	46.000	37.720
77	55.200	42.872
78	53.000	42.665
79	51.500	38.968
80	49.700	35.701
81	53.700	42.781
82	61.000	47.173
83	50.000	37.500
84	49.700	36.153
85	68.200	48.400
86	53.000	37.356

Por lecturas hechas en revistas profesionales del sector, sabe que el ratio de reservas que finalmente no se venden varía cíclicamente cada cinco años. Ahora tiene la oportunidad de contratar, para los tres próximos años, un número de noches con un tour operador que le comprará (en reserva) tantas noches como quiera aceptar. El propietario no desea que la ocupación efectiva del hotel sea superior a 40.000 noches cada año, con lo que dejaría el resto para otros clientes y posibles variaciones imprevistas en la proporción de clientes efectivos respecto a las reservas.

a) Establecer un modelo para calcular cuántas reservas se tendrán que aceptar para cada uno de los tres próximos años.
b) Utilizando el modelo anterior, calcular estas cifras.

2.4.11 El Instituto Mongol de Estadística publica cada trimestre, entre otros datos, el índice de consumo de un cierto número de artículos.

Los valores correspondientes a uno de estos artículos para los últimos años (en base 100 = 1er trimestre de 1954), son:

Trimestre	1985	1986	1987	1988
1	322,1	325,4	327,9	332,0
2	280,4	285,5	285,8	
3	96,6	97,1	97,8	
4	146,2	148,1	150,0	

Se pide:

a) Hacer una estimación de los valores previsibles para los próximos cuatro trimestres.

b) ¿Cómo variaría esta previsión si los valores indicados, en lugar de tomarse en la base 100 indicada, fuesen tomados en base 100 = 1er trimestre de 1970?

c) El dato real del segundo trimestre de 1988 resulta ser 288,4. Con este nuevo dato, hacer una estimación de los valores previsibles para los próximos cuatro trimestres, utilizando un método diferente del utilizado en el primer apartado.

2.3.12 La empresa ZZZ quiere poner en marcha un sistema de previsión de su demanda para el producto *zzz*. De los datos históricos de ventas, se ha estimado lo siguiente:

Modelo de tendencia: Lineal

Método de previsión: Winters

Tendencia para el mes de enero de 1988: 514 unidades

Crecimiento mensual esperado: 0,28 unidades

Coeficiente mensual de estacionalidad:

Enero:	1,80	Febrero:	1,30	Marzo:	0,95
Abril:	0,50	Mayo:	0,50	Junio:	0,50
Julio:	0,30	Agosto:	0,05	Septiembre:	0,75
Octubre:	1,25	Noviembre:	1,95	Diciembre:	2,15

Se pide:
a) Establecer (razonándolos) unos valores lógicos para los parámetros del sistema.

b) Inicializar el sistema, teniendo en cuenta que los datos con los que se trabajará serán trimestrales.

c) Durante el año 1988, los datos reales han sido:

Primer trimestre:	2.083 unidades
Segundo trimestre:	773 unidades
Tercer trimestre:	567 unidades
Cuarto trimestre:	2.765 unidades

Aplicar el método en cada trimestre, y recalcular los parámetros para el próximo año, teniendo en cuenta que no ha habido cambios importantes en el entorno.

d) Juzgar (y justificar el juicio) si las estimaciones numéricas hechas inicialmente eran muy acertadas.

2.3.13 Preparar unos programas y realizar una simulación del comportamiento de la *tracking signal* en una proyección mediante ajuste exponencial. Para ello se generarán unos valores situados sobre una recta $a + b \cdot t$ (con a y b dados, y conocidos por el programa) a los que se añadirá una variable aleatoria distribuida normalmente de media nula y desviación tipo s (conocida).

Los valores obtenidos (*observaciones*) serán objeto, en otro módulo del programa, de una proyección mediante ajuste exponencial (con uno o dos parámetros).

Un tercer módulo calculará los valores de la *tracking signal* y, después de estratificarlos, guardará en memoria datos para determinar la frecuencia de su aparición.

Finalmente, el módulo resumen determinará los parámetros de la distribución de la *tracking signal* a partir de las frecuencias.

Debería ser posible determinar la variación de esta distribución al modificarse la(s) constante(s) de alisado, y eventualmente al modificarse la proporción relativa entre a, b y s (aunque en teoría esto no debería afectar).

Existen posibilidades para evitar el crecimiento indiscriminado de las observaciones y las sumas alisadas, lo que se conseguirá restando cada vez la cantidad b (como si se realizase un cambio de origen).

La puerta debería quedar abierta a la experimentación con el error de 2ª especie.