

donde δ es una constante arbitraria (Chow utiliza valores de δ cercanos a 0,05). Cada período se calculan tres proyecciones para el período siguiente, una con cada valor del coeficiente, aunque la proyección asociada al valor nominal α_o es la que normalmente se emplea para la toma de decisiones. Se calcula cada período la desviación absoluta media para cada una de las proyecciones, sean $D(\alpha_o)$, $D(\alpha_s)$ y $D(\alpha_i)$:

- si $D(\alpha_o)$ es menor que $D(\alpha_s)$ y $D(\alpha_i)$ no se cambia nada,
- si $D(\alpha_s) < D(\alpha_o) \leq D(\alpha_i)$ se toma como α_o el valor α_s y se recalculan los nuevos α_s y α_i ,
- si $D(\alpha_i) < D(\alpha_o) \leq D(\alpha_s)$ se toma como α_o el valor α_i y se recalculan los nuevos α_s y α_i ,
- si $D(\alpha_s)$ y $D(\alpha_i)$ son menores que $D(\alpha_o)$ se ajusta α_o en la dirección de la desviación absoluta media menor.

Después de cada modificación de α_o se hacen iguales a cero los tres valores de D .

2.1.5 Formas especiales de la curva de tendencia

Vamos a analizar el ajuste de expresiones representativas de la evolución de la tendencia diferentes de la polinómica utilizada hasta el momento. Es fácil extrapolar los resultados alcanzados hasta el momento al ajuste de expresiones formadas por combinación lineal de funciones de t ; por ejemplo, el modelo:

$$x_t = a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t) + \dots + a_n \cdot f_n(t) + \theta_t$$

donde la linealidad respecto a los parámetros a estimar: a_1, a_2, \dots, a_n permite la utilización de procedimientos relativamente sencillos y ricos en propiedades. A dicho esquema pertenecen las curvas de tendencia polinomial:

$$x_t = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_n \cdot t^n + \theta_t$$

que ajustará adecuadamente series temporales tales que las diferencias finitas de orden n se ajusten, a su vez, a una constante (recta horizontal). Podrá utilizarse el procedimiento descrito en 2.1.2.2 para el ajuste. Un caso particular es la tendencia lineal sobre la que hemos tratado extensamente.

Un nivel superior de dificultad aparece cuando no existe linealidad respecto a los parámetros, con lo que el modelo es de la siguiente forma:

$$x_t = F(t, a_1, a_2, \dots, a_n) + \theta_t$$

En general es posible estimar los a_i , buscando los valores a_i que minimizan el error cuadrático:

$$SSE = \sum_{t=1}^T [x_t - F(t, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n)]^2$$

empleando el procedimiento analítico o numérico más adecuado. Como habitualmente el sistema de ecuaciones obtenido derivando SSE respecto a los a_i e igualando a cero no será de resolución fácil (al faltar la linealidad) exigiendo procedimientos numéricos iterativos, lo más oportuno será utilizar un procedimiento numérico de minimización directamente sobre SSE (cuya convexidad podemos suponer habitualmente) del tipo gradiente o similar, con las dificultades adicionales que introduce el hecho de que el mínimo suele ser poco pronunciado, y que las superficies de nivel están frecuentemente muy alejadas de la hiper-esfera ideal.

Un procedimiento utilizable en ocasiones, poco justificable, salvo como aproximación inicial, pero que da buenos resultados, consiste en transformar x_t , sometiéndolo a un proceso que linealice la transformada de F respecto a los a_i , aplicando entonces los métodos más eficaces y sencillos del caso lineal. En ciertos casos puede utilizarse un procedimiento mixto, que disminuye el número de variables respecto a las que explorar en la búsqueda del mínimo de SSE . En lo que sigue veremos ejemplos de cómo puede procederse.

2.1.5.1 Curva potencial

El modelo es de la forma:

$$x_t = a \cdot t^b + \theta_t \quad (a, t \geq 0)$$

que, sometiendo x_t a la transformación logarítmica, nos permite substituirlo por el modelo:

$$\log(x_t) = \log(a) + b \cdot \log(t) + \theta_t'$$

que es lineal en $a' = \log(a)$ y b . Podemos hallar a' y b por los procedimientos conocidos de regresión lineal. Dichos valores no minimizan estrictamente SSE respecto al modelo original, sino respecto al substitutivo, pero normalmente podemos contentarnos con ello.

2.1.5.2 Curva exponencial

Los fenómenos cuya evolución está estrechamente relacionada con el crecimiento demográfico, o el de la actividad económica, suelen adaptarse a un crecimiento

exponencial:

$$x_t = a \cdot e^{b \cdot t} + \theta_t = a \cdot EXP(b \cdot t) + \theta_t \quad (a, t \geq 0)$$

donde $e = 2,717281\dots$ es la base de los logaritmos neperianos. Alternativamente, llamando $q = EXP(b)$, tendremos la forma siguiente:

$$x_t = a \cdot q^t + \theta_t \quad (a, t \geq 0)$$

creciente si $q > 1$ y decreciente si $q < 1$.

Tomando logaritmos neperianos de x_t podemos utilizar el modelo substitutivo:

$$\ln(x_t) = \ln(a) + b \cdot t + \theta_{t'}$$

que es lineal en $a' = \ln(a)$ y b

(1) año t	(2) $cv/100 TP$ x	(3) t'	(4) t'^2	(5) $y = \ln(x)$	(6) $t' \cdot y$	(7) y teórica	(8) x teórica
1904	252,0	-29	841	5,5294	-160,3534	5,5230	250,38
1909	288,0	-24	576	5,6630	-135,9110	5,6595	287,00
1914	326,0	-19	361	5,7869	-109,9511	5,7960	329,99
1919	383,0	-14	196	5,9480	-83,2725	5,9326	377,12
1925	437,0	-8	64	6,0799	-48,6395	6,0964	444,26
1927	473,0	-6	36	6,1591	-36,9546	6,1510	469,19
1929	491,0	-4	16	6,1964	-24,7858	6,2056	495,53
1939	652,0	6	36	6,4800	38,8803	6,4787	651,12
1954	958,0	21	441	6,8648	144,1618	6,8883	980,71
1962	1249,0	29	841	7,1301	206,7729	7,1067	1220,15
$T=10$	Σ	-48	3408	61,8378	-210,0529		

$$\hat{y} = 6,31485 + 0,0273063 \times (t - 1933)$$

Fig. 2.1.5.1 Evolución de los caballos de vapor por cada 100 trabajadores productivos 1904-1962 (fuente "Historical Statistics OF THE United States")

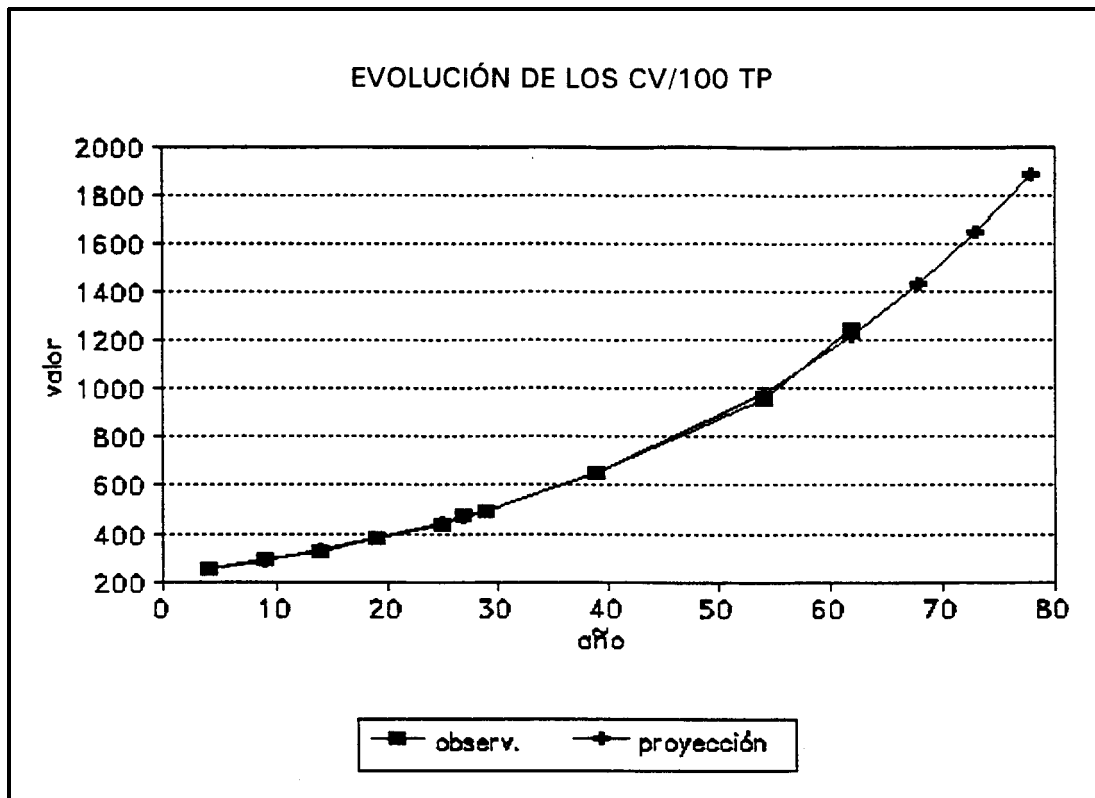


Fig. 2.1.5.2 Evolución CV/100 trabajadores: Representación del ajuste de los datos de la figura 2.1.5.1 mediante una exponencial

En muchos casos el modelo substitutivo constituye sólo una primera aproximación, y se deben depurar los valores de los parámetros mediante técnicas análogas a las que utilizaremos en los párrafos siguientes (ajuste de una exponencial modificada). En el caso de los datos de la figura 2.1.5.1 el ajuste obtenido a partir de la transformación:

$$\hat{x}_t = 552,72 \cdot e^{0,0273 \cdot (t-1933)}$$

es altamente satisfactorio como puede comprobarse en la figura 2.1.5.2.

2.1.5.2.1 ¿Cómo reconocer el crecimiento exponencial?

Una serie estrictamente exponencial *sin ruido* satisfará exactamente los criterios que siguen; una serie real, con ruido, sólo los satisfará *aproximadamente*.

- *Cociente*: el cociente entre el valor de una observación y el valor anterior debe aproximarse a una constante:

$$\frac{x_t}{x_{t-1}} = \frac{a \cdot \text{EXP}(b \cdot (t)) + \theta_t}{a \cdot \text{EXP}(b \cdot (t-1)) + \theta_{t-1}} = \text{EXP}(b) = \text{cte}$$

- *Logaritmo*: los logaritmos de las observaciones representados en función de t están aproximadamente alineados:

$$\ln(x_t) = \ln(a \cdot \text{EXP}(b \cdot t) + \theta_t) \approx \ln(a) + b \cdot t$$

(Es la propiedad utilizada para el ajuste. Exige que a todo t , $x_t > 0$, lo que puede no suceder aun siendo el modelo adecuado, según los valores relativos de a , b y la varianza de θ)

t	x_t	$\frac{x_t}{x_{t-1}}$	$\ln(x_t)$	d_t	$\ln(x_t)$ teórico	d_t teórico
1	2,266		0,818016		0,818093	0,567982
2	2,568	1,133274	0,943127	0,644	0,943097	0,643679
3	2,91	1,133178	1,068153	0,722	1,068100	0,729403
4	3,29	1,130584	1,190888	0,826	1,193104	0,824651
5	3,736	1,135584	1,318016	0,944	1,318108	0,936443
6	4,234	1,133298	1,443147	1,062	1,443112	1,061269
7	4,798	1,133207	1,568199	1,203	1,568116	1,202637
8	5,437	1,133180	1,693227	1,362	1,693119	1,362805
9	6,16	1,132978	1,818077	1,544	1,818123	1,544028
10	6,981	1,133279	1,943192	1,750	1,943127	1,749815
11	7,91	1,133075	2,068128	1,982	2,068131	1,982672
12	8,963	1,133123	2,193105	2,247	2,193135	2,246611
13	10,157	1,133214	2,318163	2,546	2,318138	2,545892
14	11,509	1,133110	2,443129	2,885	2,443142	2,884776
15	13,042	1,133200	2,568175	3,269	2,568146	3,269028
16	14,778	1,133108	2,693140	3,704	2,693150	3,704163
17	16,746	1,133171	2,818159	4,179	2,818154	4,197450
18	18,975	1,133106	2,943122	4,756	2,943157	4,756158
19	21,502	1,133175	3,068146	5,390	3,068161	5,389560
20	24,365	1,133150	3,193148		3,193165	6,107182

Fig. 2.1.5.3 Crecimiento exponencial. Control del ajuste de STE001.

Cociente, valor teórico = 1,133157

Logaritmo, recta de regresión: $\ln(x_t) = 0,693089 + 0,1250038 \times t$

Diferencia, constante de proporcionalidad = 0,2506539

- *Diferencia*: las diferencias entre observaciones son aproximadamente proporcionales a las mismas. Tomando diferencias centradas, por ejemplo:

$$d_t = x_{t+1} - x_{t-1} = a \cdot \text{EXP}(b \cdot (t+1)) + \theta_{t+1} - a \cdot \text{EXP}(b \cdot (t-1)) - \theta_{t-1}$$

tendremos:

$$\frac{d_t}{x_t} = \frac{d_t}{a \cdot \text{EXP}(b \cdot t) + \theta_t} \approx \text{EXP}(b) - \text{EXP}(-b) = \text{cte.}$$

En las *figuras 2.1.5.3 y 2.1.5.4* pueden verse los resultados del control efectuados sobre las series STE001 (que es exponencial pura) y ST002 (idéntica a la anterior salvo la adición de un ruido gaussiano).

t	x_t	$\frac{x_t}{x_{t-1}}$	$\ln(x_t)$	d_t	$\ln(x_t)$ teórico	d_t teórico
1	2,869		1,053964		0,794392	0,722693
2	2,145	0,747647	0,763140	-0,439	0,921076	0,540320
3	2,43	1,132867	1,887891	1,074	1,047760	0,612110
4	3,219	1,324691	1,169071	1,303	1,174444	0,810857
5	3,733	1,159677	1,317212	0,699	1,301128	0,940333
6	3,918	1,049558	1,365581	1,114	1,427812	0,986934
7	4,847	1,237111	1,578360	1,801	1,554496	1,220946
8	5,719	1,179905	1,743794	1,412	1,681180	1,440601
9	6,259	1,094422	1,834020	1,398	1,807864	1,576625
10	7,117	1,137083	1,962486	1,213	1,934548	1,792753
11	7,472	1,049881	2,011163	1,711	2,061232	1,882177
12	8,828	1,181478	2,177928	3,144	2,187916	2,223749
13	10,616	1,202537	2,362362	2,799	2,314600	2,674142
14	11,594	1,092125	2,450488	2,034	2,441284	2,920497
15	12,650	1,091082	2,537657	3,001	2,567968	3,186501
16	14,595	1,153755	2,680679	4,523	2,694652	3,676441
17	17,173	1,176636	2,843338	4,460	2,821336	4,325832
18	19,055	1,109591	2,947330	4,466	2,948020	4,799903
19	21,639	1,135607	3,074497	5,400	3,074704	5,450806
20	24,455	1,130135	3,196835		3,201388	6,160148

Fig. 2.1.5.43 Crecimiento exponencial. Control del ajuste de STE002.

Cociente, valor teórico = 1,133157

Logaritmo, recta de regresión: $\ln(x_t) = 0,667708 + 0,126684 \times t$

Diferencia, constante de proporcionalidad = 0,2518973

2.1.5.3 Crecimiento con saturación

Algunos fenómenos, por su misma naturaleza, tienen una tendencia creciente, pero su valor está limitado superiormente debido a un efecto de saturación. A medida que el valor se acerca al límite, el crecimiento se va amortiguando. El parque de automóviles de un país tiene un límite, entre otras cosas porque el espacio disponible es finito, como cada día podemos comprobar viendo el estado de la circulación en nuestras ciudades y carreteras. Cuando el número de vehículos estaba lejos de dicho límite el crecimiento se podía producir sin trabas y era prácticamente exponencial. Cuando en promedio cada persona disponga de un automóvil (y con toda probabilidad, mucho antes), el crecimiento del parque será prácticamente nulo, y sólo será impulsado por el crecimiento demográfico si es que éste existe. Esto no significará que no se fabriquen y vendan automóviles, pues será necesaria la reposición regular de parte del parque (por motivos de envejecimiento y obsolescencia, entre otras causas).

Tres curvas son habitualmente utilizadas para reproducir las características del crecimiento con saturación:

CURVA EXPONENCIAL MODIFICADA

$$x_t = a - b \cdot \text{EXP}(-c \cdot t) \quad a, b, c > 0$$

CURVA DE GOMPERTZ

$$x_t = \text{EXP}(a - b \cdot \text{EXP}(-c \cdot t)) \quad a, b, c > 0$$

CURVA LOGÍSTICA (O DE PEARL)

$$x_t = \frac{a}{1 + b \cdot \text{EXP}(-c \cdot t)} \quad a, b, c > 0$$

Las dos últimas tienen un punto de inflexión (en $t = \ln(b)/c$) que separa una primera zona de crecimiento casi exponencial de una segunda en la que ya es aparente el efecto de saturación (fig. 2.1.5.5). El límite de crecimiento o saturación está fijado en a para la primera y tercera curvas, y en $\text{EXP}(a)$ en la de Gompertz.

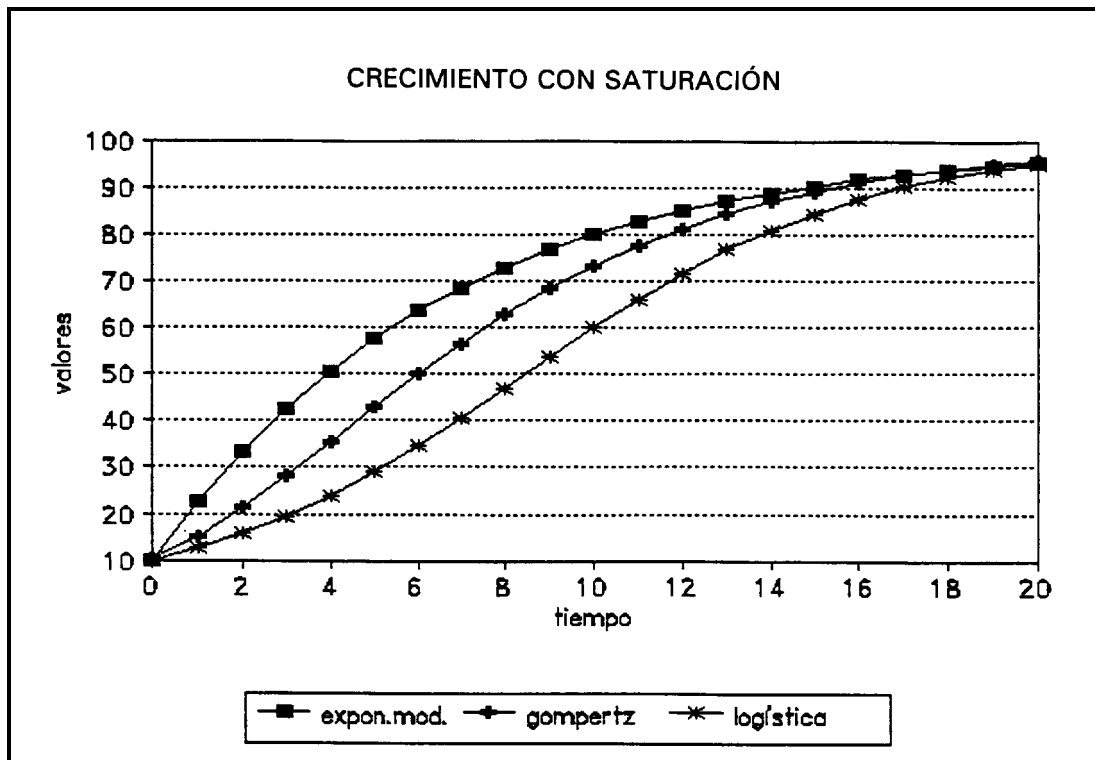


Fig. 2.1.5.5 Crecimiento con saturación: Comparación de las curvas exponencial modificada, de Gompertz y logística. Las tres curvas dibujadas tienen el mismo valor inicial y el mismo valor límite. La curva de Gompertz se mantiene entre las otras dos. La exponencial, fácilmente distinguible a causa de la ausencia de punto de inflexión, toma valores mayores que las otras dos curvas en el intervalo representado, aunque a partir de $t=20$, donde las tres curvas coinciden aproximadamente, se invertiría la situación

2.1.5.4 Ajuste de la exponencial modificada

Llamemos $f(t,a,b,c)$ a los valores obtenidos en la expresión de la curva exponencial modificada substituyendo t y los parámetros a , b y c por unos valores concretos:

$$f(t, a, b, c) = a - b \cdot \text{EXP}(-c \cdot t)$$

Dadas T observaciones, el error cuadrático será igual a:

$$SSE = \sum_{t=1}^T [x_t - f(t, a, b, c)]^2$$

cuyas derivadas respecto a a , b y c serán:

$$\frac{\delta SSE}{\delta a} = -2 \cdot \sum_{t=1}^T [x_t - f(t, a, b, c)] = -g_a(a, b, c)$$

$$\frac{\delta SSE}{\delta b} = 2 \cdot \sum_{t=1}^T [x_t - f(t, a, b, c)] \cdot \text{EXP}(-c \cdot t) = -g_b(a, b, c)$$

$$\frac{\delta SSE}{\delta c} = -2 \cdot \sum_{t=1}^T [x_t - f(t, a, b, c)] \cdot b \cdot t \cdot \text{EXP}(-c \cdot t) = -g_c(a, b, c)$$

Los valores a , b y c minimizarán SSE si g_a , g_b y g_c son los tres nulos; en caso contrario, podemos mejorar el valor de SSE (disminuirlo) substituyendo a , b y c por valores de la forma:

$$a + \mu \cdot g_a \Rightarrow a$$

$$b + \mu g_b \Rightarrow b$$

$$c + \mu \cdot g_c \Rightarrow c$$

dando a μ un valor positivo suficientemente pequeño. En las aplicaciones prácticas hemos utilizado alternativamente tres procedimientos para disminuir SSE :

- 1) El procedimiento indicado, variando a la vez los tres parámetros (método del Gradiente).
- 2) Un procedimiento basado en modificar cada vez *uno solo de los parámetros* tendiendo a la disminución de SSE y del valor absoluto del valor g correspondiente (método Manhattan).
- 3) Un procedimiento, subsidiario de los anteriores, consistente en variar los parámetros en la dirección y proporciones en que se han obtenido las mejoras en éstos (método Recta Aparente).

Los valores iniciales de a , b y c son importantes para garantizar la rápida convergencia del procedimiento. El valor c puede estimarse anulando el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} \sum x_t & T & \sum \text{EXP}(-c \cdot t) \\ \sum x_t \cdot \text{EXP}(-c \cdot t) & \sum \text{EXP}(-c \cdot t) & \sum \text{EXP}(-2 \cdot c \cdot t) \\ \sum t \cdot x_t \cdot \text{EXP}(-c \cdot t) & \sum t \cdot \text{EXP}(-c \cdot t) & \sum t \cdot \text{EXP}(-2 \cdot c \cdot t) \end{vmatrix}$$

lo que puede lograrse actualmente mediante el tanteo con diferentes valores de c en un micro-ordenador o utilizando un procedimiento más sofisticado de minimización de funciones no lineales (no siendo preciso en la actualidad recurrir a los procedimientos basados en las funciones de Gomes). Con el valor de c determinado, pueden obtenerse los primeros valores de a y b mediante la resolución del sistema lineal en dichas variables:

$$a \cdot T - b \cdot \sum \text{EXP}(-c \cdot t) = \sum x_t$$

$$a \cdot \sum \text{EXP}(-c \cdot t) - b \cdot \sum \text{EXP}(-2 \cdot c \cdot t) = \sum x_t \cdot \text{EXP}(-c \cdot t)$$

Los dos pasos descritos equivalen a resolver el sistema obtenido al anular las tres derivadas parciales de SSE con la aproximación consecuente de la obtenida en el valor de c .

t	STR001	STR002	STR003	STR004	STR005	STR008
1	3,695	3,846	3,438	3,740	1,235	1,340
2	4,087	3,981	4,231	4,019	1,442	1,368
3	4,508	4,388	5,081	4,841	1,625	1,541
4	4,960	4,940	5,971	5,932	1,787	1,773
5	5,440	5,439	6,886	6,884	1,929	1,929
6	5,949	5,870	7,809	7,651	2,055	2,000
7	6,484	6,497	8,726	8,751	2,166	2,175
8	7,044	7,114	9,624	9,765	2,264	2,314
9	7,624	7,649	10,493	10,542	2,351	2,368
10	8,222	8,256	11,325	11,393	2,427	2,451
11	8,833	8,724	12,114	11,895	2,494	2,418
12	9,453	9,420	12,855	12,787	2,554	2,530
13	10,078	10,193	13,547	13,777	2,606	2,687
14	10,702	10,723	14,189	14,231	2,652	2,667
15	11,320	11,222	14,780	14,584	2,693	2,625
16	11,928	11,883	15,323	15,231	2,729	2,697
17	12,522	12,629	15,818	16,032	2,761	2,836
18	13,098	13,117	16,268	16,308	2,789	2,803
19	13,651	13,685	16,676	16,744	2,814	2,838
20	14,180	14,203	17,045	17,090	2,836	2,852

Fig. 2.1.5.6 Valores de las series temporales STR001, STR002, STR003, STR004, STR005 Y STR008. Dichas series muestran un crecimiento con saturación pero con características distintas

2.1.5.3.1 ¿Cómo distinguir datos que se ajustan a una exponencial modificada?

Observemos que si (despreciando la existencia de ruido):

$$x_t = a - b \cdot \text{EXP}(-c \cdot t)$$

calculando diferencias centradas obtenemos:

$$\begin{aligned} z_t = x_{t+1} - x_{t-1} &= b \cdot \text{EXP}[-c \cdot (t-1)] - b \cdot \text{EXP}[-c \cdot (t+1)] = \\ &= b \cdot \text{EXP}(-c \cdot t) \cdot [\text{EXP}(c) - \text{EXP}(-c)] = \\ &= (a - x_t) \cdot [\text{EXP}(c) - \text{EXP}(-c)] \end{aligned}$$

de donde existen dos posibilidades a explorar:

- a) El crecimiento de z_t es exponencial respecto a t ; si todos los valores de z_t son positivos (lo que puede no ocurrir debido a la existencia de ruido) podemos estudiar si sus logaritmos se ajustan a una línea recta:

$$\ln(z_t) = \ln(b \cdot [\text{EXP}(c) - \text{EXP}(-c)]) - c \cdot t$$

La pendiente de la recta nos dará una primera estimación del valor de c , y de la ordenada en el origen podemos deducir una del valor de b .

- b) La relación entre z_t y x_t es lineal (lo que puede comprobarse independientemente del signo de z_t mediante el coeficiente de correlación). La pendiente de la recta de regresión nos permitirá obtener una primera estimación de c , y la ordenada en el origen una de a .

En las *figuras 2.1.5.7 y 2.1.5.8* hemos analizado el control del ajuste a una exponencial modificada de las series STR005 y STR008. Para esta última se han resumido los cálculos en la *figura 2.1.5.9*. De los mismos se deduce que el valor inicial de c es 0,10234027. Iterando a partir del mismo para anular el determinante obtenemos el segundo valor de c , 0,11423413 y a partir de ahí los valores de a y b del sistema lineal. Prácticamente la aproximación es suficiente, y en definitiva las estimaciones para los tres parámetros de la exponencial modificada son:

$$\hat{a} = 3,06985268; \quad \hat{b} = 2,04595828; \quad \hat{c} = 0,11423835$$

a los que corresponde $SSE = 0,05216988$. En la *figura 2.1.5.10* se ha representado el ajuste. La proyección a los cinco períodos siguientes es:

$$\hat{x}_{21} = 2,884;$$

$$\hat{x}_{22} = 2,904;$$

$$\hat{x}_{23} = 2,922;$$

$$\hat{x}_{24} = 2,938;$$

$$\hat{x}_{25} = 2,952.$$

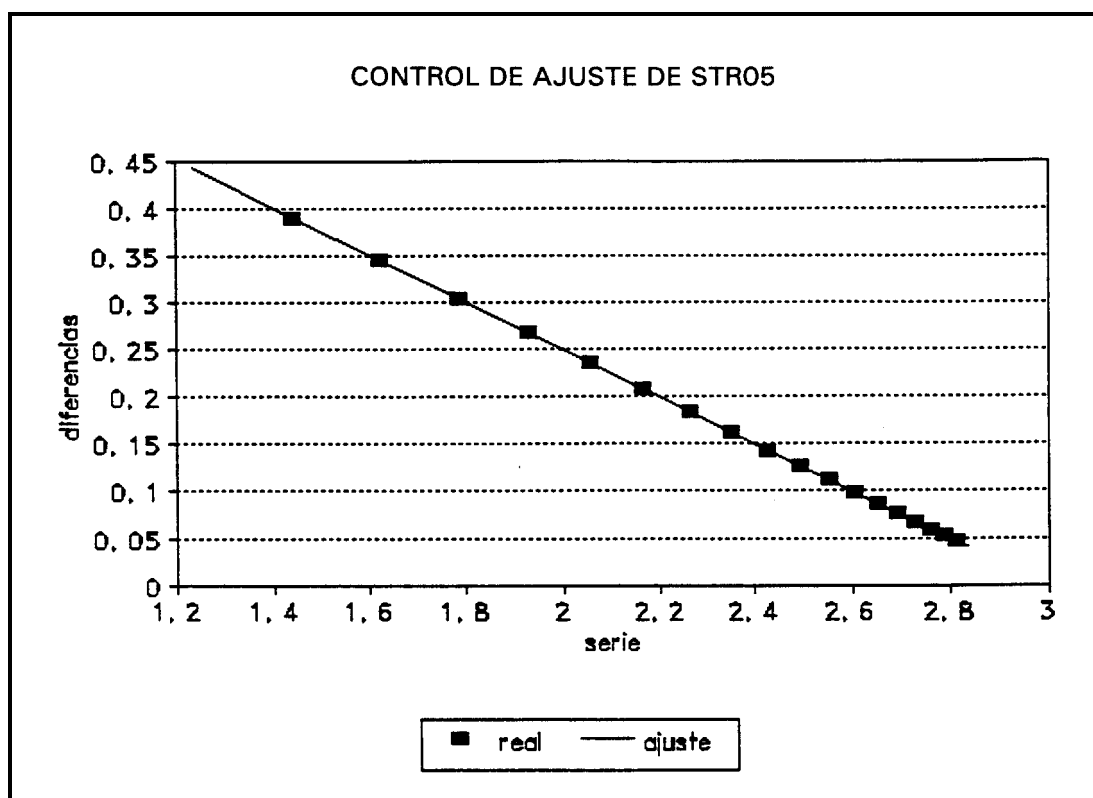
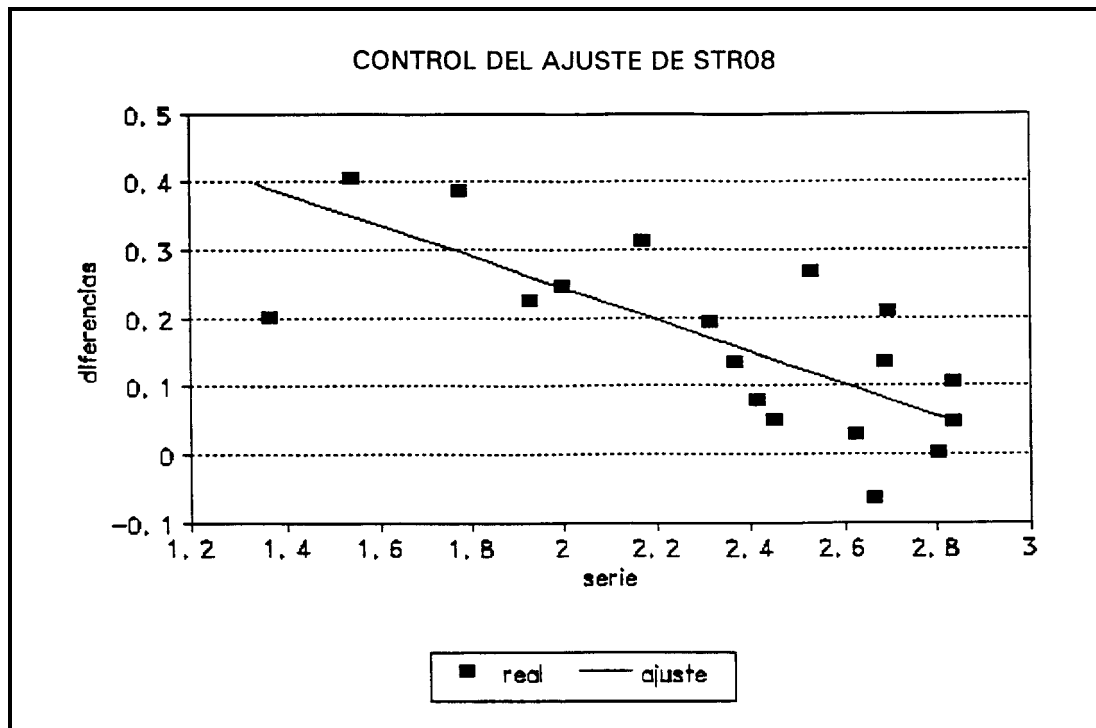


Fig. 2.1.5.7 Control del ajuste de la serie temporal STR005 mediante una exponencial modificada: Se ha analizado la relación entre la diferencia (centrada) de los valores y los mismos valores. Dicha relación se ajusta perfectamente a una recta, dado que la serie STR005 corresponde muy exactamente a una exponencial modificada



ig. 2.1.5.8 Control del ajuste de la serie temporal STR008 mediante una exponencial modificada: La relación entre diferencias y valores tiene un aspecto vagamente lineal. La serie STR008, aunque se adapta a una exponencial modificada, está dotada de una perturbación notable

t	x_t	z_t	\hat{z}_t	t	x_t	z_t	\hat{z}_t
1	1,340		0,3696	11	2,418	0,079	0,1485
2	1,368	0,201	0,3638	12	2,530	0,269	0,1256
3	1,541	0,405	0,3284	13	2,687	0,137	0,0934
4	1,773	0,388	0,2808	14	2,667	-0,062	0,0975
5	1,929	0,227	0,2488	15	2,625	0,030	0,1061
6	2,000	0,246	0,2342	16	2,697	0,211	0,0975
7	2,175	0,314	0,1984	17	2,836	0,106	0,0913
8	2,314	0,193	0,1699	18	2,803	0,002	0,0628
9	2,368	0,137	0,1588	19	2,838	0,049	0,0624
10	2,451	0,050	0,1418	20	2,852		0,0595

Fig 2.1.5.9 Control del ajuste mediante una exponencial modificada de la serie STR008

Coefficiente de correlación : - 0,7033

Recta de regresión: $\hat{z}_t = 0,6443 - 0,2050 \cdot x_t$

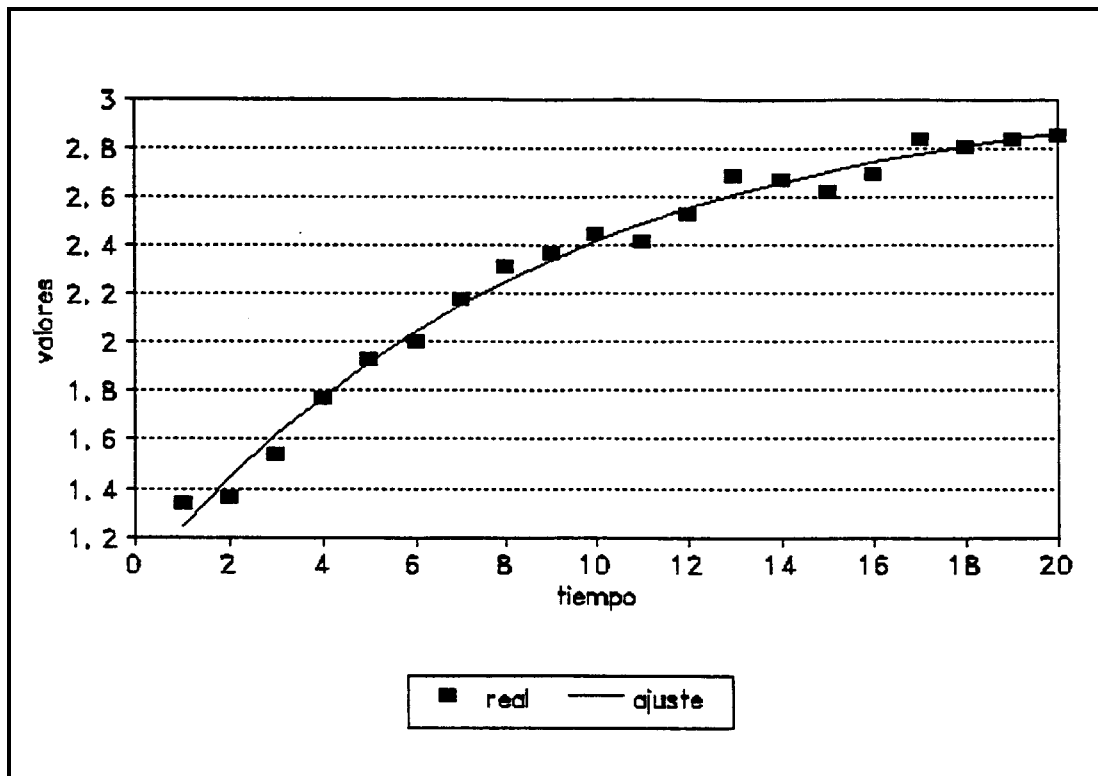


Fig. 2.1.5.10 Comparación entre la serie temporal STR008 y la exponencial modificada resultado del ajuste: El ajuste es aceptable pero las observaciones se reparten alrededor de la curva exponencial modificada

2.1.5.4 Ajuste de la curva de Gompertz

Llamemos $f(t, a, b, c)$ a los valores obtenidos en la expresión de la curva de Gompertz substituyendo t y los parámetros a , b y c por unos valores concretos:

$$f(t, a, b, c) = \text{EXP}[a - b \cdot \text{EXP}(-c \cdot t)]$$

Dadas T observaciones, el error cuadrático será igual a:

$$SSE = \sum_{t=1}^T [x_t - f(t, a, b, c)]^2$$

cuyas derivadas respecto a a , b y c serán:

$$\frac{\delta SSE}{\delta a} = -2 \cdot \sum_{t=1}^T [x_t - f(t, a, b, c)] \cdot f(t, a, b, c) = -g_a(a, b, c)$$

$$\frac{\delta SSE}{\delta b} = 2 \cdot \sum_{t=1}^T [x_t - f(t, a, b, c)] \cdot \text{EXP}(-c \cdot t) \cdot f(t, a, b, c) = -g_b(a, b, c)$$

$$\frac{\delta SSE}{\delta c} = -2 \cdot \sum_{t=1}^T [x_t - f(t, a, b, c)] \cdot b \cdot t \cdot \text{EXP}(-c \cdot t) \cdot f(t, a, b, c) = -g_c(a, b, c)$$

Los valores a , b y c minimizarán SSE si g_a , g_b y g_c son los tres nulos; en caso contrario, podemos mejorar el valor de SSE (disminuirlo) en forma análoga a la descrita para la curva exponencial modificada.

2.1.5.4.1 ¿Cómo distinguir datos que se ajustan a una curva de Gompertz?

Observemos que si (despreciando la existencia de ruido):

$$x_t = \text{EXP}[a - b \cdot \text{EXP}(-c \cdot t)]$$

su logaritmo neperiano y_t se ajusta a una exponencial modificada:

$$y_t = \ln(x_t) = a - b \cdot \text{EXP}(-c \cdot t)$$

y podemos aplicar a y_t los procedimientos descritos, incluyendo la anulación del determinante para disponer de una primera estimación de c , y la resolución del sistema lineal para obtener seguidamente las estimaciones iniciales de a y b .

La serie STR003 se ajusta perfectamente a una curva de Gompertz, lo mismo que la STR004, aunque en esta última se ha incluido un ruido gaussiano (los cálculos correspondientes se han resumido en la *figura 2.1.5.11*).

El valor inicial de c es 0,1110, que conduce a los valores de a y b deducidos del sistema lineal 3,0902 y 2,0661. Después de varias iteraciones para reducir SSE llegamos a:

$$\hat{a} = 2,996681111; \quad \hat{b} = 2,03967242; \quad \hat{c} = 0,12767013$$

que corresponde al valor de SSE 0,315295. Las proyecciones para los cinco períodos

siguientes son:

$$\hat{x}_{21} = 17,409;$$

$$\hat{x}_{22} = 17,703;$$

$$\hat{x}_{23} = 17,966;$$

$$\hat{x}_{24} = 18,200;$$

$$\hat{x}_{25} = 18,409.$$

t	x_t	y_t	z_t	\hat{z}_t	t	x_t	y_t	z_t	\hat{z}_t
1	3,740	1,3191		0,3898	11	11,895	2,4761	0,1154	0,1324
2	4,019	1,3910	0,2580	0,3738	12	12,787	2,5484	0,1469	0,1163
3	4,841	1,5771	0,3893	0,3324	13	13,777	2,6230	0,1070	0,0997
4	5,932	1,7804	0,3521	0,2872	14	14,231	2,6554	0,0569	0,0925
5	6,884	1,9292	0,2545	0,2541	15	14,584	2,6799	0,0679	0,0871
6	7,651	2,0348	0,2400	0,2306	16	15,231	2,7233	0,0947	0,0774
7	8,751	2,1692	0,2440	0,2007	17	16,032	2,7746	0,0683	0,0660
8	9,765	2,2788	0,1862	0,1763	18	16,308	2,7917	0,0435	0,0622
9	10,542	2,3554	0,1542	0,1593	19	16,744	2,8180	0,0468	0,0563
10	11,393	2,4330	0,1208	0,1420	20	17,090	2,8385		0,0518

Fig. 2.1.5.11 Control del ajuste mediante una curva de GOMPERTZ de la serie STRO04
Coeficiente de correlación: $-0,9247$
Recta de regresión: $\hat{z}_t = 0,6833 - 0,2225 \cdot y_t$

2.1.5.5 Ajuste de la curva logística

Llamemos $f(t,a,b,c)$ a los valores obtenidos en la expresión de la curva logística substituyendo t y los parámetros a , b y c por unos valores concretos:

$$f(t, a, b, c) = \frac{a}{1 + b \cdot \text{EXP}(-c \cdot t)}$$

Dadas T observaciones, el error cuadrático será igual a:

$$SSE = \sum_{t=1}^T [x_t - f(t, a, b, c)]^2$$

cuyas derivadas respecto a a , b y c serán:

$$\frac{\delta SSE}{\delta a} = -2 \cdot \sum_{t=1}^T [x_t - f(t, a, b, c)] \cdot \frac{f(t, a, b, c)}{a} = -g_a(a, b, c)$$

$$\frac{\delta SSE}{\delta b} = 2 \cdot \sum_{t=1}^T [x_t - f(t, a, b, c)] \cdot \text{EXP}(-c \cdot t) \cdot \frac{[f(t, a, b, c)]^2}{a} = -g_b(a, b, c)$$

$$\frac{\delta SSE}{\delta c} = -2 \cdot \sum_{t=1}^T [x_t - f(t, a, b, c)] \cdot b \cdot t \cdot \text{EXP}(-c \cdot t) \cdot \frac{[f(t, a, b, c)]^2}{a} = -g_c(a, b, c)$$

Los valores a , b y c minimizarán SSE si g_a , g_b y g_c son los tres nulos; en caso contrario, podemos mejorar el valor de SSE (disminuirlo) en forma análoga a la descrita para la curva exponencial modificada.

2.1.5.5.1 ¿Cómo distinguir datos que se ajustan a una curva logística?

Observemos que si (despreciando la existencia de ruido):

$$x_t = \frac{a}{1 + b \cdot \text{EXP}(-c \cdot t)}$$

su inversa y_t se ajusta a una exponencial modificada:

$$y_t = a' + b' \cdot \text{EXP}(-c \cdot t)$$

donde:

$$a' = \frac{1}{a} \quad ; \quad b' = \frac{b}{a}$$

y podemos aplicar a y_t los procedimientos descritos, incluyendo la anulación del determinante para disponer de una primera estimación de c , y la resolución del sistema lineal para obtener seguidamente las estimaciones iniciales de a y b . Será conveniente, en este caso, dado que en principio y_t es decreciente, tomar:

$$z_t = y_{t-1} - y_{t+1}$$

Las series STR001 y SRT002 se ajustan aceptablemente a una logística, aunque en la segunda se ha incluido una perturbación. Los datos para el análisis del control del ajuste de STR002 se han resumido en la *figura 2.1.5.12*.

t	x_t	y_t	z_t	\hat{z}_t	t	x_t	y_t	z_t	\hat{z}_t
1	3,846	0,2600		0,0487	11	8,724	0,1146	0,0150	0,0163
2	3,981	0,2512	0,0321	0,0468	12	9,420	0,1062	0,0165	0,0144
3	4,388	0,2279	0,0488	0,0416	13	10,193	0,0981	0,0129	0,0126
4	4,940	0,2024	0,0440	0,0359	14	10,723	0,0933	0,0090	0,0115
5	5,439	0,1839	0,0321	0,0318	15	11,222	0,0891	0,0091	0,0106
6	5,870	0,1704	0,0299	0,0287	16	11,883	0,0842	0,0099	0,0095
7	6,497	0,1539	0,0298	0,0251	17	12,629	0,0792	0,0079	0,0084
8	7,114	0,1406	0,0232	0,0221	18	13,117	0,0762	0,0061	0,0077
9	7,649	0,1307	0,0194	0,0199	19	13,685	0,0731	0,0058	0,0070
10	8,256	0,1211	0,0161	0,0178	20	14,203	0,0704		0,0064

Fig. 2.1.5.12 Control del ajuste mediante una curva logística de la serie STR002

Coefficiente de correlación: -0,9317

Recta de regresión: $\hat{z}_t = -0,0093 + 0,2231 \cdot y_t$

La primera estimación de c , deducida de la recta de regresión, es 0,1113, que a través de la anulación del determinante se convierte en 0,1187. Este valor proporciona los iniciales de a y b , respectivamente 21,7050 y 5,4460, para los que SSE toma un valor de 0,2007. Mediante iteraciones sucesivas siguiendo los procedimientos expuestos llegamos a los siguientes valores:

$$\hat{a} = 20,1111; \quad \hat{b} = 5,0549; \quad \hat{c} = 0,1250; \quad SSE = 0,1094.$$

Los valores proyectados a los cinco próximos períodos son:

$$\hat{x}_{21} = 14,731;$$

$$\hat{x}_{22} = 15,213;$$

$$\hat{x}_{23} = 15,666;$$

$$\hat{x}_{24} = 16,088;$$

$$\hat{x}_{25} = 16,481.$$

2.1.6 Determinación de las variaciones estacionales

Vamos a considerar a continuación que en el modelo del fenómeno al que corresponden las observaciones consideramos el efecto de una estacionalidad de período L observaciones. Si las observaciones son mensuales, L valdrá 12, si son trimestrales, 4.

2.1.6.1 Forma de las variaciones estacionales

Supondremos dos formas generales de las variaciones estacionales, la aditiva y la multiplicativa. En la forma aditiva el modelo será:

$$x_t = f(t) + c_t + \theta_t$$

donde:

$f(t)$ expresa la tendencia,

c_t es la variación o término estacional

θ_t el álea o ruido.

Se cumplirá en general:

$$c_{t-L} = c_t \quad \text{(VEA1)}$$

$$\sum_{i=0}^{L-1} c_{t-i} = 0 \quad \text{(VEA2)}$$

para cualquier t

donde (VEA1) expresa que la variación se repite transcurrida la periodicidad, y (VEA2) que el conjunto de variaciones respecto a la tendencia dentro del período se compensan.

En la forma multiplicativa el modelo será:

$$x_t = f(t) \cdot c_t + \theta_t$$

con los mismos significados de las variables, aunque ahora c_t puede recibir propiamente el nombre de *coeficiente* estacional. Los condicionantes ahora serán:

$$\begin{array}{ll}
 c_{t-L} = c_t & \text{(VEM1)} \\
 \sum_{i=0}^{L-1} c_{t-i} = L & \text{(VEM2)} \\
 c_t > 0 & \text{(VEM3)} \\
 & \text{para cualquier } t
 \end{array}$$

donde (VEM1) es del mismo tipo que en el caso anterior, y (VEM2), que tiene como objeto la normalización de los coeficientes, repartiendo entre tendencia y estacionalidad los valores de la serie. Una homología directa con (VEA2) implicaría que el segundo miembro de (VEM2) fuese 1 en lugar de L , pero es más cómoda la solución elegida; en particular si $c_t = 1$ el valor de x_t (salvo el ruido) coincide con la tendencia y podemos hablar de período con *valor medio*. (VEM3) es intuitivamente evidente y se ha incluido solamente para que el conjunto resulte lógicamente coherente.

2.1.6.2 Eliminación de las variaciones estacionales mediante el filtro de las medias móviles

De los condicionantes del apartado anterior resulta directamente que la media móvil de primer orden sobre L observaciones elimina la variación estacional aditiva sea cual sea la tendencia, y la variación estacional multiplicativa si la tendencia es constante.

Naturalmente en el primer caso la media móvil, actuando sobre la tendencia, puede producir en ella deformaciones o efectos especiales, que en el caso de tendencia lineal se reducen, como ya hemos visto, a una simple traslación.

Menos fácil de apreciar intuitivamente, pero fácil de comprobar analíticamente, es la propiedad de la media móvil de primer orden sobre L observaciones de transformar la estacionalidad multiplicativa en aditiva si la tendencia es lineal; en consecuencia, la media móvil de segundo orden sobre L observaciones elimina la estacionalidad multiplicativa cuando existe dicha tendencia.

También aquí conviene recordar que la media móvil de segundo orden introducirá deformaciones en la tendencia, que en el caso de tendencia lineal es una simple traslación.

t	x_t	M_t	$M2_t$	t	x_t	M_t	$M2_t$
1	143			9	247	175,75	160
2	108			10	180	184,75	170
3	156			11	252	196,75	180
4	84	122,75		12	132	202,75	190
5	195	135,75		13	299	215,75	200
6	144	144,75		14	216	224,75	210
7	204	156,75	140	15	300	236,75	220
8	108	162,75	150	16	156	242,75	230

Fig. 2.1.6.1 La serie de observaciones trimestrales ST12 con tendencia lineal $100 + 10 \cdot t$; Coeficientes estacionales ($L = 4$) 1,3; 0,9; 1,2 y 0,6 y sin perturbaciones ha conducido a una media móvil de primer orden con tendencia $85 + 10 \cdot t$ y estacionalidad aditiva con valores 0,75; -0,25; 1,75 y -2,25, y a una media móvil de segundo orden de tendencia $70 + 10 \cdot t$ desprovista de variación estacional

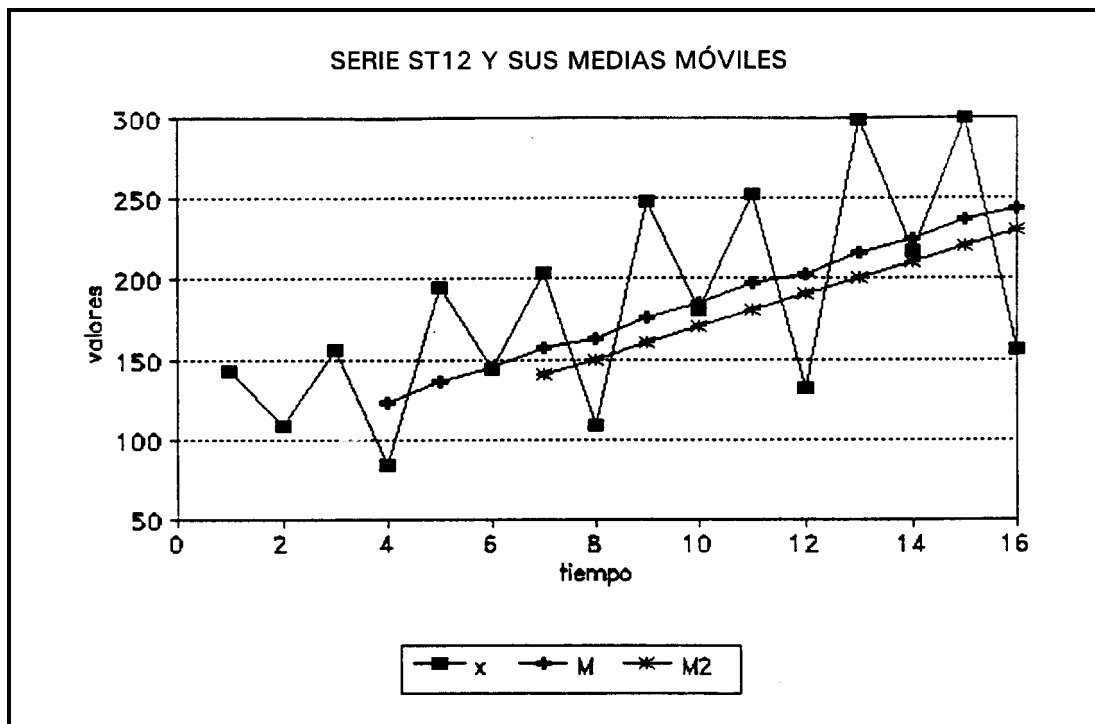


Fig. 4.1.6.2 Observaciones y medias móviles de la serie ST12: Hemos determinado las medias móviles para $L = 4$ de la serie ST12. Puede observarse que la estacionalidad (muy reducida) sigue patente en la primera serie móvil y ha desaparecido en la segunda. La serie ST12 está sujeta a una estacionalidad multiplicativa

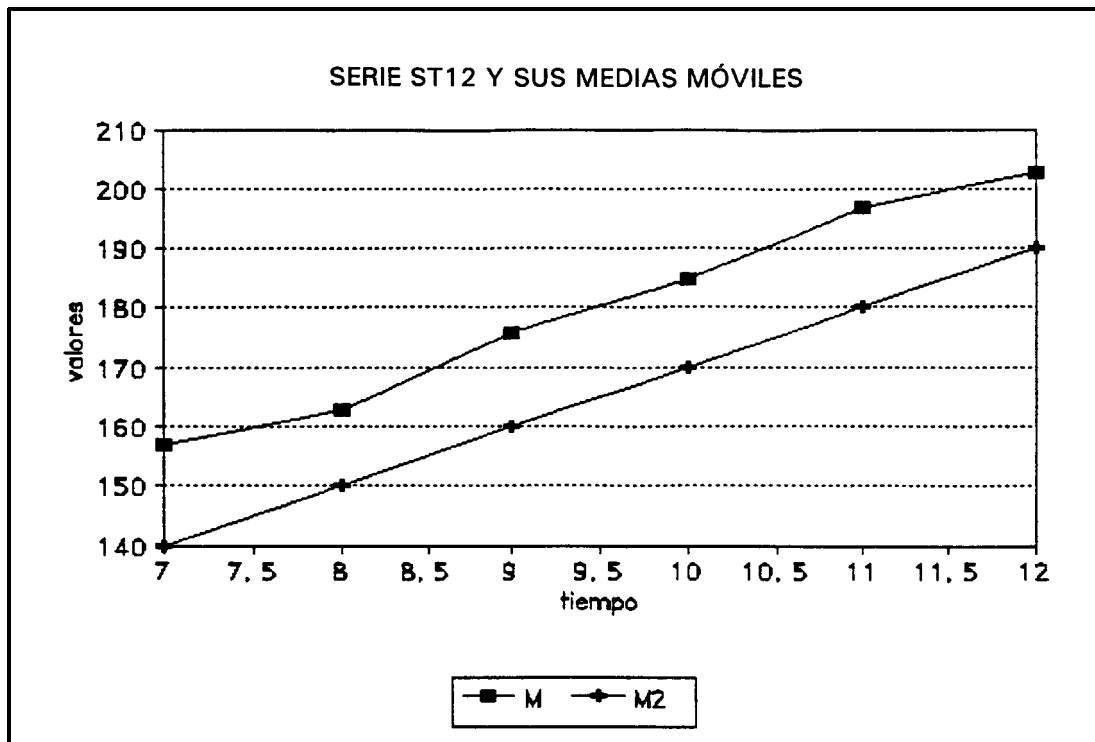


Fig. 4.1.6.2.bis Medias móviles de la serie ST12: Las medias móviles de la figura anterior se representan en escala ampliada

2.1.6.3 Forma de determinar la tendencia y la variación estacional a partir de una serie temporal en el supuesto de tendencia lineal

Siendo relativamente complejos los procedimientos conjuntos, se emplean métodos de tipo iterativo, frecuentemente con justificación teórica escasa o inexistente, que intentan aislar por un lado únicamente los efectos estacionales y por otro únicamente la tendencia, procediendo a los ajustes correspondientes en cada caso. Como línea de actuación, aunque no única, podemos considerar la siguiente:

Paso 1: DESESTACIONALIZAR LA SERIE MEDIANTE UN FILTRO

Puede utilizarse la media móvil de primer orden si la estacionalidad es aditiva, o multiplicativa con tendencia constante.

Puede utilizarse la media móvil de segundo orden si la estacionalidad es multiplicativa y la tendencia lineal.

Paso 2: AJUSTAR LOS VALORES DE LOS PARÁMETROS DE LA TENDENCIA

Ajustar los parámetros de la recta (eventualmente con $b=0$ en el caso de tendencia constante) mediante regresión lineal sobre las medias móviles.

Deshacer las traslaciones para pasar de la tendencia de las medias móviles a la tendencia de la serie temporal.

Paso 3: CALCULAR LOS VALORES INICIALES DE LOS EFECTOS ESTACIONALES

A partir de las observaciones y de la primera estimación de la recta de tendencia hallada, establecer una primera estimación de los valores estacionales, promediando las diversas estimaciones disponibles para un mismo valor.

Paso 4: DESESTACIONALIZAR LA SERIE TEMPORAL UTILIZANDO LA PRIMERA ESTIMACIÓN DE LOS VALORES ESTACIONALES HALLADA EN EL PASO PRECEDENTE

Paso 5: AJUSTAR LOS VALORES DE LOS PARÁMETROS DE LA RECTA DE TENDENCIA UTILIZANDO LA REGRESIÓN LINEAL SOBRE LA SERIE DESESTACIONALIZADA

Paso 6: CALCULAR NUEVOS VALORES DE LOS EFECTOS ESTACIONALES

Efectuar las operaciones análogas a las del *paso 3* pero empleando como valores teóricos los correspondientes a la nueva recta de regresión obtenida en el *paso 5*.

Paso 7: COMPARAR LA NUEVA ESTIMACIÓN CON LA PRECEDENTE

Si las diferencias son pocas podemos dar por terminado el cálculo y proceder a la extrapolación. En caso contrario, repetir los *pasos 4, 5 y 6*.

Veamos la aplicación de lo anterior sobre un ejemplo. Disponemos de la serie temporal ST15, datos mensuales de consumo de los últimos 40 meses (*fig. 4.1.6.3*) que representados (*fig. 4.1.6.4*) nos sugieren un modelo de la forma:

$$x_t = (a + b \cdot t) \cdot c_t + \theta_t$$

Vamos a determinar las medias móviles de primer y segundo órdenes de extensión igual a la periodicidad $L=12$ (*fig. 4.1.6.5*).

mes	1985		1986		1987		1988	
	t	x_t	t	x_t	t	x_t	t	x_t
ENE	1	43	13	67	25	83	37	112
FEB	2	127	14	179	26	243	38	298
MAR	3	104	15	141	27	209	39	267
ABR	4	42	16	63	28	76	40	103
MAY	5	82	17	139	29	183		
JUN	6	98	18	143	30	180		
JUL	7	195	19	266	31	355		
AGO	8	84	20	111	32	148		
SEP	9	72	21	109	33	144		
OCT	10	190	22	263	34	337		
NOV	11	54	23	77	35	97		
DIC	12	221	24	301	36	387		

Fig. 2.1.6.3 Serie temporal ST15, 40 observaciones mensuales

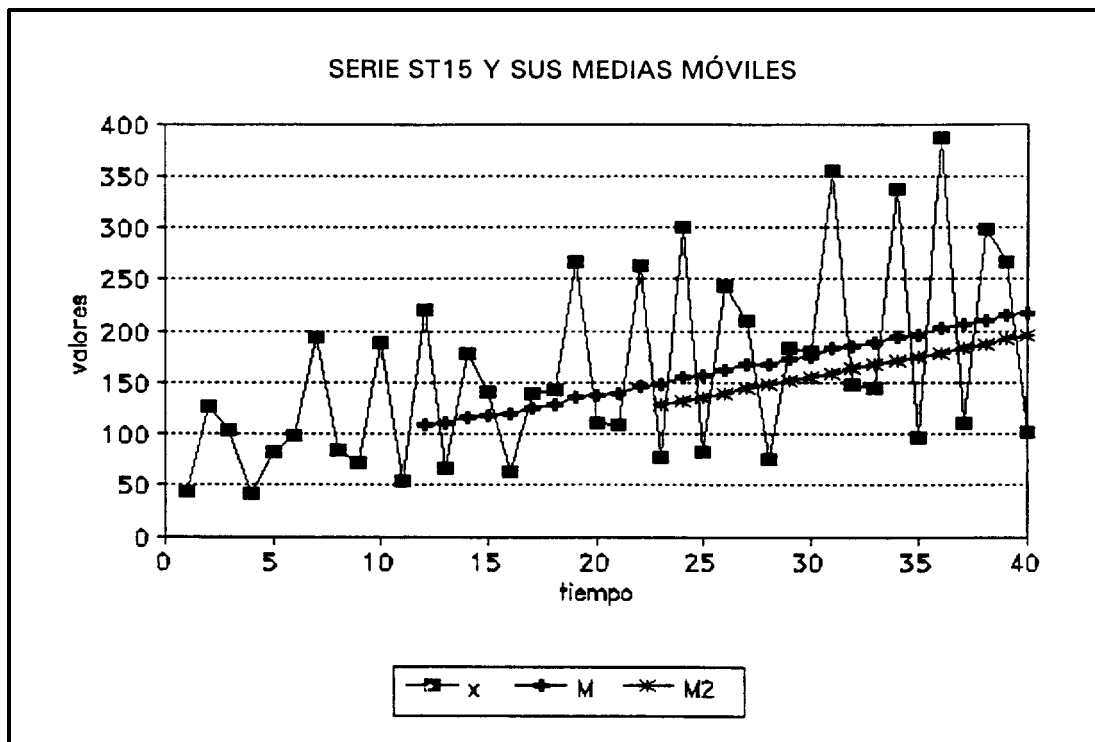


Fig. 2.1.6.4 Observaciones y medias móviles de la serie ST15: Hemos representado las observaciones y los valores de las medias móviles primera y segunda (con $L=12$) de la serie ST15. La regularidad de la segunda media (y la no regularidad de la primera) son síntoma de una estacionalidad multiplicativa

La recta de regresión correspondiente a los 18 valores de la media móvil de segundo orden es:

$$35,9944 + 3,9824 \cdot t$$

mes	M_t				M_{2t}		
	1985	1986	1987	1988	1986	1987	1988
ENE		111,33	156,25	205,92		135,60	183,44
FEB		115,67	161,58	210,50		139,43	187,51
MAR		118,75	167,25	215,33		143,47	191,52
ABR		120,50	168,33	217,58		147,46	195,62
MAY		125,25	172,00			151,35	
JUN		129,00	175,08			155,19	
JUL		134,92	182,50			159,16	
AGO		137,17	185,58			163,19	
SEP		140,25	188,50			167,21	
OCT		146,33	194,67			171,24	
NOV		148,25	196,33		128,06	175,25	
DIC	109,33	154,92	203,50		131,86	179,30	

Fig. 2.1.6.5 Medias móviles de primer y segundo órdenes (de extensión 12 intervalos) de la serie temporal ST15. La media móvil de primer orden tiene $40-11=29$ valores y la de segundo $29-11=18$

Deshaciendo la traslación introducida por las medias móviles (de valor $L-1=11$ intervalos en el caso de la segunda) obtenemos la primera estimación de la recta de regresión correspondiente a la serie:

$$79,8003 + 3,9824 \cdot t$$

donde:

$$79,8003 = 35,9944 + 11 \times 3,9824$$

Con dicha recta tenemos tres estimaciones para los coeficientes estacionales de todos los meses, salvo para enero, febrero, marzo y abril, en que tenemos cuatro. Por ejemplo, para enero los cuatro valores son:

$$\frac{43}{79,8003 + 3,9824 \times 1} = 0,51323 \qquad \frac{67}{79,8003 + 3,9824 \times 13} = 0,50923$$

$$\frac{83}{79,8003 + 3,9824 \times 25} = 0,46276 \qquad \frac{112}{79,8003 + 3,9824 \times 37} = 0,49307$$

muy parecidos entre sí. Podemos adoptar como estimación definitiva la media aritmética:

$$\frac{0,51323 + 0,50923 + 0,46276 + 0,49307}{4} = 0,49457$$

aunque habitualmente utilizamos una media ponderada, que en el presente caso es de cálculo incluso más simple, dividiendo la suma de numeradores de las expresiones anteriores por la suma de denominadores:

$$\frac{43 + 67 + 83 + 112}{4 \times 79,8003 + 3,9824 \times (1 + 13 + 25 + 37)} = 0,490464$$

Empleando este procedimiento en nuestro caso obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{ENE} &= 0,490464 \\ \hat{C}_{FEB} &= 1,328024 \\ \hat{C}_{MAR} &= 1,102920 \\ \hat{C}_{ABR} &= 0,424103 \\ \hat{C}_{MAY} &= 0,912992 \\ \hat{C}_{JUN} &= 0,926398 \\ \hat{C}_{JUL} &= 1,749588 \\ \hat{C}_{AGO} &= 0,717060 \\ \hat{C}_{SEP} &= 0,662874 \\ \hat{C}_{OCT} &= 1,572964 \\ \hat{C}_{NOV} &= 0,443421 \\ \hat{C}_{DIC} &= 1,727708 \end{aligned}$$

$$\hline \Sigma = 12,058508$$

Si juzgamos que la suma es demasiado diferente de $L=12$, podremos proceder a una corrección de los valores anteriores, multiplicándolos por:

$$\frac{12}{12,058508}$$

y para equilibrar deberemos corregir las estimaciones de a y de b , multiplicando por el valor inverso:

$$\frac{12,058508}{12}$$

Aunque en este caso la corrección no parece necesaria, la hemos efectuado, obteniendo los valores:

$$\begin{aligned}
 \hat{C}_{ENE} &= 0,488084 \\
 \hat{C}_{FEB} &= 1,321579 \\
 \hat{C}_{MAR} &= 1,097568 \\
 \hat{C}_{ABR} &= 0,422045 \\
 \hat{C}_{MAY} &= 0,908561 & \hat{a} &= 80,1894 \\
 \hat{C}_{JUN} &= 0,921903 \\
 \hat{C}_{JUL} &= 1,741099 \\
 \hat{C}_{AGO} &= 0,713580 & \hat{b} &= 4,0018 \\
 \hat{C}_{SEP} &= 0,659657 \\
 \hat{C}_{OCT} &= 1,565331 \\
 \hat{C}_{NOV} &= 0,441270 \\
 \hat{C}_{DIC} &= 1,719324 \\
 \hline
 \Sigma &= 12,000001
 \end{aligned}$$

Con estas estimaciones de los coeficientes estacionales podemos proceder a desestacionalizar la serie temporal (fig. 2.1.6.6):

mes	1985		1986		1987		1988	
	t	$\frac{x_t}{\hat{C}_t}$	t	$\frac{x_t}{\hat{C}_t}$	t	$\frac{x_t}{\hat{C}_t}$	t	$\frac{x_t}{\hat{C}_t}$
ENE	1	88,0996	13	137,2715	25	170,0528	37	229,4689
FEB	2	96,0972	14	135,4440	26	183,8709	38	225,4878
MAR	3	94,7550	15	128,4659	27	190,4210	39	243,2652
ABR	4	99,5155	16	149,2732	28	180,0756	40	244,0499
MAY	5	90,2526	17	152,9891	29	201,4173		
JUN	6	106,3019	18	155,1140	30	195,2484		
JUL	7	111,9983	19	152,7771	31	203,8943		
AGO	8	117,7163	20	155,5537	32	207,4049		
SEP	9	109,1476	21	165,2374	33	218,2953		
OCT	10	121,3801	22	168,0156	34	215,2899		
NOV	11	122,3742	23	174,4965	35	219,8203		
DIC	12	128,5389	24	175,0688	36	225,0885		

Fig. 2.1.6.6 Serie temporal ST15, observaciones desestacionalizadas con la primera estimación de los coeficientes estacionales

La recta de regresión correspondiente a los 40 puntos de las observaciones desestacionalizadas es:

$$80,9892 + 3,9628 \cdot t$$

a la que corresponden unas nuevas estimaciones de los coeficientes estacionales (obtenidas con el mismo sistema de medias ponderadas que anteriormente):

$$\begin{aligned} \hat{C}_{ENE} &= 0,487901 \\ \hat{C}_{FEB} &= 1,321418 \\ \hat{C}_{MAR} &= 1,097698 \\ \hat{C}_{ABR} &= 0,422192 \\ \hat{C}_{MAY} &= 0,907725 \\ \hat{C}_{JUN} &= 0,921312 \\ \hat{C}_{JUL} &= 1,740447 \\ \hat{C}_{AGO} &= 0,713493 \\ \hat{C}_{SEP} &= 0,659735 \\ \hat{C}_{OCT} &= 1,565876 \\ \hat{C}_{NOV} &= 0,441520 \\ \hat{C}_{DIC} &= 1,720657 \end{aligned}$$

$$\Sigma = 11,999974$$

Si juzgamos (absurdamente en este caso) que la suma no es lo suficiente parecida a $L=12$, procederemos a corregir los valores, en forma similar a lo que hemos hecho antes, y obtendremos:

$$\begin{aligned} \hat{C}_{ENE} &= 0,487902 \\ \hat{C}_{FEB} &= 1,321421 \\ \hat{C}_{MAR} &= 1,097700 \\ \hat{C}_{ABR} &= 0,422193 \\ \hat{C}_{MAY} &= 0,907727 \\ \hat{C}_{JUN} &= 0,921314 \\ \hat{C}_{JUL} &= 1,740450 \\ \hat{C}_{AGO} &= 0,713495 \\ \hat{C}_{SEP} &= 0,659737 \\ \hat{C}_{OCT} &= 1,565879 \\ \hat{C}_{NOV} &= 0,441521 \\ \hat{C}_{DIC} &= 1,720660 \end{aligned}$$

$$\hat{a} = 80,1894$$

$$\hat{b} = 4,0018$$

$$SSE = 790,4745$$

$$\Sigma = 11,999999$$

Dada la concordancia entre las dos estimaciones, consideraremos la última como definitiva y pasaremos a la proyección. La expresión general que utilizaremos será:

$$\hat{x}_{40+h} = [80,9890 + (40 + h) \times 3,9628] \cdot \hat{c}_s$$

donde s es el valor correspondiente al nombre del mes $40 + h$ (es un valor comprendido entre 1 y 12 congruente con $40 + h$, módulo 12)

$$\hat{x}_{41} = 243,46206 \times 0,907727 = 221,00 \Rightarrow 221$$

$$\hat{x}_{42} = 247,42482 \times 0,921314 = 227,96 \Rightarrow 228$$

$$\hat{x}_{43} = 251,38757 \times 1,740450 = 437,53 \Rightarrow 438$$

$$\hat{x}_{44} = 255,35033 \times 0,713495 = 182,19 \Rightarrow 182$$

$$\hat{c}_{45} = 259,31309 \times 0,659737 = 171,08 \Rightarrow 171$$

$$\hat{c}_{46} = 263,27585 \times 1,565879 = 412,26 \Rightarrow 412$$

2.1.6.4 Procedimiento adaptado del método de Shiskin

El método de Shiskin está relacionado con los procedimientos utilizados por el Departamento del Censo USA para analizar las series cronológicas. Básicamente utiliza:

- 1) Obtención de las medias móviles de primer orden sobre 12 meses.
- 2) Determinación de una primera estimación de los coeficientes estacionales mediante división de las observaciones por los valores de las medias móviles homogéneas en el tiempo (habida cuenta de la traslación temporal).
- 3) Desestacionalización de la serie dividiendo las observaciones por las primeras estimaciones de los coeficientes estacionales.
- 4) Eliminación de los áleas mediante la determinación de medias móviles de la serie desestacionalizada sobre 5 (o 7) valores.
- 5) Nueva división de las observaciones por las últimas medias móviles para obtener una segunda estimación de los coeficientes estacionales.
- 6) Nueva desestacionalización y aplicación de la regresión lineal.

Como variantes y/o mejoras, además de una fase previa de pulido de las observaciones brutas (rellenando lagunas, reduciendo a unidades comunes, compensando el número de días laborables de cada mes, etc.), si es necesario, señalamos:

1') Cuando $L=12$, como es corriente, tenemos que el desplazamiento o traslación de la primera media móvil corresponde a:

$$\frac{L-1}{2} = 5,5 \text{ meses}$$

lo que provoca dificultades en el encuadre entre observaciones y medias móviles homólogas. O bien determinamos la semisuma de dos medias móviles contiguas, y así:

$$x_t \text{ es comparable a } \frac{M_{t+5} + M_{t+6}}{2}$$

o bien centramos las medias móviles tomando una extensión de 13 meses, aunque dando peso mitad a los valores extremos, con lo que la extensión *real* sigue siendo 12:

$$M'_t = \frac{\frac{1}{2} \cdot x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \dots + x_{t-11} + \frac{1}{2} \cdot x_{t-12}}{12}$$

en general:

$$M'_t = \frac{\frac{1}{2} \cdot x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \dots + x_{t-L+1} + \frac{1}{2} \cdot x_{t-L}}{L}$$

con lo que son comparables x_t y $M'_{t+L/2}$

- 2') La reducción de varias estimaciones de los coeficientes estacionales a una sola puede basarse en la media ponderada presentada anteriormente.
- 3') Si la suma de las estimaciones de los coeficientes estacionales difiere sensiblemente de L puede procederse a la corrección de los mismos.
- 4') En lugar de proceder directamente a la segunda estimación de los coeficientes estacionales utilizando las medias móviles de extensión 5 de los valores desestacionalizados, primero puede ajustarse a los mismos una recta de regresión y a continuación efectuar la estimación de los coeficientes, teniendo en cuenta la traslación de cuantía $(5-1)/2 = 2$ meses.

Vamos a aplicar el procedimiento a la serie temporal ST15. Las medias móviles de primer orden sobre 13 observaciones se encuentran en la *figura 2.1.6.5*.

t	M'_t	t	M'_t	t	M'_t
13	110,33	25	155,58	37	204,71
14	113,50	26	158,92	38	208,21
15	117,21	27	164,42	39	212,92
16	119,62	28	167,79	40	216,46
17	122,88	29	170,17		
18	127,12	30	173,54		
19	131,96	31	178,79		
20	136,04	32	184,04		
21	138,71	33	187,04		
22	143,29	34	191,58		
23	147,29	35	195,50		
24	151,58	36	199,92		

Fig. 2.1.6.7 Medias móviles centradas de primer orden correspondientes a la serie temporal ST15

Los valores de M'_t pueden considerarse homólogos de las observaciones $x_{t,6}$. Por tanto disponemos de tres estimaciones iniciales de los coeficientes estacionales para los meses julio, agosto, septiembre y octubre, y dos para los restantes. La estimación ponderada se obtendrá análogamente al caso anterior:

$$\hat{C}_{JUL} = \frac{195 + 266 + 355}{110,33 + 155,58 + 204,71} = 1,733865$$

y análogamente los demás, con lo que se obtiene:

$$\hat{C}_{ENE} = 0,482703$$

$$\hat{C}_{FEB} = 1,318407$$

$$\hat{C}_{MAR} = 1,074444$$

$$\hat{C}_{ABR} = 0,415080$$

$$\hat{C}_{MAY} = 0,939346$$

$$\hat{C}_{JUN} = 0,918919$$

$$\hat{C}_{JUL} = 1,733865$$

$$\hat{C}_{AGO} = 0,713654$$

$$\hat{C}_{SEP} = 0,657174$$

$$\hat{C}_{OCT} = 1,567849$$

$$\hat{C}_{NOV} = 0,447035$$

$$\hat{C}_{DIC} = 1,736142$$

$$\Sigma = 12,004618$$

y corrigiendo para que la suma sea 12:

$$\hat{C}_{ENE} = 0,482517$$

$$\hat{C}_{FEB} = 1,317899$$

$$\hat{C}_{MAR} = 1,074030$$

$$\hat{C}_{ABR} = 0,414920$$

$$\hat{C}_{MAY} = 0,938985$$

$$\hat{C}_{JUN} = 0,918565$$

$$\hat{C}_{JUL} = 1,733197$$

$$\hat{C}_{AGO} = 0,713380$$

$$\hat{C}_{SEP} = 0,656921$$

$$\hat{C}_{OCT} = 1,567246$$

$$\hat{C}_{NOV} = 0,446863$$

$$\hat{C}_{DIC} = 1,735474$$

$$\Sigma = 11,999997$$

Ahora podemos desestacionalizar la serie y determinar las medias móviles de extensión 5, valores que se encuentran en la *figura 2.1.6.8* (ver siguiente página).

Si ajustamos una recta mediante regresión lineal a los 36 puntos definidos por M_t' , obtendremos:

$$72,4992 + 3,9764 \cdot t$$

y deshaciendo la traslación de $(N-1)/2 = 2$ meses tenemos:

$$80,4520 + 3,9754 \cdot t$$

que corresponde a la tendencia de la serie original. Adoptando las abscisas de dicha recta como valores teóricos podemos proceder a la determinación de una nueva estimación de los coeficientes estacionales, empleando medias ponderadas, y el resultado que se obtiene es:

t	$\frac{x_t}{\hat{c}_t}$	t	$\frac{x_t}{\hat{c}_t}$	t	$\frac{x_t}{\hat{c}_t}$	t	$\frac{x_t}{\hat{c}_t}$
1	89,12	13	138,86	25	172,01	37	232,12
2	96,37	14	135,82	26	184,38	38	226,12
3	96,83	15	131,28	27	194,59	39	248,60
4	101,22	16	151,84	28	183,17	40	248,24
5	87,33	17	148,03	29	194,89		
6	106,69	18	155,68	30	195,96		
7	112,51	19	153,47	31	204,82		
8	117,75	20	155,60	32	207,46		
9	109,60	21	165,93	33	219,20		
10	121,23	22	167,81	34	215,03		
11	120,84	23	172,31	35	217,07		
12	127,34	24	173,44	36	222,99		

t	M_t	t	M_t	t	M_t	t	M_t
1		13	123,57	25	170,30	37	221,28
2		14	128,82	26	173,99	38	222,66
3		15	130,83	27	179,35	39	229,38
4		16	137,03	28	181,52	40	235,61
5	94,17	17	141,17	29	185,81		
6	97,69	18	144,53	30	190,60		
7	100,92	19	148,06	31	194,69		
8	105,10	20	152,92	32	197,26		
9	106,78	21	155,74	33	204,47		
10	113,56	22	159,70	34	208,50		
11	116,39	23	163,02	35	212,72		
12	119,35	24	167,02	36	216,35		

Fig. 2.1.6.8 Valores desestacionalizados de la serie temporal ST15 y medias móviles de extensión 5

$$\hat{C}_{ENE} = 0,488772$$

$$\hat{C}_{FEB} = 1,323605$$

$$\hat{C}_{MAR} = 1,099380$$

$$\hat{C}_{ABR} = 0,422789$$

$$\hat{C}_{MAY} = 0,909599$$

$$\hat{C}_{JUN} = 0,923082$$

$$\hat{C}_{JUL} = 1,743552$$

$$\hat{C}_{AGO} = 0,714674$$

$$\hat{C}_{SEP} = 0,660746$$

$$\hat{C}_{OCT} = 1,568090$$

$$\hat{C}_{NOV} = 0,442095$$

$$\hat{C}_{DIC} = 1,722714$$

$$\Sigma = 12,019098$$

Corrigiendo para que la suma sea 12:

$$\hat{C}_{ENE} = 0,487995$$

$$\hat{a} = 80,58003$$

$$\hat{C}_{FEB} = 1,321502$$

$$\hat{C}_{MAR} = 1,097633$$

$$\hat{b} = 3,982714$$

$$\hat{C}_{ABR} = 0,422117$$

$$SSE = 799,947000$$

$$\hat{C}_{MAY} = 0,908154$$

$$\hat{C}_{JUN} = 0,921615$$

$$\hat{C}_{JUL} = 1,740782$$

$$\hat{C}_{AGO} = 0,713538$$

$$\hat{C}_{SEP} = 0,659696$$

$$\hat{C}_{OCT} = 1,565599$$

$$\hat{C}_{NOV} = 0,441392$$

$$\hat{C}_{DIC} = 1,719977$$

$$\Sigma = 12,000000$$

La escasa diferencia con los valores anteriores nos desaconseja proseguir desestacionalizando y ajustando rectas. Las proyecciones obtenidas a partir de los valores anteriores son:

$$\hat{x}_{41} = 221,47 \Rightarrow 221$$

$$\hat{x}_{42} = 228,43 \Rightarrow 228$$

$$\hat{x}_{43} = 438,39 \Rightarrow 438$$

$$\hat{x}_{44} = 182,54 \Rightarrow 183$$

$$\hat{c}_{45} = 171,39 \Rightarrow 171$$

$$\hat{c}_{46} = 412,98 \Rightarrow 413$$

totalmente coherentes con los obtenidos anteriormente, dado que la serie temporal se adapta extraordinariamente al modelo.

2.1.6.5 Procedimiento para minimizar SSE

Ninguno de los dos procedimientos anteriores tiene por objetivo inmediato la determinación de unos valores \hat{a} , \hat{b} y \hat{c}_t que minimicen la suma SSE de los errores cuadráticos de los valores de la serie temporal respecto a los teóricos $(\hat{a} + \hat{b} \cdot t) \cdot c_t$. No es difícil adaptar la

determinación de los parámetros a tal objetivo. Para ello deberemos adecuar nuestra nomenclatura a fin de coordinar los valores de t con el índice correspondiente al coeficiente estacional. Sea c_l uno de los coeficientes estacionales, donde l tomará los valores 1, 2, ..., L , y denominemos $\pi(l)$ al conjunto de valores de t que corresponden al índice l , por ejemplo:

$$\text{si } l = 1 \text{ (ENERO) entonces } \pi(1) = \{1, 13, 25, 37\}$$

$$\text{si } l = 7 \text{ (JULIO) entonces } \pi(7) = \{7, 19, 31\}$$

y escribamos la expresión de SSE:

$$SSE = \sum_{t=1}^T \left[x_t - (\hat{a} + \hat{b} \cdot t) \cdot \hat{c}_l \right]^2 \quad \text{con } l = \pi^{-1}(t)$$

donde π^{-1} es la aplicación que para cada valor de t nos proporciona el índice del coeficiente \hat{c}_l a utilizar.

2.1.6.5.1 Dados \hat{a} y \hat{b} hallar \hat{c}_l que minimice SSE

Añadiremos la restricción:

$$\sum_{l=1}^L \hat{c}_l = L$$

que nos conducirá, introduciendo un multiplicador de Lagrange, a:

$$L = SSE + 2 \cdot \mu \cdot \left(\sum_{l=1}^L \hat{c}_l - L \right)$$

Puesto que \hat{a} y \hat{b} son datos, derivando L respecto a \hat{c}_l e igualando a cero obtenemos:

$$\sum_{t \in \pi(l)} (\hat{a} + \hat{b} \cdot t) \cdot x_t + \mu = \hat{c}_l \cdot \sum_{t \in \pi(l)} (\hat{a} + \hat{b} \cdot t)^2 \quad \text{para } l = 1, 2, \dots, L$$

que puede adoptar la forma:

$$\hat{c}_l = D(l) + \mu \cdot E(l)$$

habiendo hecho:

$$E(l) = \left[\sum_{t \in \pi(l)} (\hat{a} + \hat{b} \cdot t)^2 \right]^{-1}$$

$$D(l) = \left[\sum_{t \in \pi(l)} (\hat{a} + \hat{b} \cdot t) \cdot x_t \right] \cdot E(l)$$

con lo que:

$$\sum_{l=1}^L \hat{c}_l = \sum_{l=1}^L D(l) + \mu \cdot \sum_{l=1}^L E(l) = L$$

que nos permite determinar μ y por tanto \hat{c}_l .

2.1.6.5.2 Dados \hat{c}_t determinar \hat{a} y \hat{b} que minimice SSE

Derivando SSE respecto \hat{a} y \hat{b} obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\hat{a} \cdot \sum_{t=1}^T (\hat{c}_t)^2 + \hat{b} \cdot \sum_{t=1}^T t \cdot (\hat{c}_t)^2 = \sum_{t=1}^T \hat{c}_t \cdot x_t$$

$$\hat{a} \cdot \sum_{t=1}^T (t \cdot \hat{c}_t)^2 + \hat{b} \cdot \sum_{t=1}^T (t \cdot \hat{c}_t)^2 = \sum_{t=1}^T t \cdot \hat{c}_t \cdot x_t$$

donde la relacion entre t y l es la dada por $\pi(l)$. Dicho sistema nos permite, análogamente al caso de regresión simple sin estacionalidad, determinar \hat{a} y \hat{b} .

En el ejemplo tratado y partiendo de la recta de regresión obtenida a partir de las medias móviles de segundo orden:

$$79,8003 + 3,9824 \cdot t$$

obtenemos con el primer algoritmo:

$$\hat{c}_{ENE} = 0,484419$$

$$\hat{c}_{FEB} = 1,312476$$

$$\hat{c}_{MAR} = 1,105743$$

$$\hat{c}_{ABR} = 0,419725$$

$$\hat{c}_{MAY} = 0,916932$$

$$\hat{c}_{JUN} = 0,916944$$

$$\hat{c}_{JUL} = 1,740164$$

$$\hat{c}_{AGO} = 0,709661$$

$$\hat{c}_{SEP} = 0,663248$$

$$\hat{c}_{OCT} = 1,566862$$

$$\hat{c}_{NOV} = 0,439626$$

$$\hat{c}_{DIC} = 1,724199$$

$$\sum = 11,999999$$

y con estos valores de \hat{c}_i , obtenemos con el segundo algoritmo los valores:

$$\begin{aligned}\hat{a} &= 81,57343 \\ \hat{b} &= 3,932944\end{aligned}$$

para los que el primero nos corrige ligeramente \hat{c}_i :

$$\begin{aligned}\hat{c}_{ENE} &= 0,485742 \\ \hat{c}_{FEB} &= 1,311328 \\ \hat{c}_{MAR} &= 1,105189 \\ \hat{c}_{ABR} &= 0,421269 \\ \hat{c}_{MAY} &= 0,916705 \\ \hat{c}_{JUN} &= 0,917096 \\ \hat{c}_{JUL} &= 1,736914 \\ \hat{c}_{AGO} &= 0,710891 \\ \hat{c}_{SEP} &= 0,664595 \\ \hat{c}_{OCT} &= 1,565434 \\ \hat{c}_{NOV} &= 0,441814 \\ \hat{c}_{DIC} &= 1,723024 \\ \hline \Sigma &= 12,000001\end{aligned}$$

que conducen a:

$$SSE = 755,3174$$

que es notablemente menor que el alcanzado con los métodos anteriores (aunque una sucesión adicional de iteraciones podría continuar disminuyéndolo hasta 754,873). Las proyecciones serían ahora:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{41} &= 222,60 \Rightarrow 223 \\ \hat{x}_{42} &= 226,30 \Rightarrow 226 \\ \hat{x}_{43} &= 435,43 \Rightarrow 435 \\ \hat{x}_{44} &= 181,01 \Rightarrow 181 \\ \hat{c}_{45} &= 171,83 \Rightarrow 172 \\ \hat{c}_{46} &= 410,91 \Rightarrow 411\end{aligned}$$

2.1.6.6 Adaptación a la estacionalidad aditiva

Hemos desarrollado el ejemplo con estacionalidad multiplicativa y las adaptaciones para el caso de tendencia lineal y estacionalidad aditiva son inmediatas:

- 1) Desestacionalizar inicialmente mediante la media móvil de primer orden.
- 2) Consecuentemente la traslación a que se someterá la recta de regresión de las medias móviles será de amplitud $(L-1)/2$.
- 3) Los valores estacionales se obtendrán promediando las diferencias $x_t - (\hat{a} + \hat{b} \cdot t)$ de los períodos homólogos.
- 4) La condición de normalización es:

$$\sum_{l=1}^L \hat{c}_l = S = 0$$

si S es diferente de 0, se efectuará la siguiente corrección:

$$\hat{c}_l - \frac{S}{L} \Rightarrow \hat{c}_l \quad l = 1, 2, \dots, L$$

$$\hat{a} + \frac{S}{L} \Rightarrow \hat{a}$$

y el valor \hat{b} no se modifica.

- 5) La desestacionalización se realiza mediante $x_t - \hat{c}_l$.

Los procedimientos análogos a los descritos en 2.1.6.5.1 destinados a minimizar SSE , no introducen modificación apreciable.

2.1.6.7 Actualización de los parámetros de la proyección mediante ajuste exponencial: método de Winters

El mantenimiento y actualización de los parámetros de la proyección puede realizarse también, cuando existe estacionalidad, mediante ajuste exponencial. Sin embargo la determinación directa de los valores iniciales de los parámetros a partir de los datos brutos de la serie temporal, que ya era difícil mediante ajuste exponencial en el caso de no estacionalidad, ahora es de extrema complejidad y por ello lo soslayamos. El esquema más comúnmente usado para dicha actualización es el de Winters, que consiste esencialmente

en extender el ya visto de Holt (apartado 2.1.4.5), teniendo en cuenta la estacionalidad. De nuevo utilizaremos a_T con el significado de ordenada de la recta de tendencia correspondiente a la abscisa T , final de los datos.

$$\hat{a}_T = \alpha \cdot \left[\frac{x_t}{\hat{c}_{T-L}} \right] + (1 - \alpha) \cdot [\hat{a}_{T-1} + \hat{b} \cdot (T - 1)]$$

$$\hat{b}(T) = \beta \cdot [\hat{a}_T - \hat{a}_{T-1}] + (1 - \beta) \cdot \hat{b}(T - 1)$$

$$\hat{c}_T = \gamma \cdot \left[\frac{x_t}{\hat{a}_T} \right] + (1 - \gamma) \cdot \hat{c}_{T-L}$$

donde:

$0 < \beta \leq \alpha \leq \gamma < 1$ son los tres coeficientes de alisado utilizados, uno para la pendiente, otro para la ordenada y el tercero para el coeficiente estacional.

\hat{c}_{T-L} es la estimación del coeficiente estacional del intervalo $T-L$ realizada en el intervalo $T-L$; como sólo se actualiza un coeficiente estacional con cada observación, es la estimación más moderna del coeficiente que corresponde al intervalo T de que se dispone al iniciar los cálculos.

$\frac{x_t}{\hat{c}_{T-L}}$ es la estimación de la observación en el intervalo T desprovista de la estacionalidad.

$\frac{x_t}{\hat{a}_T}$ es el valor *observado* del coeficiente estacional en el intervalo T .

Inicialmente partiremos de unos valores $\hat{a}(0)$, $\hat{b}(0)$, $\hat{c}_1(0)$, $\hat{c}_2(0)$, ..., $\hat{c}_L(0)$ deducidos por otro procedimiento o bien estimados subjetivamente. La proyección se realizará de la siguiente forma:

$$\hat{x}_{T+h} = (\hat{a}_T + h \cdot \hat{b}(T)) \cdot \hat{c}_{T-h'}$$

donde h' es el resto *por exceso* de dividir h por L . (Naturalmente en la práctica será más simple considerar que se utiliza la estimación más moderna del intervalo homólogo a aquél al que se refiere la proyección).

Progresivamente puede producirse que:

$$\sum_{i=0}^{L-1} \hat{c}_{T-i} \text{ diferente de } L$$

lo que llevará a normalizar periódicamente (cada L intervalos, es decir, cada año).

Para reflejar numéricamente lo que hemos indicado, supongamos que el resto de observaciones correspondientes a 1988 de la ST15 son las que se indican en la *figura 2.1.6.9*.

Hemos adoptado los valores obtenidos mediante el procedimiento de minimización de SSE , es decir, la recta de tendencia inicial estimada es:

$$81,7534 + 3,9329 \cdot t$$

y los valores \hat{a}_{40} y $\hat{b}(40)$ para aplicar el procedimiento de Winters, deducidos a partir de la recta son:

$$\hat{b}(40) = 3,9329 \quad ; \quad \hat{a}_{40} = 81,7534 + 40 \times 3,9329 = 238,8914$$

Los valores estacionales iniciales son:

$$\hat{c}_{ENE} = 0,485742$$

$$\hat{c}_{FEB} = 1,311328$$

$$\hat{c}_{MAR} = 1,105189$$

$$\hat{c}_{ABR} = 0,421269$$

$$\hat{c}_{MAY} = 0,916705$$

$$\hat{c}_{JUN} = 0,917096$$

$$\hat{c}_{JUL} = 1,736914$$

$$\hat{c}_{AGO} = 0,710891$$

$$\hat{c}_{SEP} = 0,664595$$

$$\hat{c}_{OCT} = 1,565434$$

$$\hat{c}_{NOV} = 0,441814$$

$$\hat{c}_{DIC} = 1,723024$$

$$\Sigma = 12,000001$$

Aplicando las fórmulas anteriores, correspondientes al procedimiento de Winters, con los valores $\alpha = 0,2$; $\beta = 0,2$; $\tau = 0,5$; obtenemos los resultados de la *figura 2.1.6.9*.

t	mes	1988 x_t	\hat{a}_t	$\hat{b}(t)$	\hat{x}_{t+1}	\hat{c}_t
40	ABR	103	238,89	3,933	222	valores iniciales
41	MAY	220	242,26	3,876	226	0,912416
42	JUN	233	247,72	4,035	437	0,928838
43	JUL	435	251,49	4,009	182	1,733295
44	AGO	185	256,45	4,103	173	0,716143
45	SEP	179	262,31	4,279	417	0,673499
46	OCT	413	266,04	4,224	119	1,558931
47	NOV	113	267,36	3,934	467	0,432233
48	DIC	470	271,59	3,964	134	1,726786

Fig. 2.1.6.9 Actualización de los parámetros de la proyección para la serie ST15

Si en diciembre de 1988 efectuamos la previsión de los valores correspondientes al primer semestre de 1989 obtendremos:

$$\text{ENE 1989: } (271,590 + 3,964 \times 1) \times 0,485742 = 133,85 \Rightarrow 134$$

$$\text{FEB : } (271,590 + 3,964 \times 2) \times 1,311325 = 366,54 \Rightarrow 367$$

$$\text{MAR : } (271,590 + 3,964 \times 3) \times 1,105189 = 313,30 \Rightarrow 313$$

$$\text{ABR : } (271,590 + 3,964 \times 4) \times 0,421269 = 121,09 \Rightarrow 121$$

$$\text{MAY : } (271,590 + 3,964 \times 5) \times 0,912416 = 265,89 \Rightarrow 266$$

$$\text{JUN : } (271,590 + 3,964 \times 6) \times 0,928838 = 274,35 \Rightarrow 274$$

Cuando dispongamos de los valores de los cuatro primeros meses de 1989, procederemos a realizar unos cálculos semejantes a los anteriores. Consideremos que los valores y resultados son los de la figura 2.1.6.10.

t	mes	1989 x_t	\hat{a}_t	$\hat{b}(t)$	\hat{x}_{t+1}	\hat{c}_t
48	DIC	470	271,59	3,964	134	1,726786
49	ENE	130	273,97	3,805	364	0,480124
50	FEB	373	279,11	3,938	313	1,323863
51	MAR	322	284,71	4,105	122	1,118086
52	ABR	113	284,70	3,693	263	0,409091

Fig. 2.1.6.10 Segunda actualización de los parámetros de la proyección para la serie ST15

Con ello hemos recalculado los 12 coeficientes estacionales, cuya suma es 12,013305

0,480124
 1,323863
 1,118086
 0,409091
 0,912416
 0,928838
 1,733295
 0,716143
 0,673499
 1,558931
 0,432233
 1,726786

$$\Sigma = 12,013305$$

si juzgamos que la divergencia respecto a 12 es demasiado importante, podemos proceder a un reajuste, multiplicando los coeficientes estacionales por:

$$\frac{12}{12,013305}$$

y los valores \hat{a} y \hat{b} últimos por la inversa. Ello nos dará:

$\hat{C}_{ENE} = 0,479592$	
$\hat{C}_{FEB} = 1,322397$	
$\hat{C}_{MAR} = 1,116848$	
$\hat{C}_{ABR} = 0,108638$	$\hat{a}_{52} = 285,0133$
$\hat{C}_{MAY} = 0,911405$	
$\hat{C}_{JUN} = 0,927810$	$\hat{b} = 3,6972$
$\hat{C}_{JUL} = 1,731375$	
$\hat{C}_{AGO} = 0,715350$	
$\hat{C}_{SEP} = 0,672753$	
$\hat{C}_{OCT} = 1,557204$	
$\hat{C}_{NOV} = 0,431754$	
$\hat{C}_{DIC} = 1,724874$	
<hr/> $\Sigma = 12,000000$	

y las estimaciones del resto del primer semestre de 1989 serán:

MAY 1989: $(285,0133 + 3,6972 \times 1) \times 0,911405 = 263,1322 \Rightarrow 263$
 JUN : $(285,0133 + 3,6972 \times 2) \times 0,927810 = 271,2988 \Rightarrow 271$

En la *figura 2.1.6.12* hemos recogido la comparación entre valores reales y proyectados aplicando el método de Winters a la serie temporal trimestral ST16, cuyos datos pueden encontrarse en la *figura 2.1.6.11*, partiendo de los valores:

$$\hat{a}_0 = 38 ; \hat{b}(0) = 1 ; \hat{c}_1 = 1,25 ; \hat{c}_2 = 1,5 ; \hat{c}_3 = 0,75 ; \hat{c}_4 = 0,5$$

con

$$\alpha = 0,2 ; \beta = 0,1 ; \gamma = 0,5.$$

trimestre	1985	1986	1987	1988
1o	52	51	61	69
2o	61	68	72	79
3o	30	29	38	43
4o	23	24	25	26

Fig. 2.1.6.11 Valores de la serie ST16

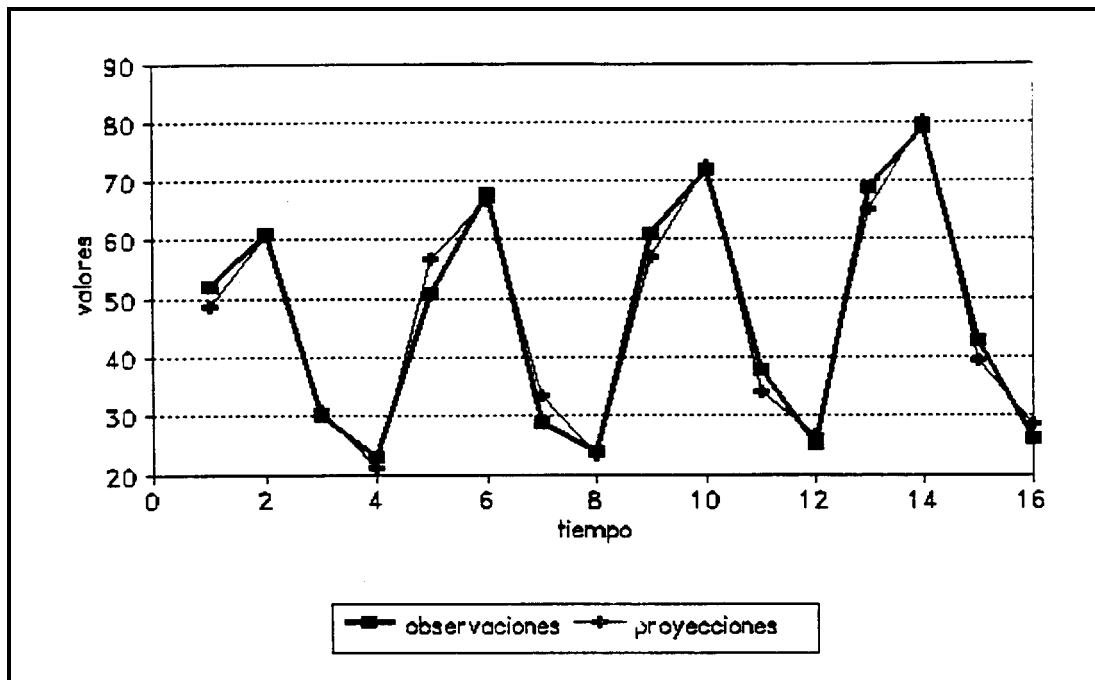


Fig. 2.1.6.12 Aplicación del método de Winters a la serie ST16: Se han representado los valores correspondientes a las observaciones y a las previsiones realizadas el trimestre anterior. Puede observarse la progresiva adaptación de las proyecciones a la forma de la serie