

2.1.3 Medias móviles

Una apreciación intuitiva nos lleva a considerar que en una serie temporal son más reveladores del futuro los valores recientes que los antiguos; ello nos lleva a estudiar el asignar más peso en la estimación a dichos valores recientes. Las medias móviles efectúan esta repartición de peso de forma muy discriminatoria, pues sólo dan peso positivo a los N valores más recientes de la serie temporal, desechando todos los demás; por otra parte el peso asignado a cada uno de los valores recientes es el mismo.

Implícitamente, al utilizar las medias móviles, estamos suponiendo que localmente, en segmentos temporales más o menos largos, el fenómeno que estudiamos se adapta al tipo de modelo elegido (constante o lineal, en general), pero que en segmentos distintos los parámetros del modelo también son distintos, es decir, que el fenómeno tiene saltos o discontinuidades que se producen con frecuencia notablemente menor que la de la toma de observaciones (dos saltos sucesivos estarán separados por bastante más que N observaciones).

Una utilización de las medias móviles de la que inicialmente no haremos uso es la de actuar como filtro, eliminando componentes periódicas de la serie temporal (de período N o divisor de N).

2.1.3.1 Aplicación de las medias móviles a un proceso de modelo constante

Supongamos que el fenómeno se adapta al modelo:

$$x_t = a + \theta_t$$

donde θ_t es el ruido, sobre el que podemos hacer las hipótesis tradicionales:

- Valor medio nulo, $E[\theta_t] = 0$,
- Variancia constante, independiente de t , $VAR[\theta_t] = \sigma^2$,

Para proyectar este fenómeno basta estimar el valor desconocido de a , pero según lo indicado anteriormente tenemos que, si bien normalmente en zonas próximas el valor de a permanece constante, en segmentos alejados en el tiempo existan valores distintos de a (por repercusión en el fenómeno de causas no tenidas en cuenta en la previsión que estamos realizando). Por ello tomaremos para realizar la estimación únicamente los N valores más modernos:

$$\hat{a} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{t=T-N+1}^T x_t$$

Llamaremos media móvil de primer orden y de rango N , al segundo miembro, y la asociaremos al instante T :

$$M_T = \frac{1}{N} \cdot \sum_{t=T-N+1}^T x_t$$

con lo que se cumple que:

$$M_T = M_{T-1} + \frac{x_T - x_{T-N}}{N}$$

En este caso:

$$\hat{x}_{T+h} = \hat{a} = M_T$$

El comportamiento de la media móvil depende de N ; si N es grande la media móvil responde lentamente a los cambios efectivos de a , si N es pequeño, la respuesta a los mismos es más rápida. Sin embargo si los áleas son variables aleatorias independientes, la variancia de las sucesivas estimaciones de una misma a es σ^2/N , y para N pequeño puede resultar desagradablemente elevada. El dilema entre la estabilidad y la sensibilidad volverá a presentarse frecuentemente en el estudio de las previsiones.

t	x_t	$N=5$ M_t	$N=7$ M_t	$N=10$ M_t	t	x_t	$N=5$ M_t	$N=7$ M_t	$N=10$ M_t
1	14				11	15	13,0	12,71	12,7
2	11				12	17	13,6	13,43	13,4
3	14				13	15	14,6	13,86	13,5
4	14				14	12	14,4	13,57	13,3
5	12	13			15	16	15,0	14,43	13,7
6	12	12,6			16	13	14,6	14,43	13,8
7	14	13,2	13,0		17	13	13,8	14,43	13,7
8	10	12,4	12,43		18	14	13,6	14,29	14,1
9	13	12,2	12,71		19	15	14,2	14,00	14,3
10	13	12,4	12,57	12,7	20	14	13,8	13,86	14,4

Fig. 2.1.3.1 Observaciones de la serie temporal ST01 y medias móviles de primer orden para tres valores de N

En la tabla de la *figura 2.1.3.1* hemos analizado la evolución de las medias móviles para tres valores de N (5, 7 y 10) correspondientes a la serie temporal ST02. Dicha serie fue construida artificialmente, y los diez primeros valores se obtuvieron añadiendo a 12,3 una perturbación distribuida normalmente con $F=1,7$ y redondeando al entero más próximo; mientras que las diez siguientes partieron del valor central 14,7 con una perturbación idéntica. Puede observarse la respuesta más rápida de la media móvil con $N=5$, así como la mayor estabilidad de la media móvil con $N=10$, aunque el número de observaciones resulte escaso para este último extremo. Para percibir el efecto de la dispersión, podemos analizar la serie ST03, idéntica a la anterior salvo el aumento de la variancia de 2, $F=3,7$ (*fig. 2.1.3.2*)

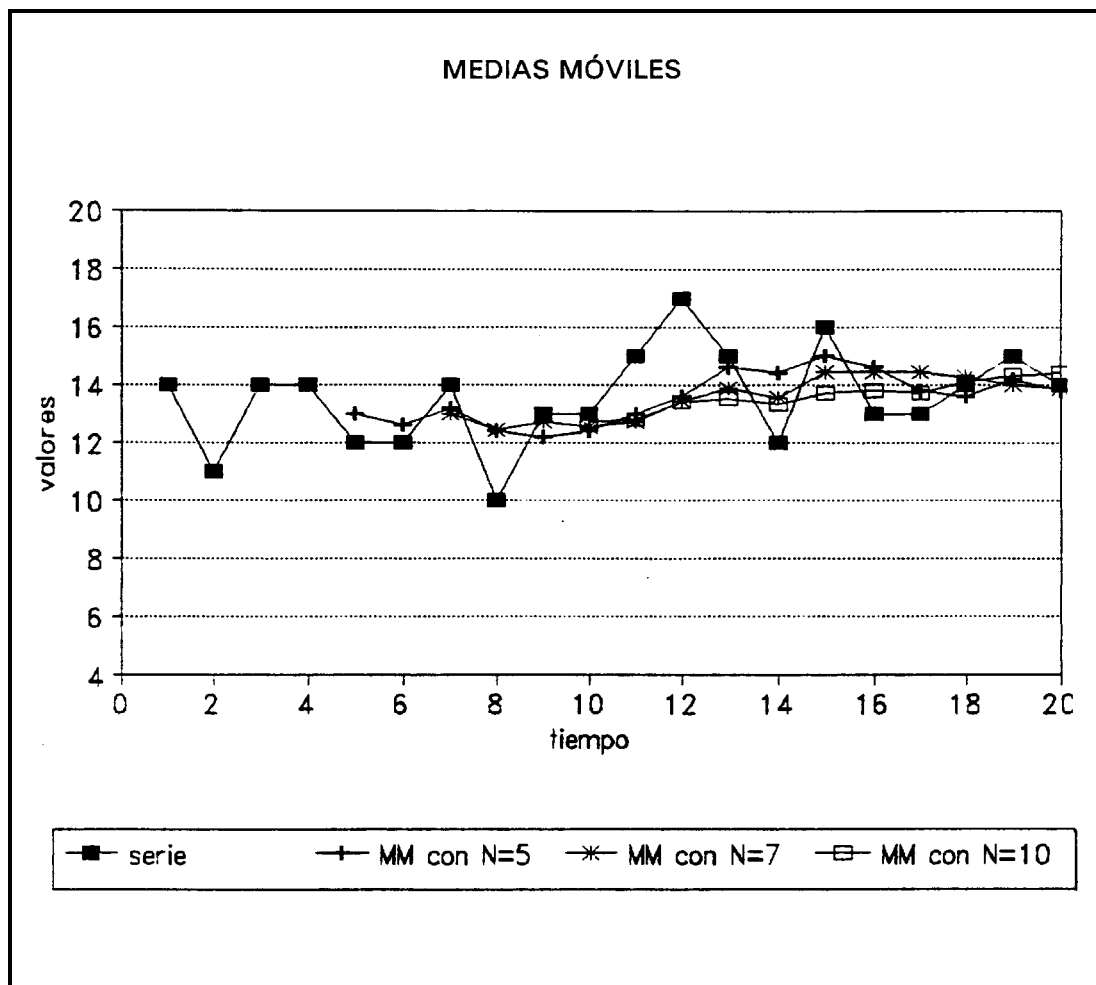


Fig. 2.1.3.2 Medias móviles de la serie ST02: Representación de las medias móviles de ST02 para $N = 5, 7$ y 10 correspondiente a los valores de la tabla de la *figura 2.1.3.1*

t	x_t	$N=5$ M_t	$N=7$ M_t	$N=10$ M_t	t	x_t	$N=5$ M_t	$N=7$ M_t	$N=10$ M_t
1	14				11	12	13,2	12,00	12,2
2	15				12	18	13,8	13,86	12,5
3	15				13	17	14,2	14,43	12,7
4	8				14	20	15,8	15,14	13,9
5	5	11,4			15	18	17,0	15,57	15,2
6	13	11,2			16	14	17,4	15,86	15,3
7	15	11,2	12,14		17	15	16,8	16,29	15,3
8	15	11,2	12,29		18	11	15,6	16,14	14,9
9	12	12,0	11,86		19	14	14,4	15,57	15,1
10	12	13,4	11,43	12,4	20	15	13,8	15,29	15,4

Fig. 2.1.3.3 Observaciones de la serie temporal ST03 y medias móviles de primer orden para tres valores de N

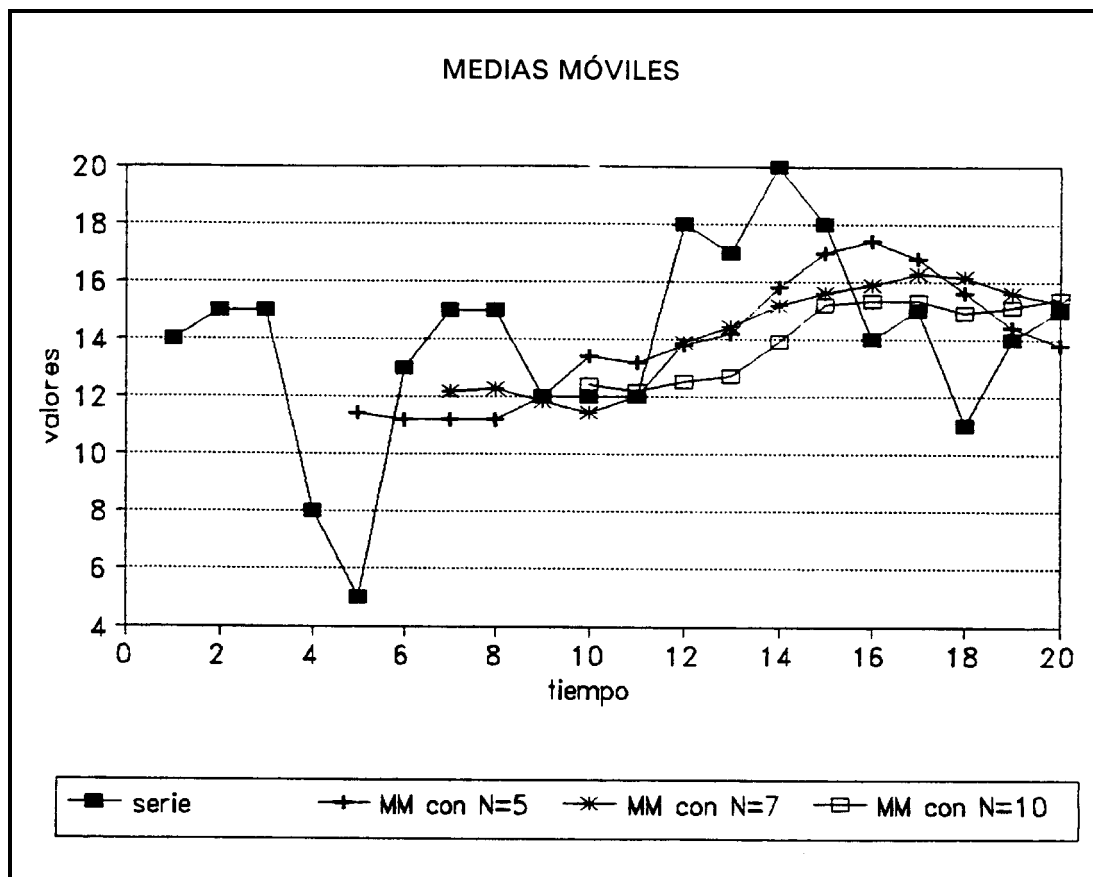


Fig. 2.1.3.4 Medias móviles de la serie ST03: Representación de las medias móviles de ST03 para $N = 5, 7$ y 10 correspondiente a los valores de la tabla 2.1.3.3

2.1.3.2 Aplicación de las medias móviles a un proceso de modelo con tendencia lineal

Consideremos la serie temporal ST04 y sus medias móviles para los tres valores utilizados anteriormente de N . Podemos ver que los valores de las medias móviles *siguen* a los de la serie con un cierto retraso (fig. 2.1.3.6), de hecho la serie temporal corresponde a una tendencia lineal con $a = 35$, $b = 2$, a la que se le ha superpuesto un ruido de desviación tipo 3 (y se ha redondeado al entero más próximo). El fenómeno queda más de manifiesto en la serie temporal ST05, que coincide con la anterior salvo que se ha eliminado el ruido.

t	x_t	$N=5$ M_t	$N=7$ M_t	$N=10$ M_t	t	x_t	$N=5$ M_t	$N=7$ M_t	$N=10$ M_t
1	38				11	58	54,0	51,14	47,5
2	37				12	62	56,6	53,57	50,0
3	40				13	61	58,4	56,14	52,1
4	40				14	61	59,8	57,86	54,2
5	45	40,0			15	63	61,0	59,43	56,0
6	43	41,0			16	68	63,0	61,43	58,5
7	49	43,4	41,71		17	70	64,6	63,29	60,6
8	52	45,8	43,71		18	73	67,0	65,43	62,7
9	54	48,6	46,14		19	74	69,6	67,14	64,7
10	57	51,0	48,57	45,5	20	75	72,0	69,14	66,5

Fig. 2.1.3.5 Observaciones de la serie temporal ST04 y medias móviles de primer orden para tres valores de N

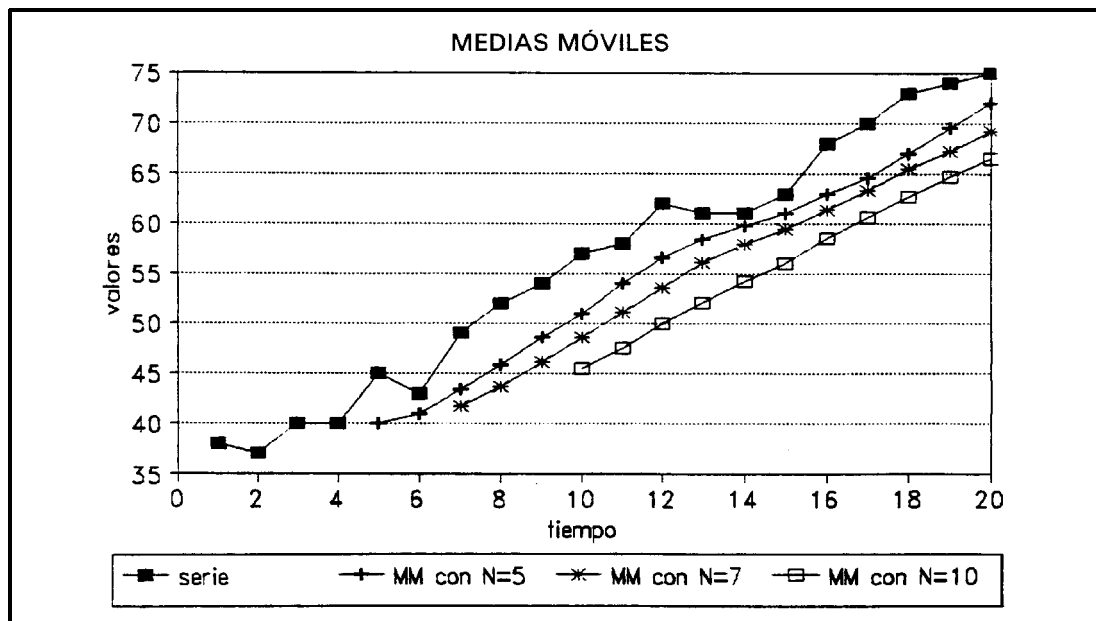


Fig. 2.1.3.6 Medias móviles de la serie ST04: Representación de las medias móviles de ST04 para $N = 5, 7$ y 10 correspondiente a los valores de la tabla 2.1.3.5. La tendencia creciente de la serie se traduce en una tendencia creciente de las medias, que siguen a la serie con retraso

t	x_t	$N=5$ M_t	$N=7$ M_t	$N=10$ M_t	t	x_t	$N=5$ M_t	$N=7$ M_t	$N=10$ M_t
1	37				11	57	53,0	51,00	48,0
2	39				12	59	55,0	53,00	50,0
3	41				13	61	57,0	55,00	52,0
4	43				14	63	59,0	57,00	54,0
5	45	41,0			15	65	61,0	59,00	56,0
6	47	43,0			16	67	63,0	61,00	58,0
7	49	45,0	43,00		17	69	65,0	63,00	60,0
8	51	47,0	45,00		18	71	67,0	65,00	62,0
9	53	49,0	47,00		19	73	69,0	67,00	64,0
10	55	51,0	49,00	46,0	20	75	71,0	69,00	66,0

Fig. 2.1.3.7 Observaciones de la serie temporal ST05 y medias móviles de primer orden para tres valores de N

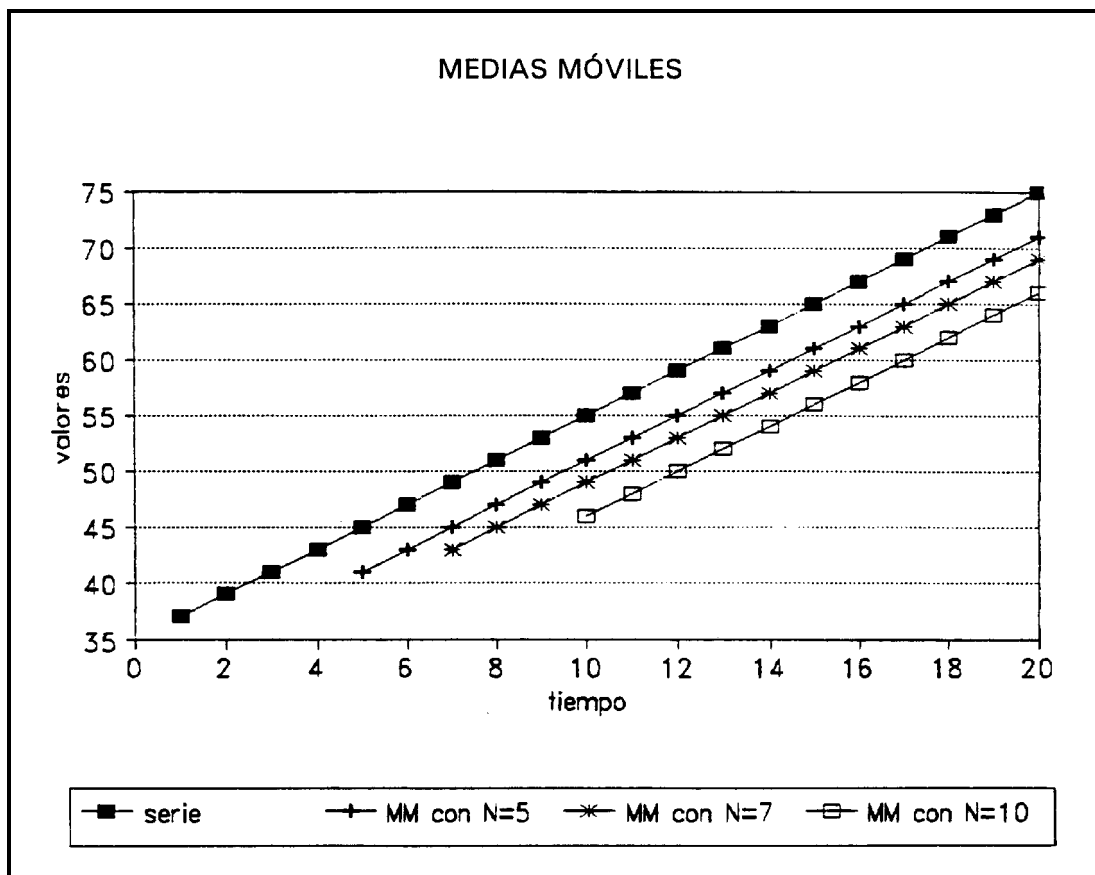


Fig. 2.1.3.8 Medias móviles de la serie ST05: Representación de las medias móviles de ST05 para $N = 5, 7$ y 10 correspondiente a los valores de la tabla 2.1.3.7. La tendencia creciente de la serie, estrictamente lineal, se traduce en una tendencia creciente de las medias, que siguen a la serie con un retraso $(N-1)/2$

Es fácil comprobar que si los valores de la serie temporal están alineados con pendiente, b , diferente de cero, los valores de la media móvil de N observaciones también están alineados siguiendo una recta paralela, pero con un retraso de $(N-1)/2$ (figura 2.1.3.11), es decir, en la misma vertical el valor de la serie está por encima del valor de la media móvil (si b es positivo) de una cantidad:

$$\frac{N-1}{2} \cdot b$$

Naturalmente si b es negativo, la serie es decreciente, la media móvil está por encima del valor de la serie.

Por consiguiente si la tendencia es lineal, con b significativamente diferente de cero, las medias móviles de primer orden no son suficientes para permitirnos representar el fenómeno, y por tanto extrapolar. La media móvil es una buena estimación de la ordenada de la serie en el punto:

$$T - \frac{N-1}{2}$$

pero necesitamos algo más para estimar la pendiente, bien sea una estimación directa de la misma, bien sea otro punto. De los procedimientos utilizados anteriormente en la regresión lineal, cuando centrábamos el origen respecto a los datos, podemos deducir que:

$$W_T = \frac{12}{N \cdot (N^2 - 1)} \cdot \left[\frac{N-1}{2} \cdot x_T + \frac{N-3}{2} \cdot x_{T-1} + \dots - \frac{N-3}{2} \cdot x_{T-N+2} - \frac{N-1}{2} \cdot x_{T-N+1} \right]$$

es la estimación de b considerando los últimos N datos, es decir, desde x_{T-N+1} hasta x_T , cumpliéndose que:

$$W_T = W_{T-1} + \frac{12}{N \cdot (N^2 - 1)} \cdot \left[\frac{N-1}{2} \cdot x_T + \frac{N+1}{2} \cdot x_{T-N} - N \cdot M_{T-1} \right]$$

Podemos denominar, recurriendo a un símil mecánico, *momento estático móvil* a W_T . En estas condiciones las estimaciones de a y b serán (en el instante T):

$$\hat{a}(T) = M_T - \left(T - \frac{N-1}{2} \right) \cdot W_T$$

$$\hat{b}(T) = W_T$$

y por tanto

$$\hat{x}_{T+h} = \hat{a}(T) + (T+h) \cdot \hat{b}(T) = M_T + \left(h - \frac{N-1}{2} \right) \cdot W_T$$

N=5					N=5				
t	x _t	M _t	W _t	â _t	t	x _t	M _t	W _t	â _t
1	38				11	58	54,0	2,3	33,3
2	37				12	62	56,6	2,4	32,6
3	40				13	61	58,4	1,9	37,5
4	40				14	61	59,8	1,1	46,6
5	45	40,0	1,7	34,9	15	63	61,0	0,9	49,3
6	43	41,0	1,7	34,2	16	68	63,0	1,4	43,4
7	49	43,4	2,1	32,9	17	70	64,6	2,5	27,1
8	52	45,8	2,8	29,0	18	73	67,0	3,1	17,4
9	54	48,6	2,7	29,7	19	74	69,6	2,7	23,7
10	57	51,0	3,3	24,6	20	75	72,0	1,8	39,6

Fig. 2.1.3.9 Observaciones de la serie temporal ST04 y la media y el momento estático móviles para N = 5

En la tabla de la *figura 2.1.3.9* hemos recogido los valores de M_t y W_t para $N = 5$ correspondientes a la serie temporal ST04, en una última columna hemos indicado la estimación de a efectuada en el instante t (es decir, teniendo en cuenta los valores de la serie desde el $t-4$ hasta el t). Podemos observar una gran inestabilidad en los valores de $b(t) = W_t$ y $a(t)$, debida especialmente a lo reducido del valor de N y a la importancia relativa de la perturbación. No obstante, las estimaciones de los cinco valores siguientes de la serie no son demasiado incongruentes:

$$\hat{x}_{21} = 77,40 \quad ; \quad \hat{x}_{22} = 79,20 \quad ; \quad \hat{x}_{23} = 81,00 \quad ; \quad \hat{x}_{24} = 82,80 \quad ; \quad \hat{x}_{25} = 84,60$$

Con un valor superior de N obtendremos mejor estabilidad. En la tabla de la *figura 2.1.3.7* hemos resumido los datos semejantes a los de la tabla anterior correspondientes a $N=10$, con lo que las estimaciones de los valores futuros serán:

$$\hat{x}_{21} = 77,47 \quad ; \quad \hat{x}_{22} = 79,46 \quad ; \quad \hat{x}_{23} = 81,46 \quad ; \quad \hat{x}_{24} = 83,45 \quad ; \quad \hat{x}_{25} = 85,44$$

muy coherentes con los anteriores. Téngase presente que para obtener las estimaciones anteriores sólo deberíamos haber utilizado las observaciones desde x_{11} hasta x_{20} , y únicamente deberíamos haber calculado los valores M_{20} y W_{20} . El que en la tabla hayamos realizado unos cálculos más extensos sólo tiene finalidad descriptiva, ya que la idea subyacente de que los datos más modernos son más representativos implica que *sólo los*

últimos valores calculados tienen alguna significación, el resto quedan automáticamente descartados por ellos.

N=5					N=5				
t	x _t	M _t	W _t	â _t	t	x _t	M _t	W _t	â _t
1	38				11	58	47,5	2,455	31,55
2	37				12	62	50,0	2,545	30,91
3	40				13	61	52,1	2,479	31,03
4	40				14	61	54,2	2,158	33,70
5	45				15	63	56,0	2,024	34,75
6	43				16	68	58,5	1,812	37,66
7	49				17	70	60,6	1,806	38,02
8	52				18	73	62,7	1,909	36,93
9	54				19	74	64,7	1,945	36,49
10	57	45,5	2,273	33,00	20	75	66,5	1,994	35,59

Fig. 2.1.3.10 Observaciones de la serie temporal ST04 y media y momento estático móviles para N= 10

En la práctica suele utilizarse una forma ligeramente distinta pero que habitualmente es más útil. Llamemos media móvil de segundo orden, M2_t, a la media móvil de las medias móviles de primer orden, es decir:

$$M2_t = \frac{1}{N} \cdot [M_{t-N+1} + M_{t-N+2} + \dots + M_t] = M2_{t-1} + \frac{1}{N} \cdot [M_t - M_{t-N}]$$

Si x_t tiene sus valores alineados, sin ruido, hemos visto que los de M_t también están alineados paralelamente, con un retraso en tiempo respecto a los anteriores de (N-1)/2; por consiguiente los valores de M2_t están alineados paralelamente a los de la serie y con un retraso en tiempo respecto a ellos de (N-1), como se representa en la figura 2.1.3.11. Esto nos permite escribir:

si $x_t = a + b \cdot t$

entonces $M_t = a + b \cdot \left(t - \frac{N-1}{2} \right)$

y $M2_t = a + b \cdot [t - (N-1)]$

Por consiguiente:

$$b = \frac{2}{N-1} \cdot [M_t - M2_t]$$

$$a = 2 \cdot M_t - M2_t - b \cdot t = \left(2 - \frac{2 \cdot t}{N-1} \right) \cdot M_t - \left(1 - \frac{2 \cdot t}{N-1} \right) \cdot M2_t$$

Suponiendo que en x_t además de la tendencia lineal existe ruido, adoptaremos las expresiones anteriores como estimaciones de a y de b :

$$\hat{a}(T) = 2 \cdot M_T - M_{2T} - \hat{b}(T) \cdot T = \left(2 - \frac{2 \cdot T}{N-1}\right) \cdot M_T - \left(1 - \frac{2 \cdot T}{N-1}\right) \cdot M_{2T}$$

$$\hat{b}(T) = \frac{2}{N-1} \cdot [M_T - M_{2T}]$$

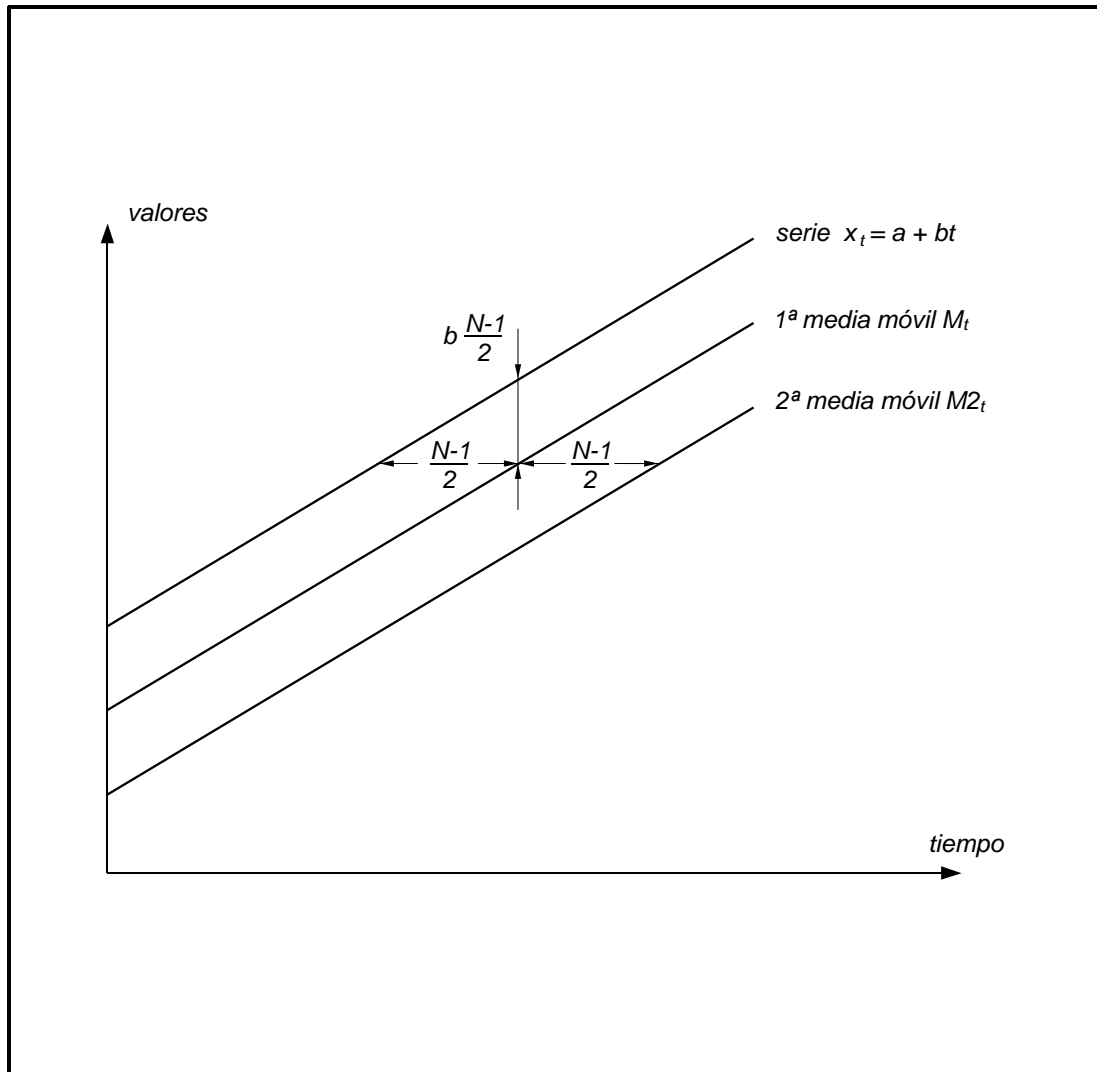


Fig. 2.1.3.11 Retraso de la media móvil: La primera media móvil tiene respecto a la serie, cuando ésta es lineal, un retraso en tiempo igual a $(N-1)/2$, y la segunda media móvil un retraso $(N-1)$

N=5						N=5					
t	x_t	M_t	$M2_t$	$\hat{b}(t)$	$\hat{a}(t)$	t	x_t	M_t	$M2_t$	$\hat{b}(t)$	$\hat{a}(t)$
1	38					11	58	54,0	48,56	2,72	29,52
2	37					12	62	56,6	51,20	2,70	29,60
3	40					13	61	58,4	53,72	2,34	32,66
4	40					14	61	59,8	55,96	1,92	36,76
5	45	40,0				15	63	61,0	57,96	1,52	41,24
6	43	41,0				16	68	63,0	59,76	1,62	40,32
7	49	43,0				17	70	64,6	61,36	1,62	40,30
8	52	45,8				18	73	67,0	63,08	1,96	35,64
9	54	48,6	43,76	2,42	31,66	19	74	69,6	65,04	2,28	30,84
10	57	51,0	45,96	2,52	30,84	20	75	72,0	67,24	2,38	29,16

Fig. 2.1.3.12 Observaciones de la serie temporal ST04 y medias móviles de primer y segundo orden y estimaciones de b y a para N=5

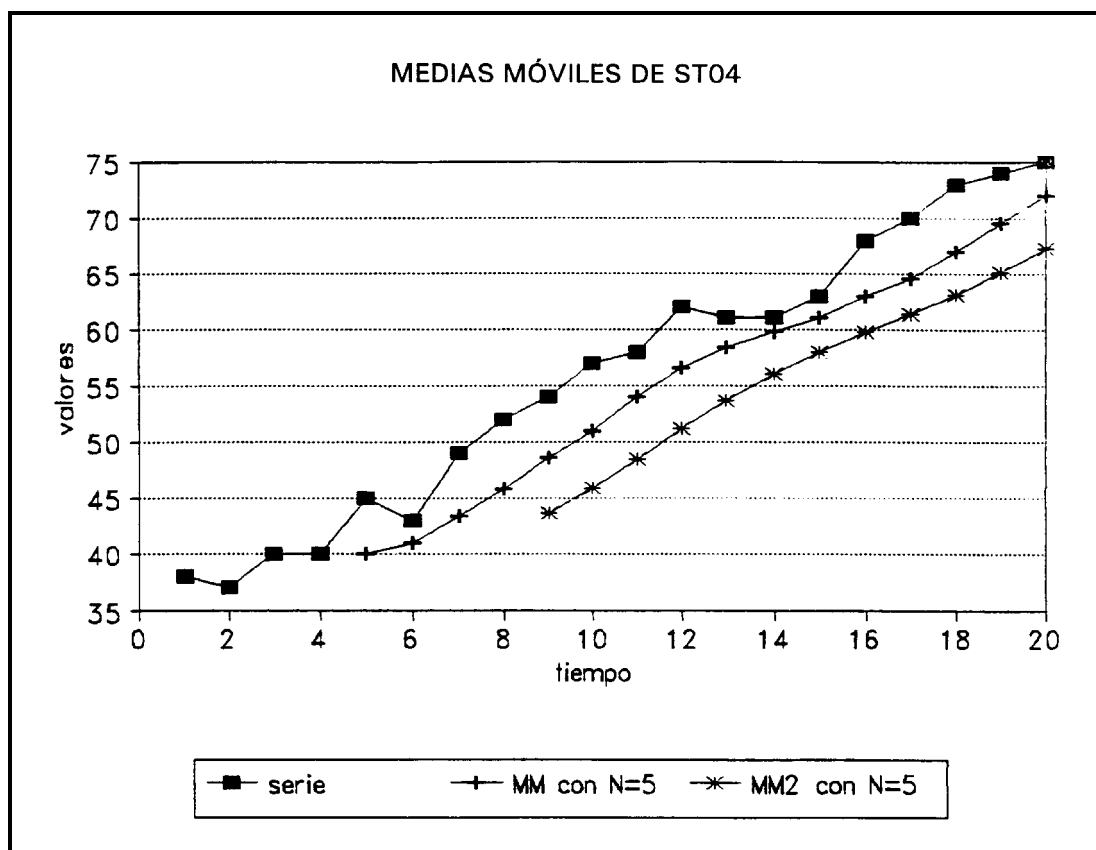


Fig. 2.1.3.13 Medias móviles de la serie ST04: Para N=5 se han representado las medias móviles primera y segunda de ST04. La segunda media móvil sigue la tendencia de la primera con un retraso adicional

La expresión para \hat{a} es extraordinariamente complicada, pero podemos darnos cuenta de que si en lugar de buscar la ordenada en el origen de la recta nos contentamos con la ordenada en el final, es decir, la correspondiente al instante T , la expresión se simplifica mucho, y en el fondo para trazar la recta nos basta con un punto cualquiera de la misma y la pendiente.

$$\hat{x}_T = 2 \cdot M_T - M2_T$$

Es preciso tener en cuenta que, a cada actualización, el final de los datos cambia (cosa que no ocurría con el inicio de los mismos). Lo mismo sucede con el punto central de los datos considerados en el que la ordenada de la recta también es sencilla de expresar:

$$\hat{x}_{T-\frac{N-1}{2}} = M_T$$

La estimación de los valores futuros se obtendrá de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{T+h} &= \hat{a}(T) + (T+h) \cdot \hat{b}(T) = \hat{x}_T + h \cdot \hat{b}(T) = 2 \cdot M_T - M2_T + \frac{2 \cdot h}{N-1} \cdot [M_T - M2_T] = \\ &= \left(2 + \frac{2 \cdot h}{N-1} \right) \cdot M_T - \left(1 + \frac{2 \cdot h}{N-1} \right) \cdot M2_T \end{aligned}$$

En la tabla de la *figura 2.1.3.12* hemos recogido los cálculos relativos a la serie temporal ST04, y con fines de comparación con la estructura anterior hemos indicado los valores de $\hat{a}(t)$ en lugar de los de \hat{x}_t como sería más indicado, dados los comentarios anteriores.

La estabilidad de las estimaciones es mayor que utilizando W_t en lugar de $M2_t$, aunque la comparación no es totalmente justa puesto que al utilizar $M2$ las medias de primer orden, indirectamente se utiliza $(2 \cdot N - 1)$ observaciones de la serie, en nuestro caso 9, lo que da mayor estabilidad a la estimación de b . En contrapartida la primera estimación la podemos realizar cuando contemos con $(2 \cdot N - 1)$ observaciones. Las estimaciones futuras (así como la correspondiente al final de los datos) son:

$$\hat{x}_{20} = 76,76 ; \hat{x}_{21} = 79,14 ; \hat{x}_{22} = 81,52 ;$$

$$\hat{x}_{23} = 83,90 ; \hat{x}_{24} = 86,28 ; \hat{x}_{25} = 88,66 .$$

Tomando $N = 10$ obtenemos los resultados de la *figura 2.1.3.10* y las proyecciones son ahora:

$$\hat{x}_{20} = 75,72 ; \hat{x}_{21} = 77,77 ; \hat{x}_{22} = 79,82 ;$$

$$\hat{x}_{23} = 81,87 ; \hat{x}_{24} = 83,92 ; \hat{x}_{25} = 85,96 .$$

t	x _t	M _t	N= 10			t	x _t	M _t	N= 10		
			M2 _t	b̂(t)	â(t)				M2 _t	b̂(t)	â(t)
1	38					11	58	47,5			
2	37					12	62	50,0			
3	40					13	61	52,1			
4	40					14	61	54,2			
5	45					15	63	56,0			
6	43					16	68	58,5			
7	49					17	70	60,6			
8	52					18	73	62,7			
9	54					19	74	64,7	55,18	2,12	34,0
10	57	47,5				20	75	66,5	57,28	2,05	2
											34,7
											4

Fig. 2.1.3.14 Observaciones de la serie temporal ST04 y medias móviles de primer y segundo orden y estimaciones de b y a para N= 10

2.1.3.3 Las medias móviles como filtro lineal

Intuitivamente tenemos la impresión de que la determinación del valor medio de las observaciones de una serie temporal a lo largo de un intervalo adecuado, ponderadas convenientemente si es preciso, permitirá alisar la serie temporal, eliminando valores erráticos y ciclos y poniendo más claramente de manifiesto la tendencia. La forma más general de este procedimiento que denominaremos filtro lineal será:

$$Y_T = \sum_{i=0}^{N-1} q_i \cdot x_{T-i}$$

donde y_T son los valores alisados de la serie temporal x_T y q_i son los pesos, con lo que se cumple que:

$$q_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{N-1} q_i = 1$$

El valor N será variable según el tipo de filtro, y en algunos casos postularemos que es infinito, lo que puede reportarnos ventajas en el campo analítico aunque no será traducible en la práctica salvo a través de aproximaciones cuya validez dependerá de lo rápidamente que tienda a cero q_i al crecer i. Las medias móviles son un caso particular de filtro lineal para el que:

$$q_i = \frac{1}{N} \quad \text{si} \quad 0 \leq i \leq N-1$$

$$q_i = 0 \quad \text{si} \quad i \geq N$$

Si consideramos la serie temporal *como suma* de componentes diferentes, la aplicación de un filtro lineal elimina las componentes tales que:

$$\sum_{i=0}^{N-1} q_i \cdot u_{t-i} = 0 \quad \text{a todo } t$$

dejando las demás más o menos modificadas.

En consecuencia la media móvil de extensión N , considerada como un filtro, elimina la estacionalidad aditiva de período N .

2.1.4 Alisado exponencial

En el procedimiento anterior de las medias móviles se asignaba un peso a las observaciones con sólo dos valores diferentes, peso $1/N$ a las N observaciones más recientes y peso 0 a las demás. Es una forma de dar mayor peso a las observaciones más modernas, pero una forma muy primitiva. Un refinamiento nos lleva a considerar como más lógico que todos los pesos sean distintos, decrecientes con la edad de las observaciones, para que tengan más peso las recientes que las antiguas. La forma más cómoda de definir unos pesos de este tipo consiste en utilizar una progresión geométrica de razón menor que la unidad.

2.1.4.1 Proceso constante. (Alisado exponencial simple o de primer orden)

Partimos, como siempre, del modelo de referencia:

$$x_t = a + \theta_t$$

con las consideraciones habituales sobre θ_t . Buscaremos el valor \hat{a} de tal forma que minimice la suma *ponderada* de los cuadrados de los residuos, utilizando un parámetro β menor que uno:

$$[MIN] \quad SSE(\beta) = \sum_{t=1}^T \beta^{T-t} \cdot (x_t - \hat{a})^2$$

con:

$$0 \leq \beta \leq 1$$

Derivando respecto a \hat{a} e igualando a cero obtenemos la estimación que minimiza $SSE(\beta)$:

$$\hat{a} \cdot \sum_{t=1}^T \beta^{T-t} = \sum_{t=1}^T \beta^{T-t} \cdot x_t \Rightarrow \hat{a} = \frac{1-\beta}{1-\beta^T} \cdot \sum_{t=1}^T \beta^{T-t} \cdot x_t = S_T$$

La *suma o media alisada de primer orden* S_T puede expresarse recursivamente en función de x_T y S_{T-1} :

$$\begin{aligned} S_T &= \frac{1-\beta}{1-\beta^T} \cdot \left[x_T + \sum_{t=1}^{T-1} \beta^{T-t} \cdot x_t \right] = \frac{1-\beta}{1-\beta^T} \cdot \left[x_T + \beta \cdot \frac{1-\beta^{T-1}}{1-\beta} \cdot S_{T-1} \right] = \\ &= \frac{1}{1-\beta^T} \cdot \left[(1-\beta) \cdot x_T + \beta \cdot (1-\beta^{T-1}) \cdot S_{T-1} \right] \end{aligned}$$

aunque esta expresión no será utilizable prácticamente si no suponemos T tan grande que:

$$\beta^{T-1} \approx \beta^T \approx 0$$

y haciendo, según es habitual, $\alpha = 1 - \beta$ obtendremos la formulación definitiva:

$$S_T = \alpha \cdot x_T + (1-\alpha) \cdot S_{T-1} = \alpha \cdot x_T + \beta \cdot S_{T-1}$$

donde α es la constante de alisado. Se debe tener presente que, dados unos valores de las observaciones de la serie temporal, S_T depende tanto de T como de α . Para valores de α diferentes la misma serie dará valores de S_T diferentes (aunque si el modelo supuesto es correcto, no demasiado diferentes ya que todos ellos constituyen estimaciones de a). Un enfoque heurístico puede llevarnos intuitivamente a la expresión anterior, que puede transformarse en:

$$S_T = S_{T-1} + \alpha \cdot (x_T - S_{T-1})$$

cuya lectura podría ser:

$$\text{nueva estimación} = \text{vieja estimación} + \text{parte del error}$$

Consideremos S_T definido por la expresión recurrente, lo cual lo reduce a una combinación lineal de todas las observaciones pasadas:

$$S_t = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{T-1} \beta^k \cdot x_{T-k} + \beta^T \cdot S_0$$

Si la serie temporal consta de T observaciones solamente, adoptaremos $S_0 = 0$, lo cual no introducirá ninguna perturbación en nuestras consideraciones si T es suficientemente grande, y por tanto el peso de S_0 , representado por la potencia T -ésima de β , es despreciable. Si no se cumple esta condición, el procedimiento puede conducirnos a resultados desviados; el procedimiento no supone, cómo sucede realmente, que no conocemos los valores de las observaciones de la serie temporal anteriores a la que ocupa la posición 1, o bien que no existen dado que el fenómeno se ha producido por primera vez en el instante 1. El supuesto implícito del procedimiento es que *dichos valores son todos ellos cero*, y el peso de infinitos ceros extendidos desde el origen relativo hasta el principio de los tiempos puede ser abrumador. Cuando el número de observaciones disponible en el pasado es grande, entonces S_T constituye una buena estimación de a :

$$\hat{a} = S_T \quad \text{y} \quad \hat{x}_{T+h} = S_T$$

Si el modelo constante es correcto, la elección de α carece de importancia (suponiendo que se dispone de suficientes datos). Si suponemos que el modelo es correcto en segmentos extensos de tiempo, pero que pueden producirse modificaciones del valor de a entre segmentos, la elección de α es importante pues influye en la rapidez de respuesta, la adaptación desde el valor antiguo al valor nuevo. Podemos asimilar α al peso que se da al presente y β al que se da al pasado. Cuando más pequeño sea α , más lenta será la respuesta, pues mayor peso estamos dando al pasado sobre el presente, y más difícil será asumir un cambio. Valores grandes de α conducirán a respuestas rápidas, pero no sólo a los cambios reales sino también a los aparentes, a los ruidos. Valores pequeños de α darán gran estabilidad, pero muy reducida sensibilidad; valores grandes de α conducirán a gran sensibilidad, pero a escasa estabilidad. El equilibrio entre ambos aspectos es difícil de conseguir, y la solución idónea puede ser función de las circunstancias. Es corriente elegir α en el intervalo de valores comprendido entre 0,01 y 0,3.

En ocasiones para comparar el alisado exponencial con los procedimientos de las medias móviles se analiza la *antigüedad media* de los datos que figuran en la media alisada. Podemos escribir:

$$AMA(\alpha) = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot \beta + 2 \cdot \beta^2 + 3 \cdot \beta^3 + \dots}{1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \dots} = \alpha \cdot \sum_{K=0}^{\infty} k \cdot \beta^k = \frac{\beta}{\alpha}$$

y puesto que en el caso de las medias móviles la antigüedad media puede asimilarse al centro de los datos utilizados:

$$AMM(N) = \frac{N-1}{2}$$

podemos asimilar los procedimientos con igualdad de antigüedad, lo que conduce a una relación entre N y α :

$$\alpha = \frac{2}{N+1} \quad N = \frac{1+\beta}{\alpha}$$

Esta asimilación debe tratarse con gran delicadeza, y en todo caso, corresponde a la comparación entre medias de primer orden.

2.1.4.1.1 Inicialización del alisado exponencial

Según la expresión vista anteriormente:

$$S_T = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{T-1} \beta^k \cdot x_{T-k} + \beta^T \cdot S_0$$

para poder utilizar el alisado exponencial de primer orden precisamos un valor inicial de S_t (por ejemplo S_0). Si disponemos de datos históricos, podemos utilizar una media simple de las N observaciones disponibles más recientes. Si no hay datos, puede servirnos como valor inicial una estimación subjetiva de a , que si tiene la posibilidad de ser poco precisa, nos inducirá a utilizar inicialmente un valor de α mayor que el que emplearemos definitivamente. Supongamos que disponemos inicialmente de los diez valores históricos relativos a instalaciones semanales de calentadores de agua de la tabla de la *figura 2.1.4.1*, que suponemos que corresponden a un modelo estable. Obtenemos una primera estimación de a la mediante el valor (que tomaremos como S_{10}):

$$S_{10} = \frac{1}{10} \times (15 + 18 + 10 + \dots + 20) = 16,4$$

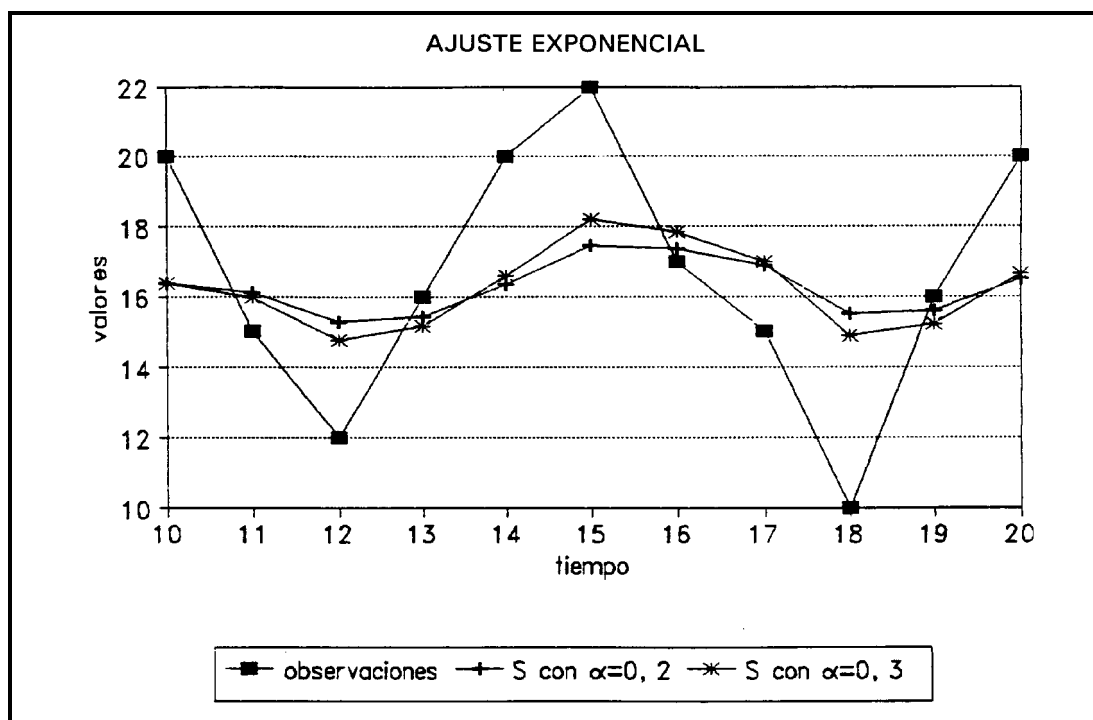
Por consiguiente, redondeando, estimaremos que en el futuro se van a realizar 16 instalaciones por semana. Si seguidamente cada vez que obtenemos una nueva observación actualizamos, con $\alpha = 0,2$, nuestra estimación, obtendremos el desarrollo de la *figura 2.1.4.2*. El primer valor de la misma resulta de:

$$S_{11} = 0,2 \cdot x_{11} + 0,8 \cdot S_{10} = 0,2 \times 15 + 0,8 \times 16,4 = 16,12$$

Semana t	Observación x_t	Semana t	Observación x_t
1	15	6	17
2	18	7	22
3	10	8	16
4	12	9	14
5	20	10	20

Fig. 2.1.4.1 Datos históricos de la serie ST06

t	x_t	S_t	\hat{x}_{t+1}	t	x_t	S_t	\hat{x}_{t+1}
10	20	16,40	16	16	17	17,38	17
11	15	16,12	16	17	15	16,91	17
12	12	15,30	15	18	10	15,53	16
13	16	15,44	15	19	16	15,62	16
14	20	16,35	16	20	20	16,50	16
15	22	17,48	17				

Fig. 2.1.4.2 Medias alisadas y previsiones en la serie ST06 con $\alpha = 0,2$ Fig. 2.1.4.3 Alisado exponencial de la serie ST06: A partir del valor inicial 16,4 se representan las medias alisadas de la serie ST06 con $\alpha = 0,2$ y $\alpha = 0,3$ cuyas oscilaciones reflejan las de la serie con cierto amortiguamiento (menor para la segunda)

t	x_t	S_t	\hat{x}_{t+1}	t	x_t	S_t	\hat{x}_{t+1}
10	20	16,40	16	16	17	17,86	18
11	15	15,98	16	17	15	17,00	17
12	12	14,79	15	18	10	14,90	15
13	16	15,15	15	19	16	15,23	15
14	20	16,61	17	20	20	16,66	17
15	22	18,22	18				

Fig. 2.1.4.4 Medias alisadas y previsiones en la serie ST06 con $\alpha = 0,3$

t	x_t	$\alpha=0,1$ S_t	$\alpha=0,2$ S_t	$\alpha=0,3$ S_t	t	x_t	$\alpha=0,1$ S_t	$\alpha=0,2$ S_t	$\alpha=0,3$ S_t
1	37	35,20	35,40	35,60	11	57	44,65	49,69	52,43
2	39	35,58	36,12	36,62	12	59	46,08	51,55	54,40
3	41	36,12	37,10	37,93	13	61	47,58	53,44	56,38
4	43	36,81	38,28	39,45	14	63	49,12	55,35	58,37
5	45	37,63	39,62	41,12	15	65	50,71	57,28	60,36
6	47	38,56	41,10	42,88	16	67	52,34	59,23	62,35
7	49	39,61	42,68	44,72	17	69	54,00	61,18	64,34
8	51	40,75	44,34	46,60	18	71	55,70	63,14	66,34
9	53	41,97	46,07	48,52	19	73	57,43	65,12	68,34
10	55	43,28	47,86	50,47	20	75	59,19	67,09	70,34

Fig. 2.1.4.5 Observaciones de la serie temporal ST05 y medias alisadas de primer orden para tres valores de α (como valor inicial adoptamos $S_0 = 35$)

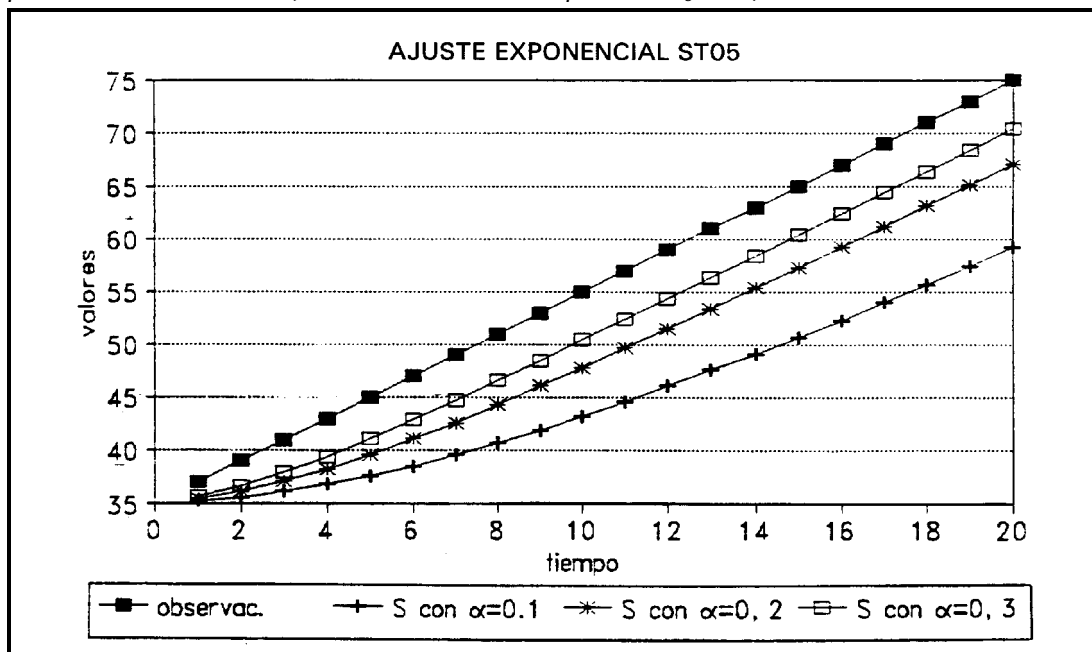


Fig. 2.1.4.6 Medias alisadas de la serie ST05: Para tres valores de α (0,1 ; 0,2 y 0,3) se han representado las medias alisadas de ST05. Al ser la tendencia creciente las medias alisadas siguen a la serie con cierto retraso

2.1.4.2 Proceso con tendencia lineal (alisado exponencial doble)

El modelo utilizado será ahora:

$$x_t = a + b \cdot t + \theta_t$$

con las usuales consideraciones sobre θ_t .

Consideremos que disponemos de infinitas observaciones y que inicialmente situamos el origen de coordenadas en el punto medio de los datos, teniendo en cuenta el efecto del peso β^k , es decir, en el punto:

$$T - \frac{\beta}{\alpha}$$

El efecto se traducirá sólo en el valor de la ordenada en el origen de la recta, que será ahora:

$$a' = a + b \cdot \left(T - \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

y la recta será:

$$a' + b \cdot \left(t - T + \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

t	x_t	$\alpha=0,1$	$\alpha=0,2$	$\alpha=0,3$	t	x_t	$\alpha=0,1$	$\alpha=0,2$	$\alpha=0,3$
		S_t	S_t	S_t			S_t	S_t	
1	38	35,30	35,60	35,90	11	58	44,62	49,98	52,09
2	37	35,47	35,88	36,23	12	62	46,36	52,39	55,76
3	40	35,92	36,70	37,36	13	61	47,82	54,11	57,33
4	40	36,33	37,36	38,15	14	61	49,13	55,49	58,43
5	45	37,20	38,89	40,21	15	63	50,52	56,99	59,80
6	43	37,78	39,71	41,04	16	68	52,27	59,19	62,26
7	49	38,90	41,57	43,43	17	70	54,04	61,35	64,58
8	52	40,21	43,66	46,00	18	73	55,94	63,68	67,11
9	54	41,58	45,72	48,40	19	74	57,74	65,75	69,18
10	57	43,13	47,98	50,98	20	75	59,47	67,60	70,92

Fig. 2.1.4.7 Observaciones de la serie temporal ST04 y medias alisadas de primer orden para tres valores de α (como valor inicial adoptamos $S_0=35$)

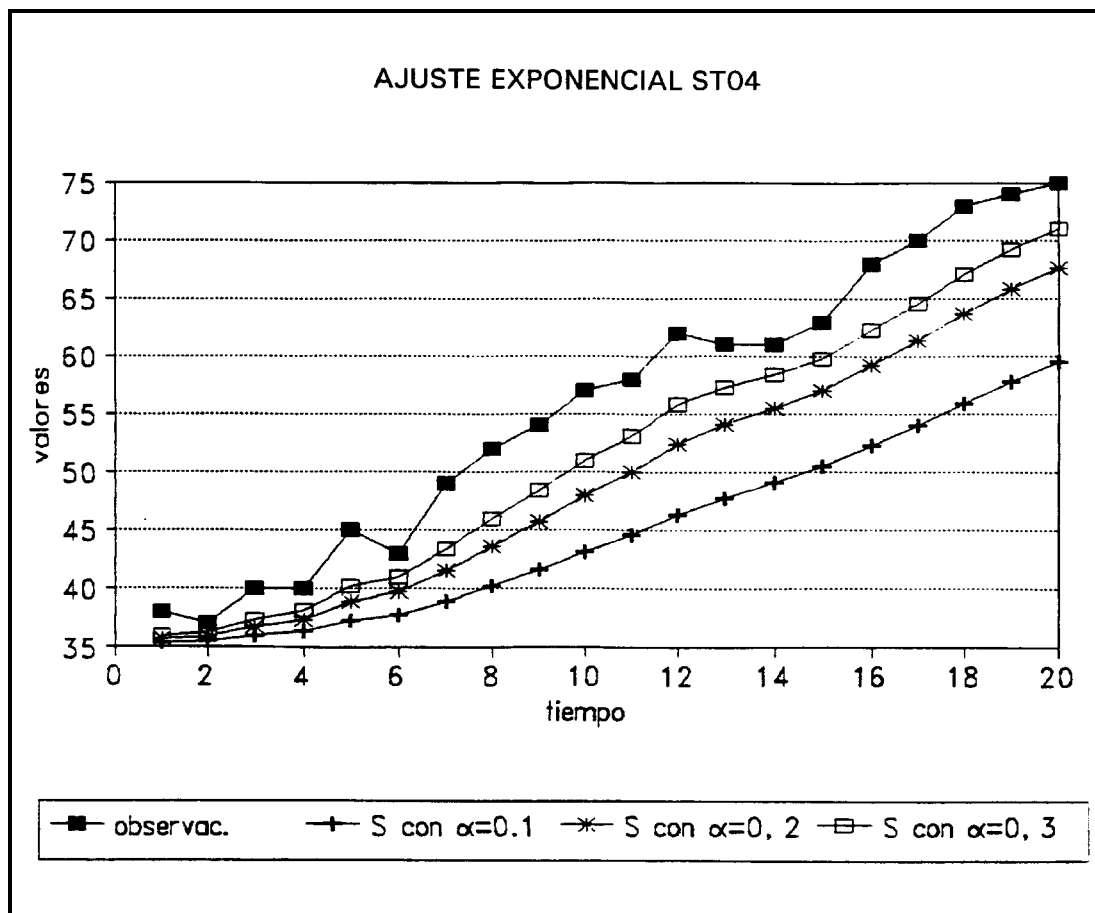


Fig. 2.1.4.8 Medias alisadas de la serie ST04: Para tres valores de α (0,1 ; 0,2 y 0,3) hemos determinado las medias alisadas de ST04. Al ser la tendencia creciente las medias alisadas siguen a la serie con cierto retraso a la vez que amortiguan las pequeñas oscilaciones

La expresión de SSE tomará la forma, haciendo $k = T - t$:

$$SSE = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot \left[x_{T-k} - \hat{a}' - \hat{b} \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} - k \right) \right]^2$$

Derivando respecto a a' y b e igualando a cero obtenemos:

$$\hat{a}' \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k + \hat{b} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} - k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot x_{T-k}$$

$$\hat{a}' \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} - k \right) + \hat{b} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} - k \right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} - k \right) \cdot x_{T-k}$$

Si tenemos en cuenta que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{1}{1-\beta} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot k = \frac{\beta}{(1-\beta)^2} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot \frac{k \cdot (k-1)}{2} = \frac{\beta^2}{(1-\beta)^3}$$

y en general:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot \binom{k}{r} = \frac{\beta^r}{(1-\beta)^{r+1}}$$

de donde:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot k^2 = \frac{\beta \cdot (1+\beta)}{(1-\beta)^3}$$

llegamos a:

$$\begin{aligned} \hat{a}' \cdot \frac{1}{1-\beta} + \hat{b} \cdot (0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot x_{T-k} \\ \hat{a}' \cdot (0) + \hat{b} \cdot \frac{\beta}{(1-\beta)^3} &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} - k \right) \cdot x_{T-k} \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} \hat{a}' &= (1-\beta) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot x_{T-k} = S_T \\ \hat{b} &= \frac{(1-\beta)^3}{\beta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} - k \right) \cdot x_{T-k} = V_T \end{aligned}$$

Utilizando $1-\beta = \alpha$, obtenemos las recurrencias:

$$\begin{aligned} S_T &= \beta \cdot x_T + \beta \cdot S_{T-1} \\ V_T &= \alpha^2 \cdot x_T + \beta \cdot \left[V_{T-1} - s_{T-1} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta} \right] = \\ &= \alpha \cdot [S_T - S_{T-1}] + \beta \cdot V_{T-1} \end{aligned}$$

Existe una forma alternativa, como en el caso de las medias móviles, pero que aquí es *completamente* equivalente. En las *figuras 2.1.4.6 y 2.1.4.8* hemos analizado el comportamiento de la media alisada de primer orden en las series ST05 y ST04 respectivamente, en las que se aprecia (mejor en la *figura 2.1.4.6*) que dichas medias, cuando el número de observaciones es suficiente, siguen la trayectoria rectilínea de la serie con un cierto retraso. Es una consecuencia de la propiedad ya detectada, S_T se corresponde a la ordenada a' de la recta en la posición $(T - \beta/\alpha)$. Analicemos directamente este hecho en ausencia de ruido:

$$S_T = (1 - \beta) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot (a_T - b \cdot k)$$

donde la recta:

$$a - b \cdot k$$

es una recta de ordenada a_T en el punto T y pendiente b (téngase en cuenta que k es la antigüedad respecto a dicho punto). Según lo establecido:

$$S_T = (1 - \beta) \cdot \left(\frac{T}{1 - \beta} - \frac{\beta}{(1 - \beta)^2} \right) = a_T - b \cdot \frac{\beta}{\alpha}$$

es decir la ordenada de la recta en el punto $T - \beta/\alpha$. Podemos concluir:

Si los valores de la serie temporal están alineados, con pendiente diferente de cero, los valores de la primera media alisada exponencialmente (de infinitas observaciones) con parámetro α también están alineados, y describen una recta paralela a la de la serie con un retraso en tiempo de β/α , o bien en ordenada de:

$$b \cdot \frac{\beta}{\alpha} = b \cdot \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

Por tanto si:

$$x_t = a + b \cdot t$$

entonces:

$$S_t = a + b \cdot \left(t - \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

Puesto que en la serie ST05 tenemos $a=35$ y $b=2$, la expresión anterior se escribirá:

$$S_t = 35 + 2 \cdot \left(t - \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

que para distintos valores de α tendrá los siguientes valores:

$$\text{para } \alpha = 0,1 \quad S_t = 17 + 2 \cdot t \quad S_{20} = 57$$

$$\text{para } \alpha = 0,2 \quad S_t = 27 + 2 \cdot t \quad S_{20} = 67$$

$$\text{para } \alpha = 0,3 \quad S_t = 30,333 + 2 \cdot t \quad S_{20} = 70,333$$

Podemos observar en la *figura 2.1.4.5* que los valores obtenidos de S_{20} con *un número finito de observaciones (20)* y con un valor S_0 totalmente arbitrario (diferente de 17, 27 o 30,333) son muy parecidos a los anteriores en los casos de $\alpha = 0,2$ y $\alpha = 0,3$ (más en este último) y relativamente distinto para $\alpha = 0,1$, ya que en este caso el peso del pasado (más precisamente de la diferencia entre S_0 y 17), todavía es importante después de 20 iteraciones, aportando la diferencia 2,19.

Si llamamos $S2_t$ a la media alisada exponencialmente de segundo orden (media alisada de la primera media alisada), que cumplirá:

$$S2_t = \alpha \cdot S_t + \beta \cdot S2_{t-1}$$

es decir:

$$S2_T = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{T-1} \beta^k \cdot S_{T-k} + \beta \cdot S2_0$$

tendremos:

$$S2_t = a + b \cdot \left(t - \frac{2 \cdot \beta}{\alpha} \right)$$

Podremos, pues, escribir:

$$b = \frac{\alpha}{\beta} \cdot (S_t - S2_t)$$

y

$$a = 2 \cdot S_t - S2_t - \frac{\alpha \cdot t}{\beta} \cdot (S_t - S2_t)$$

o bien, más sencillamente:

$$x_t = 2 \cdot S_t - S_{2t}$$

En presencia de ruido parece lógico estimar los parámetros mediante expresiones idénticas:

$$\hat{b}(T) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot (S_T - S_{2T})$$

$$\hat{x}_T = 2 \cdot S_T - S_{2T}$$

$$\hat{a}(T) = 2 \cdot S_T - S_{2T} - \frac{\alpha \cdot T}{\beta} \cdot (S_T - S_{2T})$$

(sería conveniente indicar que la estimación de x_T se ha hecho en el instante T , pero para no complicar la notación no hemos introducido un índice más, escribiendo $\hat{x}_T(T)$; posteriormente cuando cambiemos el significado de a , pasándolo de ordenada en el origen a ordenada al final de los datos, este extremo quedará subsanado, a costa de tener un punto de referencia que se desplaza en el tiempo).

Resumiendo, tenemos dos juegos de expresiones, uno para la determinación recurrente de las medias alisadas y otro para el cálculo a partir de las mismas de las estimaciones, a los que puede añadirse un tercero, deducido del segundo, útil para los procedimientos de inicialización. Hemos reescrito el conjunto en la tabla de la *figura 2.1.4.9*.

En la *figura 2.1.4.9bis* hemos indicado la variante inicial que, a semejanza a lo visto en las medias móviles, utiliza en lugar de la media alisada de segundo orden el *momento estático alisado*; pero a diferencia de aquella circunstancia, ambos enfoques son estrictamente equivalentes (considerando los cálculos realizados con infinitas observaciones). Ambos enfoques, asimismo, están entroncados con los procedimientos de mínimos cuadrados, por cuanto los valores de \hat{a} y \hat{b} obtenidos minimizan la expresión:

$$\begin{aligned} SSE(\beta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot [x_{T-k} - \hat{a} - \hat{b} \cdot (T-k)]^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot [x_{T-k} - (\hat{x}_T - \hat{b} \cdot k)]^2 \end{aligned}$$

pues puede demostrarse fácilmente:

$$V_T = \frac{\alpha}{\beta} \cdot [S_T - S_{2T}]$$

<p>FÓRMULAS 1</p> $S_T = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot x_{T-k} = \alpha \cdot x_T + (1 - \alpha) \cdot S_{T-1}$ $S2_T = \alpha^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \beta^k \cdot x_{T-k} = \alpha \cdot S_T + (1 - \alpha) \cdot S2_{T-1}$
<p>FÓRMULAS 2</p> $\hat{x}_T = 2 \cdot S_T - S2_T$ $\hat{b}(T) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot (S_T - S2_T)$ $\hat{a}(T) = \hat{x}_T - T \cdot b_T = 2 \cdot S_T - S2_T - \frac{\alpha \cdot T}{\beta} \cdot (S_T - S2_T)$ $\hat{x}_{T+h} = \hat{x}_T + h \cdot \hat{b}(T) = 2 \cdot S_T - S2_T + \frac{\alpha \cdot h}{\beta} \cdot (S_T - S2_T)$
<p>FÓRMULAS 2A</p> $S_0 = \hat{a}(0) - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \hat{b}(0)$ $S2_0 = \hat{a}(0) - 2 \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \hat{b}(0)$ $S_T = \hat{x}_T - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \hat{b}(T)$ $S2_T = \hat{x}_T - 2 \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \hat{b}(T)$

Fig. 2.1.4.9 Fórmulas para la aplicación de las medias alisadas exponencialmente en el modelo con tendencia lineal (alisado exponencial doble). Las fórmulas 1 corresponden al cálculo recursivo de las medias alisadas, las fórmulas 2 a la determinación a partir de las mismas de las estimaciones de los parámetros del modelo, las fórmulas 2A a los procedimientos de inicialización

ALTERNATIVAS	
$S_T = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \cdot x_{T-k} = \alpha \cdot x_T + (1 - \alpha) \cdot S_{T-1}$	(FÓRMULAS 1)
$V_T = \frac{\alpha^3}{\beta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha} - k \right) \cdot \beta^k \cdot x_{T-k} = \alpha \cdot (S_T - S_{T-1}) + (1 -$	
$\hat{b}(T) = V_T$	
$\hat{a}(T) = S_T - V_T \cdot \left(T - \frac{\beta}{\alpha} \right)$	(FÓRMULAS 2)
$\hat{x}_{T+h} = S_T + V_T \cdot \left(h - \frac{\beta}{\alpha} \right)$	

Fig. 2.1.4.9bis Fórmulas alternativas para el alisado exponencial doble. La expresión V_t propiamente se corresponde a un momento estático alisado exponencialmente (el punto de referencia es el centro de los datos $(T - AMA(\alpha)) = T - \beta/\alpha$)

Quedan tres problemas pendientes, para poder proceder a una aplicación práctica:

- a) ¿Cómo elegir α (o, equivalentemente, β)?
- b) ¿Cómo poner en marcha el procedimiento?
- c) ¿Cómo sabemos que el número de observaciones es suficiente para iniciar el procedimiento aplicando las fórmulas que corresponden al caso límite?

2.1.4.2.1 Cómo elegir α

Análogamente a lo dicho en el modelo constante, el valor de α establece la ponderación entre el presente y el pasado, al definir el peso acordado a cada dato en función de su edad.

- | | |
|---------------------------|---|
| $\beta = 0, (\alpha = 1)$ | representa prescindir del pasado, dar peso únicamente al presente, a la última observación, |
| $\beta = 1, (\alpha = 0)$ | representa dar a todas las observaciones el mismo peso, y como en teoría existen infinitas, el peso dado al presente es insignificante. |

Valores de α pequeños dan estabilidad a las estimaciones, pero poca sensibilidad para absorber los cambios; valores grandes darán gran sensibilidad pero acompañada de una inestabilidad innecesaria, las estimaciones fluctuarán siguiendo los cambios reales pero también a los áleas. Mantendremos de momento el intervalo de valores recomendados de α entre 0,01 y 0,3. Más adelante veremos la posibilidad de elegir α en función de la crónica, o bien la de alterar α en el transcurso del procedimiento, si las circunstancias lo aconsejan.

2.1.4.2.2 Cómo poner en marcha el procedimiento

Una vez elegido α , necesitamos unos valores iniciales de S y $S2$, por ejemplo S_0 y $S2_0$, lo cual es sencillo si disponemos de una estimación inicial de los parámetros del modelo $\hat{a}(0)$ y $\hat{b}(0)$ utilizando las FÓRMULAS 2A. La obtención de los valores $\hat{a}(0)$ y $\hat{b}(0)$ puede producirse de dos formas diferentes:

- partiendo de datos históricos y ajustando a los mismos una recta mediante un procedimiento cualquiera, por ejemplo por regresión lineal (no olvidemos que el origen lo hemos situado *al final de los datos*),
- partiendo de estimaciones subjetivas.

En ambos casos tomaremos:

$$S_0 = \hat{a}(0) - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \hat{b}(0)$$

$$S2_0 = \hat{a}(0) - 2 \cdot \frac{1 - \alpha}{\alpha} \cdot \hat{b}(0)$$

Veamos un ejemplo: deseamos estimar la facturación mensual de un servicio de *time-sharing*, y los dos años previos de funcionamiento no los consideramos suficientemente significativos, por lo que preferimos una estimación subjetiva: $\hat{a}(0) = 95$; $\hat{b}(0) = 1,0$. Tomaremos $\alpha = 0,1$. En estas circunstancias:

$$S_0 = 95 - \frac{0,9}{0,1} \times 1 = 86 \quad ; \quad S2_0 = 95 - 2 \times \frac{0,9}{0,1} \times 1 = 77$$

y además:

$$\hat{x}_1 = 96 \quad \text{y en general} \quad \hat{x}_T = \hat{x}_{0+T} = 95 + 1 \times T$$

Supongamos que durante los doce meses siguientes vamos actualizando los valores S_T y $S2_T$, a partir del valor x_T real, como puede verse en la *figura 2.1.4.10* en la que en general:

$$\hat{x}_{T+1} = \hat{x}_T + 1 \cdot \hat{b}(T) = 2 \cdot S_T - S_{2T} + \frac{0,1}{0,9} \cdot [S_T - S_{2T}] = \frac{19}{9} \cdot S_T - \frac{10}{9} \cdot S_{2T}$$

Mes T	x _T	α = 0,1			α = 0,2		
		S _T	S _{2T}	ŷ _{T+1}	S _T	S _{2T}	ŷ _{T+1}
0		86	77	96	91	87	96
1	98	87,2	78,02	97,4	92,4	88,08	97,8
2	94	87,88	79,01	97,74	92,72	89,01	97,36
3	99	88,99	80,00	98,98	93,98	90,00	98,94
4	104	90,49	81,05	100,98	95,98	91,20	101,96
5	108	92,24	82,17	103,43	98,38	92,63	105,57
6	100	93,02	83,26	103,87	98,71	93,85	104,78
7	106	94,32	84,36	105,38	100,17	95,11	106,48
8	104	95,29	85,46	106,21	100,93	96,28	106,75
9	118	97,56	86,67	109,66	104,35	97,89	112,42
10	109	98,70	87,87	110,74	105,28	99,37	112,66
11	102	99,03	88,99	110,19	104,62	100,42	109,88
12	116	100,73	90,16	112,47	106,90	101,71	113,38

Fig. 2.1.4.10 Actualización de los valores S_T y S_{2T} en la serie ST07 para los valores α = 0,1 y α = 0,2

Transcurrido un año tenemos S₁₂ = 100,73 y S_{2,12} = 90,16, por lo que:

$$\hat{b}(12) = \frac{0,1}{0,9} \times (100,73 - 90,16) = 1,17$$

$$\hat{x}_{12} = 2 \times 100,73 - 90,16 = 111,30$$

$$\hat{a}(12) = 111,26 - 12 \times 1,17 = 97,21$$

que no son muy diferentes de los iniciales (aunque como puede verse en la figura 2.1.4.11 la pendiente del crecimiento de la facturación parece superior a la indicada inicialmente, de donde la mejor adaptación del valor de $\hat{b}(12)$).

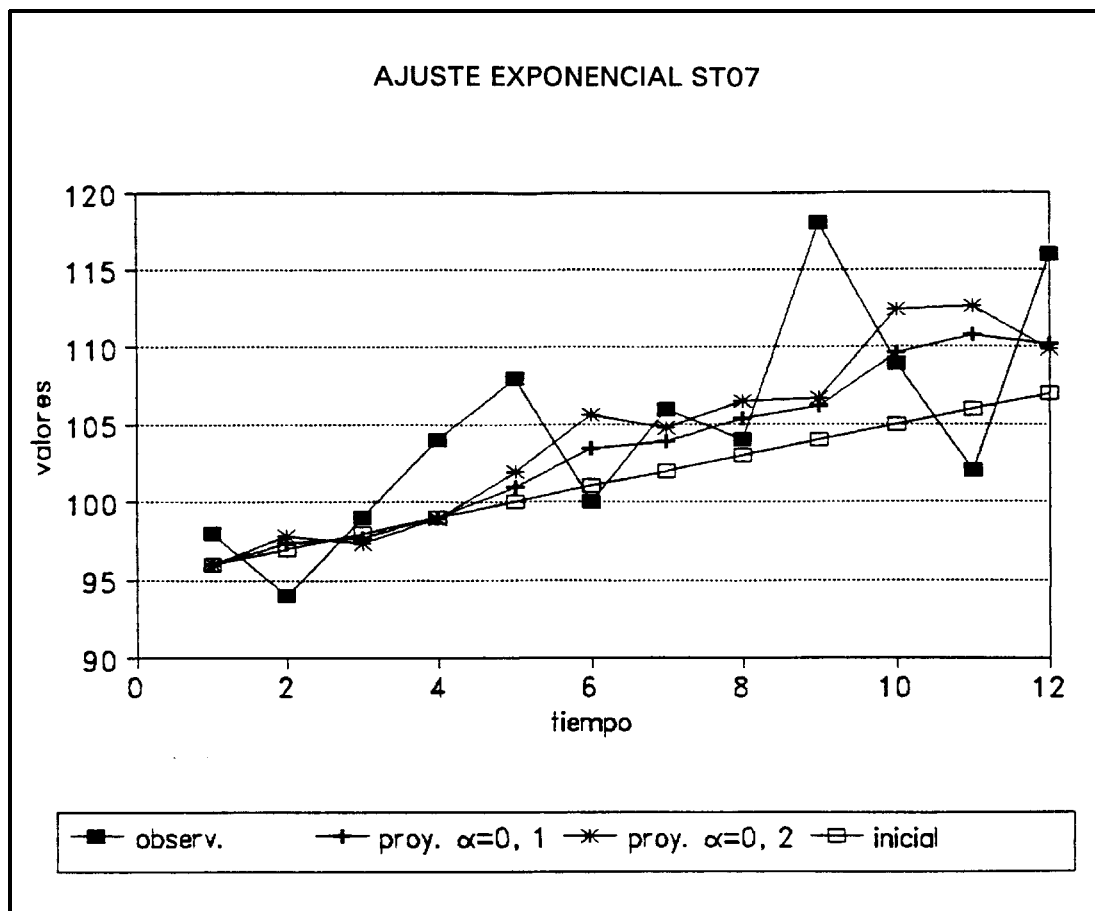


Fig. 2.1.4.11 Comparación de previsiones y valores reales en la serie ST07: Para $\alpha = 0,1$ y $\alpha = 0,2$ comparamos las previsiones obtenidas mediante ajuste exponencial con las observaciones. Podemos comprobar que la tendencia creciente de la serie es mayor que la postulada inicialmente

Repitiendo los cálculos para $\alpha = 0,2$ tenemos:

$$\hat{b}(12) = \frac{0,2}{0,8} \times (106,90 - 101,71) = 1,296$$

$$\hat{x}_{12} = 2 \times 106,90 - 101,71 = 112,08$$

$$\hat{a}(12) = 112,08 - 12 \times 1,296 = 96,53$$

2.1.4.2.3 Cómo sabemos que el número de observaciones es suficiente

Una forma sugerente para iniciar el procedimiento sería aplicar a los datos históricos, mediante las fórmulas recurrentes, la definición de S y $S2$ (FÓRMULAS 1). Para ello deberíamos prescindir del hecho de que el número de observaciones con que contamos, T , es *finito*. Las formas adoptadas serían ahora:

$$S_T = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{T-1} \beta^k \cdot x_{T-k} = \alpha \cdot x_T + (1 - \alpha) \cdot S_{T-1}$$

$$S2_T = \alpha^2 \cdot \sum_{k=0}^{T-1} (k + 1) \cdot \beta^k \cdot x_{T-k} = \alpha \cdot S_T + (1 - \alpha) \cdot S2_{T-1}$$

Podríamos poner en marcha la recurrencia tomando como valores iniciales:

$$S_0 = 0 \quad S2_0 = 0$$

o bien

$$S_1 = \alpha \cdot x_1 \quad S2_1 = \alpha^2 \cdot x_1$$

Mes T	x_T	$\alpha = 0,1$		$\alpha = 0,2$	
		S_T	$S2_T$	S_T	$S2_T$
0		0	0	0	0
1	98	9,8	0,98	19,6	3,92
2	94	18,22	2,70	34,48	10,03
3	99	26,30	5,06	47,38	17,50
4	104	34,07	7,96	58,71	25,74
5	108	41,46	11,31	68,57	34,31
6	100	47,31	14,91	74,85	42,42
7	106	53,18	18,74	81,08	50,15
8	104	58,26	22,69	85,67	57,25
9	118	64,23	26,84	92,13	62,23
10	109	68,71	31,03	95,51	70,48
11	102	72,04	35,13	96,80	75,75
12	116	76,44	39,26	100,64	80,73

Fig. 2.1.4.12 Aplicación de las expresiones recurrentes para el cálculo de S_T y $S2_T$ en la serie ST07, prescindiendo de valores iniciales (para $\alpha = 0,1$ y $\alpha = 0,2$)

¿Qué valor mínimo deberá tener T para que las expresiones anteriores conduzcan a unos valores de S_T y $S2_T$ correctos para proceder a la estimación de valores futuros de x_{T+h} , supuesto correcto el modelo lineal? Esta pregunta es equivalente a decir qué valor de T será suficientemente alto como para que la aproximación finita de las sumas infinitas de las FÓRMULAS 1 tenga respecto a ellas una diferencia despreciable; esta diferencia vendría dada por el efecto en S_T y de $S2_T$ de las observaciones inexistentes anteriores a x_1 . Dicho efecto será función de α y de T , en principio podremos decir que si:

$$\beta^T = (1 - \alpha)^T$$

es suficientemente pequeño, la aproximación de S_T será suficiente, y que si:

$$(\alpha \cdot T + 1) \cdot \beta^T = (\alpha \cdot T + 1) \cdot (1 - \alpha)^T$$

es suficientemente pequeño, la aproximación de $S2_T$ será suficiente (la segunda condición implica la primera).

En las *figuras 2.1.4.13 y 2.1.4.14* hemos indicado los valores de T mínimos, asociados a diferentes α , que conducen a valores *pequeños*, de las expresiones anteriores entre 0,001 y 0,1 según los casos. Podemos comprobar que 12 valores son claramente escasos para el modelo lineal (con tendencia diferente de cero). Realmente existe una circunstancia que empeora todavía las cosas, la estimación de b se determina *a partir de la diferencia* entre S_T y $S2_T$, esta diferencia es normalmente mucho menor que el valor de S_T o de $S2_T$. Por consiguiente si en S_T y/o $S2_T$ existe un error, aunque sea relativamente pequeño, el error relativo en la diferencia puede fácilmente alcanzar y superar el 100 %. No utilizar unos valores iniciales para las expresiones recurrentes equivale a tomar $S_0 = S2_0 = 0$, lo que puede introducir tanto o más error que el adoptar una estimación inicial poco fiable.

α	$\beta^T \leq \delta$				
	$\delta = 0,100$	$\delta = 0,050$	$\delta = 0,010$	$\delta = 0,005$	$\delta = 0,001$
0,01	230	299	459	528	688
0,05	45	59	90	104	135
0,10	22	29	44	51	66
0,15	15	19	29	33	43
0,20	11	14	21	24	31
0,25	9	11	17	19	25
0,30	7	9	13	15	20

Figura 2.1.4.13 Valores mínimos del número de observaciones para que la utilización de las fórmulas recurrentes del alisado exponencial proporcione un valor aproximado de la primera media alisada S_T cuyo error relativo sea inferior a δ

$(\alpha \cdot T + 1) \cdot \beta^T \leq \delta$					
α	$\delta = 0,100$	$\delta = 0,050$	$\delta = 0,010$	$\delta = 0,005$	$\delta = 0,001$
0,01	387	472	661	739	919
0,05	76	92	129	145	180
0,10	37	45	63	71	88
0,15	24	29	41	46	57
0,20	17	21	30	33	41
0,25	14	17	23	26	32
0,30	11	13	19	21	26

Figura 2.1.4.14 Valores mínimos del número de observaciones para que la utilización de las fórmulas recurrentes del alisado exponencial proporcione un valor aproximado de la segunda media alisada $S2_T$ cuyo error relativo sea inferior a δ

Una línea de actuación posible que permite utilizar las fórmulas recurrentes directamente sobre la serie, sin consideración de estimaciones iniciales específicas, consiste en tener en cuenta explícitamente que la determinación de S_T y $S2_T$ se ha realizado con un número finito T de observaciones.

En este caso la antigüedad media de las observaciones es:

$$\left(\sum_{k=0}^{T-1} \beta^k \cdot k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{T-1} \beta^k \right)^{-1} = \frac{\beta}{1-\beta} - T \cdot \frac{\beta^T}{1-\beta^T} < \frac{\beta}{1-\beta}$$

Análogamente a lo ya realizado tomamos el origen de datos en:

$$T - \left(\frac{\beta}{1-\beta} - T \cdot \frac{\beta^T}{1-\beta^T} \right)$$

con lo que obtenemos:

$$\hat{a}' \cdot \sum_{k=0}^{T-1} \beta^k = \sum_{k=0}^{T-1} \beta^k \cdot x_{T-k}$$

$$\hat{b} \cdot \sum_{k=0}^{T-1} \beta^k \cdot \left(\frac{\beta}{1-\beta} - T \cdot \frac{\beta^T}{1-\beta^T} - k \right)^2 = \sum_{k=0}^{T-1} \beta^k \cdot \left(\frac{\beta}{1-\beta} - T \cdot \frac{\beta^T}{1-\beta^T} - k \right) \cdot x_{T-k}$$

es decir:

$$\hat{a}' \cdot \frac{1 - \beta^T}{1 - \beta} = \frac{1 - \beta}{1 - \beta} \cdot \sum \beta^k \cdot x_{T-k} = \frac{1}{1 - \beta} \cdot SS_T$$

$$\hat{b}' \cdot \left(\frac{\beta}{1 - \beta} \cdot (1 - \beta^T) - \frac{\beta^T}{1 - \beta^T} \cdot T \cdot (1 - \beta) \right) = \left[1 - \frac{\beta^T}{1 - \beta^T} \cdot T \cdot (1 - \beta) \right] \cdot SS_T - SS2_T$$

donde hemos llamado:

$$SS_T = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{T-1} \beta^k \cdot x_{T-k} = \alpha \cdot x_T + \beta \cdot SS_{T-1} \quad \text{con } SS_0 = 0$$

$$SS2_T = \alpha^2 \cdot \sum_{k=0}^{T-1} (k+1) \cdot \beta^k \cdot x_{T-k} = \alpha \cdot SS_T + \beta \cdot SS2_{T-1} \quad \text{con } SS2_0 = 0$$

dado que no son propiamente unas medias alisadas (la primera debería dividirse por $(1-\beta^T)$ y la segunda por $(1-\beta^T) - T \cdot (1-\beta) \cdot \beta^T$ para ello). Por tanto:

$$\hat{x}_T = \hat{a}' + \hat{b}' \cdot \left(\frac{\beta}{1 - \beta} - \frac{\beta^T}{1 - \beta^T} \cdot T \right)$$

La consecuencia inmediata es la de que deben revisarse las fórmulas utilizadas para la realización de las estimaciones (FÓRMULAS 2). Las nuevas expresiones tienen el mismo formato pero, en lugar de los sencillos coeficientes (uno y dos) del caso límite, deberemos emplear otros que sean función del número T de observaciones y del valor de α . La nueva versión de las FÓRMULAS 2 es:

$$\hat{b}(T) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot [B(T, \alpha) \cdot SS_T - C(T, \alpha) \cdot SS2_T]$$

$$\hat{x}(T) = D(T, \alpha) \cdot SS_T - E(T, \alpha) \cdot SS2_T$$

donde $B(T, \alpha)$, $C(T, \alpha)$, $D(T, \alpha)$ y $E(T, \alpha)$ son los coeficientes citados. Al crecer T , independientemente del valor de α empleado, el tercer coeficiente tiende a 2, y el resto a 1. La justificación de las expresiones anteriores y la deducción de las correspondientes a los coeficientes queda fuera de los límites del presente texto. En las *figuras 2.1.4.15*, *2.1.4.16*, *2.1.4.17* y *2.1.4.18* hemos reproducido los valores de algunos de dichos coeficientes.

En el caso de la serie temporal ST07, tenemos:

$$\text{con } \alpha = 0,1 \quad \hat{b}(12) = \frac{1}{9} \times [6,0085 \times 76,44 - 11,3863 \times 39,26] = 1,36$$

$$\hat{x}_{12} = 4,2489 \times 76,44 - 5,4109 \times 39,26 = 112,38$$

$$\text{con } \alpha = 0,2 \quad \hat{b}(12) = \frac{1}{4} \times [2,0573 \times 100,64 - 2,5001 \times 80,73] = 1,30$$

$$\hat{x}_{12} = 2,6757 \times 100,64 - 1,9466 \times 80,73 = 112,15$$

Ambos resultados son coherentes entre sí, pero algo distintos de los hallados anteriormente a causa de que en aquéllos se tenía en cuenta una estimación subjetiva inicial *que todavía ejerce influencia detectable después de 12 actualizaciones*, cuando α es igual a 0,1 o a 0,2, mientras que los últimos tienen en cuenta *exclusivamente* las observaciones de la serie temporal. La diferencia es inapreciable si $\alpha = 0,3$ (véase la *figura 2.1.4.19*), pues en este caso el efecto de la estimación inicial se ha amortiguado casi totalmente, aunque todavía debemos utilizar los coeficientes $B(12;0,3)$, $C(12;0,3)$, $D(12;0,3)$ y $E(12;0,3)$, ya que con 12 observaciones la desviación de las expresiones del caso límite podría ser considerable (especialmente en la estimación de b , como puede comprobar fácilmente el lector).

2.1.4.3 Proceso polinomial

El alisado exponencial puede utilizarse para estimar los coeficientes en modelos polinomiales de grado superior a uno, por ejemplo:

$$x_t = a + b \cdot t + \frac{1}{2} \cdot c \cdot t^2 + \theta_t$$

con las consabidas hipótesis sobre θ_t . Debemos utilizar las tres primeras sumas alisadas exponencialmente calculadas al final del periodo T (FÓRMULAS 1 de la *figura 2.1.4.20*). Para estimar los valores de los coeficientes del modelo (referidos al punto T como origen) y la proyección, suponiendo un número infinito de observaciones, usaremos las FÓRMULAS 2. La inicialización podrá realizarse mediante las FÓRMULAS 2A, disponiendo de una estimación inicial de los parámetros $\hat{a}(0)$, $\hat{b}(0)$ y $\hat{c}(0)$. Téngase presente que en dichas fórmulas los valores $\hat{a}(T)$, $\hat{b}(T)$ y $\hat{c}(T)$ corresponden a la parábola de 2º grado con el origen de coordenadas en el punto T , lo que explica la forma de \hat{x}_{T+h} .

B(T,α)					
T	α=0,10	α=0,15	α=0,20	α=0,25	α=0,30
2	279,9268	120,0056	64,9991	40,0000	26,6667
3	96,6643	42,2324	23,3470	14,6849	10,0233
4	50,0593	22,2901	12,5751	8,0833	5,6482
5	31,1051	14,1151	8,1256	5,3375	3,8176
6	21,4731	9,9300	5,8326	3,9148	2,8658
7	15,8814	7,4838	4,4848	3,0755	2,3039
8	12,3323	5,9215	3,6203	2,5363	1,9436
9	9,9303	4,8583	3,0301	2,1683	1,6991
10	8,2251	4,0995	2,6081	1,9059	1,5264
11	6,9655	3,5375	2,2955	1,7125	1,4007
12	6,0085	3,1088	2,0573	1,5664	1,3073
13	5,2624	2,7738	1,8717	1,4536	1,2367
14	4,6686	2,5068	1,7245	1,3654	1,1829
15	4,1877	2,2904	1,6060	1,2955	1,1415
16	3,7922	2,1126	1,5094	1,2397	1,1094
17	3,4629	1,9647	1,4298	1,1947	1,0846
18	3,1854	1,8405	1,3638	1,1583	1,0653
19	2,9493	1,7352	1,3087	1,1288	1,0503
20	2,7467	1,6452	1,2624	1,1047	1,0387
21	2,5714	1,5679	1,2233	1,0851	1,0297
22	2,4187	1,5010	1,1902	1,0691	1,0227
23	2,2849	1,4429	1,1621	1,0561	1,0173
24	2,1669	1,3922	1,1381	1,0454	1,0132
25	2,0624	1,3477	1,1177	1,0367	1,0100
26	1,9694	1,3087	1,1003	1,0297	1,0076
27	1,8863	1,2743	1,0854	1,0239	1,0057
28	1,8118	1,2438	1,0727	1,0192	1,0043
29	1,7447	1,2169	1,0619	1,0155	1,0032
30	1,6841	1,1931	1,0526	1,0124	1,0024
31	1,6292	1,1719	1,0446	1,0099	1,0018
32	1,5794	1,1530	1,0379	1,0079	1,0014
33	1,5341	1,1362	1,0321	1,0063	1,0010
34	1,4928	1,1213	1,0272	1,0050	1,0008
35	1,4550	1,1080	1,0230	1,0040	1,0006
36	1,4205	1,0961	1,0194	1,0032	1,0004
37	1,3888	1,0855	1,0164	1,0025	1,0003
38	1,3597	1,0760	1,0138	1,0020	1,0002
39	1,3329	1,0676	1,0117	1,0016	1,0002
40	1,3083	1,0601	1,0098	1,0013	1,0001
41	1,2855	1,0534	1,0082	1,0010	1,0001
42	1,2646	1,0474	1,0069	1,0008	1,0001
43	1,2452	1,0421	1,0058	1,0006	1,0000
44	1,2274	1,0374	1,0049	1,0005	1,0000
45	1,2108	1,0331	1,0041	1,0004	1,0000
46	1,1955	1,0294	1,0034	1,0003	1,0000
47	1,1813	1,0260	1,0029	1,0002	1,0000
48	1,1682	1,0230	1,0024	1,0002	1,0000
49	1,1560	1,0204	1,0020	1,0001	1,0000
50	1,1447	1,0180	1,0017	1,0001	1,0000

Fig. 2.1.4.15 Valores del coeficiente B(T,α)

C(T,α)					
T	α=0,10	α=0,15	α=0,20	α=0,25	α=0,30
2	1899,5000	548,1738	224,9967	112,0000	62,9632
3	500,8788	148,8003	63,0162	32,4383	18,9071
4	211,3355	64,6551	28,2594	15,0487	9,0975
5	111,4762	35,1302	15,8513	8,7345	5,4775
6	67,2131	21,8228	10,1672	5,7977	3,7708
7	44,3315	14,8320	7,1359	4,2107	2,8389
8	31,1940	10,7558	5,3440	3,2621	2,2780
9	23,0506	8,1919	4,2029	2,6529	1,9167
10	17,6992	6,4835	3,4344	2,2401	1,6722
11	14,0166	5,2925	2,8937	1,9489	1,5006
12	11,3863	4,4316	2,5001	1,7368	1,3768
13	9,4488	3,7903	2,2053	1,5785	1,2858
14	7,9843	3,3007	1,9795	1,4580	1,2178
15	6,8528	2,9191	1,8032	1,3649	1,1665
16	5,9618	2,6162	1,6635	1,2920	1,1275
17	5,2488	2,3722	1,5513	1,2344	1,0977
18	4,6698	2,1731	1,4603	1,1887	1,0748
19	4,1938	2,0087	1,3857	1,1520	1,0572
20	3,7980	1,8716	1,3242	1,1226	1,0437
21	3,4655	1,7564	1,2731	1,0989	1,0333
22	3,1838	1,6587	1,2304	1,0798	1,0254
23	2,9432	1,5754	1,1947	1,0643	1,0193
24	2,7361	1,5040	1,1646	1,0518	1,0146
25	2,5568	1,4424	1,1393	1,0416	1,0110
26	2,4006	1,3890	1,1179	1,0335	1,0083
27	2,2637	1,3427	1,0998	1,0269	1,0063
28	2,1432	1,3022	1,0845	1,0215	1,0047
29	2,0366	1,2668	1,0715	1,0172	1,0035
30	1,9420	1,2358	1,0605	1,0138	1,0026
31	1,8577	1,2085	1,0511	1,0110	1,0020
32	1,7822	1,1845	1,0432	1,0087	1,0015
33	1,7145	1,1633	1,0364	1,0070	1,0011
34	1,6536	1,1446	1,0307	1,0055	1,0008
35	1,5987	1,1281	1,0259	1,0044	1,0006
36	1,5490	1,1135	1,0218	1,0035	1,0004
37	1,5039	1,1005	1,0184	1,0028	1,0003
38	1,4630	1,0890	1,0154	1,0022	1,0002
39	1,4257	1,0788	1,0130	1,0017	1,0002
40	1,3918	1,0698	1,0109	1,0014	1,0001
41	1,3608	1,0618	1,0091	1,0011	1,0001
42	1,3324	1,0547	1,0076	1,0008	1,0001
43	1,3064	1,0484	1,0064	1,0007	1,0001
44	1,2826	1,0428	1,0054	1,0005	1,0000
45	1,2608	1,0378	1,0045	1,0004	1,0000
46	1,2407	1,0334	1,0037	1,0003	1,0000
47	1,2222	1,0295	1,0031	1,0002	1,0000
48	1,2052	1,0260	1,0026	1,0002	1,0000
49	1,1896	1,0230	1,0022	1,0002	1,0000
50	1,1752	1,0203	1,0018	1,0001	1,0000

Fig. 2.1.4.16 Valores del coeficiente C(T,α)

D(T, α)					
T	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,15$	$\alpha = 0,20$	$\alpha = 0,25$	$\alpha = 0,30$
2	19,9962	13,3338	10,0000	8,0000	6,6667
3	13,6775	9,2403	7,0248	5,6986	4,8174
4	10,520	7,1992	5,5447	4,5576	3,9048
5	8,6294	5,9789	4,6626	3,8808	3,3669
6	7,3707	5,1690	4,0796	3,4361	3,0165
7	6,4737	4,5936	3,6675	3,1241	2,7733
8	5,8027	4,1649	3,3622	2,8951	2,5971
9	5,2824	3,8338	3,1282	2,7214	2,4656
10	4,8676	3,5712	2,9441	2,5865	2,3653
11	4,5294	3,3584	2,7963	2,4797	2,2877
12	4,2489	3,1829	2,6757	2,3941	2,2269
13	4,0126	3,0361	2,5760	2,3247	2,1791
14	3,8110	2,9119	2,4928	2,2680	2,1413
15	3,6374	2,8058	2,4228	2,2213	2,1112
16	3,4863	2,7144	2,3635	2,1829	2,0874
17	3,3538	2,6350	2,3129	2,1510	2,0685
18	3,2369	2,5658	2,2696	2,1246	2,0535
19	3,1330	2,5050	2,2324	2,1027	2,0417
20	3,0403	2,4514	2,2004	2,0845	2,0324
21	2,9571	2,4040	2,1728	2,0694	2,0251
22	2,8821	2,3619	2,1490	2,0569	2,0193
23	2,8143	2,3245	2,1283	2,0466	2,0149
24	2,7527	2,2911	2,1105	2,0380	2,0114
25	2,6967	2,2612	2,0950	2,0310	2,0087
26	2,6455	2,2344	2,0817	2,0252	2,0066
27	2,5987	2,2104	2,0701	2,0204	2,0050
28	2,5587	2,1889	2,0601	2,0165	2,0038
29	2,5162	2,1696	2,0515	2,0134	2,0029
30	2,4799	2,1522	2,0440	2,0108	2,0022
31	2,4463	2,1365	2,0376	2,0087	2,0016
32	2,4153	2,1225	2,0321	2,0070	2,0012
33	2,3866	2,1098	2,0273	2,0056	2,0009
34	2,3601	2,0984	2,0233	2,0045	2,0007
35	2,3354	2,0881	2,0198	2,0036	2,0005
36	2,3126	2,0789	2,0168	2,0028	2,0004
37	2,2913	2,0706	2,0142	2,0023	2,0003
38	2,2715	2,0631	2,0120	2,0018	2,0002
39	2,2532	2,0564	2,0102	2,0014	2,0002
40	2,2360	2,0504	2,0086	2,0011	2,0001
41	2,2201	2,0449	2,0073	2,0009	2,0001
42	2,2052	2,0401	2,0061	2,0007	2,0001
43	2,1913	2,0357	2,0051	2,0006	2,0000
44	2,1784	2,0318	2,0043	2,0004	2,0000
45	2,1663	2,0283	2,0036	2,0003	2,0000
46	2,1550	2,0252	2,0030	2,0003	2,0000
47	2,1445	2,0224	2,0026	2,0002	2,0000
48	2,1347	2,0199	2,0021	2,0002	2,0000
49	2,1255	2,0176	2,0018	2,0001	2,0000
50	2,1170	2,0157	2,0015	2,0001	2,0000

Figura 2.1.4.17 Valores del coeficiente D(T, α)

E(T,α)					
T	α=0,10	α=0,15	α=0,20	α=0,25	α=0,30
2	99,9742	44,4465	25,0000	16,0000	11,1111
3	51,7515	23,4263	13,4297	8,7671	6,2160
4	32,1398	14,8139	8,6540	5,7615	4,1699
5	22,1450	10,4065	6,1942	4,2051	3,1062
6	16,3909	7,8313	4,7489	3,2871	2,4779
7	12,7202	6,1870	3,8220	2,6972	2,0746
8	10,2365	5,0683	3,1893	2,2943	1,8002
9	8,4725	4,2700	2,7369	2,0068	1,6059
10	7,1713	3,6788	2,4016	1,7945	1,4639
11	6,1820	3,2278	2,1459	1,6338	1,3579
12	5,4109	2,8753	1,9466	1,5095	1,2775
13	4,7972	2,5944	1,7883	1,4120	1,2157
14	4,3002	2,3667	1,6608	1,3346	1,1679
15	3,8915	2,1795	1,5566	1,2724	1,1307
16	3,5512	2,0237	1,4708	1,2222	1,1017
17	3,2644	1,8928	1,3995	1,1815	1,0790
18	3,0204	1,7818	1,3397	1,1482	1,0613
19	2,8110	1,6869	1,2895	1,1211	1,0474
20	2,6299	1,6053	1,2469	1,0988	1,0366
21	2,4720	1,5346	1,2108	1,0806	1,0281
22	2,3337	1,4732	1,1801	1,0656	1,0216
23	2,2117	1,4195	1,1539	1,0533	1,0165
24	2,1037	1,3724	1,1315	1,0433	1,0126
25	2,0075	1,3310	1,1123	1,0351	1,0096
26	1,9215	1,2945	1,0959	1,0284	1,0073
27	1,8444	1,2622	1,0818	1,0229	1,0055
28	1,7750	1,2335	1,0698	1,0185	1,0042
29	1,7122	1,2081	1,0594	1,0149	1,0031
30	1,6554	1,1855	1,0506	1,0120	1,0023
31	1,6039	1,1654	1,0430	1,0096	1,0018
32	1,5569	1,1474	1,0366	1,0077	1,0013
33	1,5141	1,1314	1,0310	1,0061	1,0010
34	1,4749	1,1172	1,0263	1,0049	1,0007
35	1,4391	1,1044	1,0223	1,0039	1,0005
36	1,4062	1,0930	1,0188	1,0031	1,0004
37	1,3760	1,0829	1,0159	1,0025	1,0003
38	1,3482	1,0738	1,0134	1,0019	1,0002
39	1,3226	1,0657	1,0113	1,0015	1,0002
40	1,2990	1,0584	1,0095	1,0012	1,0001
41	1,2772	1,0519	1,0080	1,0010	1,0001
42	1,2571	1,0462	1,0067	1,0008	1,0001
43	1,2384	1,0410	1,0057	1,0006	1,0000
44	1,2212	1,0364	1,0048	1,0005	1,0000
45	1,2053	1,0323	1,0040	1,0004	1,0000
46	1,1905	1,0286	1,0033	1,0003	1,0000
47	1,1768	1,0254	1,0028	1,0002	1,0000
48	1,1641	1,0225	1,0023	1,0002	1,0000
49	1,1523	1,0199	1,0019	1,0001	1,0000
50	1,1413	1,0176	1,0016	1,0001	1,0000

Figura 2.1.4.18 Valores del coeficiente E(T,α)

Mes		$\alpha=0,3$				
		Sin valores iniciales		Con valores iniciales		
T	x_T	S_T	$S2_T$	S_T	$S2_T$	
0		0	0	92,67	90,33	
1	98	29,4	8,82	94,27	91,51	
2	94	48,78	20,81	94,19	92,32	sin valores iniciales
3	99	63,85	33,72	95,63	93,31	(coef. caso finito)
4	104	75,89	46,37	98,14	94,76	$\hat{b}(12) = 1,31$
5	108	85,52	58,12	101,10	96,66	$\hat{x}_{12} = 112,12$
6	100	89,87	67,64	100,77	97,89	
7	106	94,71	75,76	102,34	99,23	
8	104	97,49	82,28	102,84	100,31	Con valores iniciales
9	118	103,65	88,70	107,39	102,43	
10	109	105,25	93,67	107,87	104,07	$\hat{b}(12) = 1,32$
11	102	104,28	96,85	106,11	104,68	$\hat{x}_{12} = 112,16$
12	116	107,79	100,13	109,08	106,00	

Figura 2.1.4.19 Aplicación de las expresiones recurrentes para el cálculo de S_T y $S2_T$ en la serie ST07, sin y con estimaciones de los valores iniciales y el cálculo de los parámetros del modelo lineal para $\alpha = 0,3$ (la diferencia es inapreciable, dado que para el valor de α utilizado, el efecto de los valores iniciales se ha amortiguado totalmente después de 12 actualizaciones).

El resultado puede generalizarse al caso de tendencia polinomial de grado n :

$$x_t = P(T) + \theta_t = a_0 + a_1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot a_n \cdot t^n + \theta_t$$

Usaremos las sumas (o estadísticos) alisados exponencialmente con una nueva notación por comodidad:

FÓRMULAS 1

$$S_T = \alpha \cdot x_T + (1 - \alpha) \cdot S_{T-1}$$

$$S2_T = \alpha \cdot S_T + (1 - \alpha) \cdot S2_{T-1}$$

$$S3_T = \alpha \cdot S2_T + (1 - \alpha) \cdot S3_{T-1}$$

FÓRMULAS 2

$$\hat{a}(T) = 3 \cdot S_T - 3 \cdot S2_T + S3_T$$

$$\hat{b}(T) = \frac{\alpha}{2 \cdot \beta^2} \cdot [(6 - 5 \cdot \alpha) \cdot S_T - 2 \cdot (5 - 4 \cdot \alpha) \cdot S2_T + (4 - 3 \cdot \alpha) \cdot S3_T]$$

$$\hat{c}(T) = \frac{\alpha^2}{\beta} \cdot [S_T - 2 \cdot S2_T + S3_T]$$

$$\hat{x}_{T+h} = \hat{a}(T) + \hat{b}(T) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \hat{c}(T) \cdot h^2$$

FÓRMULAS 2A

$$S_T = \hat{a}(T) - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \hat{b}(T) + \frac{\beta \cdot (2 - \alpha)}{2 \cdot \alpha^2} \cdot \hat{c}(T)$$

$$S2_T = \hat{a}(T) - \frac{2 \cdot \beta}{\alpha} \cdot \hat{b}(T) + \frac{2 \cdot \beta \cdot (3 - 2 \cdot \alpha)}{2 \cdot \alpha^2} \cdot \hat{c}(T)$$

$$S3_T = \hat{a}(T) - \frac{3 \cdot \beta}{\alpha} \cdot \hat{b}(T) + \frac{3 \cdot \beta \cdot (4 - 3 \cdot \alpha)}{2 \cdot \alpha^2} \cdot \hat{c}(T)$$

Figura 2.1.4.20 Fórmulas para la aplicación de las medias alisadas exponencialmente en el modelo cuadrático (alisado exponencial triple)

$$S_T^{[k]} = \alpha \cdot S_T^{[k-1]} + (1 - \alpha) \cdot S_{T-1}^{[k]}$$

con:

$$S_T^{[0]} = x_T$$

y

$$S_T^{[1]} = S_T = \alpha \cdot x_T + (1 - \alpha) \cdot S_{T-1}$$

Notemos que las derivadas parciales del proceso sin ruido $P(t)$ son:

$$\begin{aligned} P^{[k]}(t) &= \frac{\delta^k P(t)}{\delta t^k} = \sum_{j=k}^n \frac{a_j}{(j-k)!} \cdot t^{j-k} & k = 1, 2, \dots, n \\ &= 0 & k > n \end{aligned}$$

Por consiguiente podemos obtener a_k evaluando $P^{[k]}(t)$ en $t=0$, de donde:

$$E[x_t] = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \cdot P^{[k]}(0)$$

o bien utilizando otro origen cualquiera:

$$E[x_{t+h}] = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} \cdot P^{[k]}(t)$$

R.G. Brown ha demostrado que:

$$S_t^{[r]} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{P^{[k]}(t)}{k!} \cdot \frac{\alpha^r}{(r-1)!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} j^k \cdot \beta^j \cdot \frac{(r-1+j)!}{j!}$$

para $r = 1, 2, 3, \dots, n+1$

lo que relaciona los estadísticos alisados exponencialmente y las derivadas de un proceso polinomial sin ruido. La expresión anterior puede escribirse:

$$S_t = M \cdot a$$

donde:

$$S_t' = [S_t, S_t^{[2]}, \dots, S_t^{[r]}]$$

$$a' = [a_0(t), a_1(1), \dots, a_n(t)]$$

M es una matriz $(n+1, r)$ cuyos elementos son series dependientes de la constante de alisado:

$$M_{i,j} = (-1)^k \cdot \frac{\alpha^i}{(j-1)!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} j^k \cdot \beta^j \cdot \frac{(i-1+j)!}{j!}$$

que pueden escribirse siempre en forma reducida. Para despejar a necesitamos que la matriz sea regular, y por tanto inicialmente que $r = n+1$. Es este caso:

$$a = M^{-1} \cdot S_t$$

que expresa los coeficientes del modelo como funciones de los $n+1$ primeros estadísticos alisados exponencialmente. Cuando el proceso incluye ruido parece razonable estimar los coeficientes mediante la misma relación. La proyección para el valor en $T+h$ realizada en T será:

$$\hat{x}_{T+h} = \hat{a}_0(T) + \hat{a}_1(T) \cdot h + \hat{a}_2 \cdot \frac{h^2}{2} + \dots + \hat{a}_n \cdot \frac{h^n}{n!}$$

Como ejemplo vamos a desarrollar el caso del alisado triple (polinomio de segundo grado):

$$S_t = \begin{bmatrix} S_t \\ S2_t \\ S3_t \end{bmatrix} \quad \hat{a}(t) = \begin{bmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{b}(t) \\ \hat{c}(t) \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\beta}{\alpha} & \frac{\beta \cdot (2 - \alpha)}{2 \cdot \alpha^2} \\ 1 & -\frac{2 \cdot \beta}{\alpha} & \frac{2 \cdot \beta \cdot (3 - 2 \cdot \alpha)}{2 \cdot \alpha^2} \\ 1 & -\frac{3 \cdot \beta}{\alpha} & \frac{3 \cdot \beta \cdot (4 - 3 \cdot \alpha)}{2 \cdot \alpha^2} \end{bmatrix}$$

Puede comprobarse que $S_t = M \cdot \hat{a}$ es idéntico a las FÓRMULAS 2A, de donde $\hat{a} = M^{-1} \cdot S_t$ con

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ \frac{\alpha \cdot (6 - 5 \cdot \alpha)}{2 \cdot \beta^2} & - \frac{2 \cdot \alpha \cdot (5 - 4 \cdot \alpha)}{2 \cdot \beta^2} & \frac{\alpha \cdot (4 - 3 \cdot \alpha)}{2 \cdot \beta^2} \\ \frac{\alpha^2}{\beta} & \frac{\alpha^2}{\beta} & \frac{\alpha^2}{\beta} \end{bmatrix}$$

es idéntico a las FÓRMULAS 2.

2.1.4.4 Utilización práctica del alisado exponencial

En vista de todo lo anterior podemos concluir que el alisado exponencial raramente, por no decir nunca, se podrá utilizar en forma totalmente autónoma. Se precisará como mínimo una estimación inicial. Como habitualmente dicha estimación se basará en datos históricos, un procedimiento que implique la utilización del alisado exponencial constará en dos fases distintas:

Fase 1.1: A partir de las observaciones disponibles se determinarán los parámetros del modelo de previsión por un procedimiento específico, por ejemplo utilizando la regresión lineal.

Fase 1.2: Se elige arbitrariamente α , y se determinan las medias alisadas iniciales (FÓRMULAS 2A).

Fase 2: A medida que se dispone de nuevas observaciones se actualizan las medias alisadas (FÓRMULAS 1) y, en su caso, las estimaciones de los valores futuros (FÓRMULAS 2).

Podemos adoptar como norma que el alisado exponencial es un procedimiento útil para la actualización de los parámetros de la previsión cuando aumenta la información disponible con nuevas observaciones pero que no constituye un procedimiento cómodo para establecer previsiones directamente a partir de la serie temporal de las previsiones en bruto.

Las ventajas del alisado exponencial para la actualización de los parámetros son patentes

1) *En cuanto al procedimiento*: las operaciones que se deben realizar para dicha actualización son extraordinariamente sencillas y pocas en número (en este punto el alisado exponencial supera a los sistemas basados directamente en la regresión lineal),

2) *En cuanto a la capacidad de almacenamiento:* el número de datos a guardar de una actualización a la siguiente es muy reducido, en el caso del modelo lineal son únicamente tres valores α , $S(T)$ y $S2(T)$ (en este punto el alisado exponencial supera a los sistemas basados en las medias móviles, que obligan a conservar las N últimas observaciones por lo menos).

2.1.4.5 Modelos con varios coeficientes de alisado

Vamos a proceder a un cambio en la notación utilizada hasta el momento, cambio que será ya habitual cada vez que utilicemos el alisado exponencial: denominaremos, en el modelo lineal a a la ordenada de la recta de tendencia definida al final de la serie, es decir, al instante correspondiente a la observación más moderna T ; $\hat{a}(T)$ equivaldrá a lo que antes llamábamos \hat{x}_T .

Consecuentemente, las FÓRMULAS 1 y las FÓRMULAS 2 quedan de la siguiente forma:

FÓRMULAS 1	FÓRMULAS 2
$S_T = \alpha \cdot x_T + (1 - \alpha) \cdot S_{T-1}$	$\hat{a}(T) = 2 \cdot S_T - S2_T$
$S2_T = \alpha \cdot S_T + (1 - \alpha) \cdot S2_{T-1}$	$\hat{b}(T) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot [S_T - S2_T]$

si eliminamos toda referencia a las medias alisadas obtendremos (*fig. 2.1.4.21*) una nueva formulación, equivalente a la anterior.

FÓRMULAS 1 + 2

$$\hat{a}(T) = \alpha \cdot (2 - \alpha) \cdot x_T + (1 - \alpha)^2 \cdot [\hat{a}(T-1) + \hat{b}(T-1)]$$

$$\hat{b}(T) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot [\hat{a}(T) - \hat{a}(T-1)] + \frac{2 \cdot (1 - \alpha)}{2 - \alpha} \cdot \hat{b}(T-1)$$

$$\hat{x}_{T+h} = \hat{a}(T) + h \cdot \hat{b}(T)$$

Figura 2.1.4.21 Fórmulas compactas de alisado exponencial correspondientes al modelo lineal. Estas nuevas expresiones equivalen a las fórmulas 1 y fórmulas 2 conjuntamente. Los resultados obtenidos aplicándolas serán los mismos que utilizando aquéllas

t	x _t	$\alpha = 0,1$ $\alpha \cdot (2 - \alpha) = 0,19$ $\frac{\alpha}{2 - \alpha} = \frac{1}{19}$			$\alpha = 0,2$ $\alpha \cdot (2 - \alpha) = 0,36$ $\frac{\alpha}{2 - \alpha} = \frac{1}{9}$		
		$\hat{a}(t)$	$\hat{b}(t)$	\hat{x}_{t+1}	$\hat{a}(t)$	$\hat{b}(t)$	\hat{x}_{t+1}
0		95	1	96	95	1	96
1	98	96,38	1,02	97,40	96,72	1,08	97,80
2	94	96,75	0,99	97,74	96,43	0,93	97,36
3	99	97,98	1,00	98,98	97,95	0,99	98,94
4	104	99,93	1,05	100,98	100,76	1,20	101,96
5	108	102,31	1,12	103,43	104,13	1,44	105,57
6	100	102,78	1,08	103,87	103,57	1,21	104,78
7	106	104,27	1,11	105,38	105,22	1,26	106,48
8	104	105,12	1,09	106,21	105,54	1,16	106,75
9	118	108,45	1,21	109,66	110,80	1,61	112,42
10	109	109,53	1,20	110,74	111,19	1,47	112,66
11	102	109,08	1,17	110,19	108,82	1,05	109,88
12	116	111,30	1,17	112,47	112,08	1,30	113,38

Fig. 2.1.4.22 Determinación de los parámetros del modelo lineal correspondientes a la serie ST07 mediante las Fórmulas 1+2 para los valores $\alpha = 0,1$ y $\alpha = 0,2$

α	$(1 - \alpha)$	$\alpha \cdot (2 - \alpha)$	$(1 - \alpha)^2$	$\frac{\alpha}{2 - \alpha}$	$\frac{2 \cdot (1 - \alpha)}{2 - \alpha}$
0,01	0,99	0,0199	0,9801	0,005025	0,994975
0,05	0,95	0,0975	0,9025	0,025641	0,974359
0,10	0,90	0,1900	0,8100	0,052632	0,947368
0,15	0,85	0,2775	0,7225	0,081082	0,918918
0,20	0,80	0,3600	0,6400	0,111111	0,888889
0,25	0,75	0,4375	0,5625	0,142857	0,857143
0,30	0,70	0,5100	0,4900	0,176471	0,823529

Fig. 2.1.4.23 Relación entre los coeficientes de alisado de las fórmulas 1 y los utilizados en las Fórmulas 1+2

Observemos que:

$$\alpha \cdot (2 - \alpha) + (1 - \alpha)^2 = 1$$

$$\frac{\alpha}{2 - \alpha} + \frac{2 \cdot (1 - \alpha)}{2 - \alpha} = 1$$

por tanto las dos primeras expresiones de las FÓRMULAS 1 + 2 tienen el aspecto de cálculo de medias ponderadas. Además:

$$\hat{a}(T-1) + \hat{b}(T-1) = \hat{x}_{(T-1)+1}$$

es la estimación de x_T efectuada con los datos disponibles en $T-1$, por tanto la primera expresión tiene el formato:

$$\text{nueva estimación} = \text{vieja estimación} + \text{parte del error}$$

y puede asimilarse a una media alisada exponencialmente. Por su parte:

$$\hat{a}(T) - \hat{a}(T-1)$$

es el crecimiento aparente desde $(T-1)$ hasta T de los valores de la ordenada de la recta, por tanto es el valor "real" de la pendiente; la segunda expresión adquiere así también el formato de media alisada. Los razonamientos anteriores permiten justificar intuitivamente, en cierta forma, las expresiones anteriores, o las más generales de la *figura 2.1.4.24*.

En su aplicación no estamos limitados a las relaciones de valores de la *figura 2.1.4.23*, que identifican este tratamiento con alguno de los vistos anteriormente. Debemos resaltar que en estas fórmulas hemos independizado el significado de α del de β . Cuando existen varios coeficientes de alisado los valores de α y β son independientes entre sí, y por tanto no se cumple en general $\alpha + \beta = 1$ (habitualmente $\alpha + \beta < 0,7$).

FÓRMULAS $\alpha + \beta$ (con dos coeficientes de alisado)

$$\hat{a}(T) = \alpha \cdot x_T + (1 - \alpha) \cdot [\hat{a}(T-1) + \hat{b}(T-1)]$$

$$\hat{b}(T) = \beta \cdot [\hat{a}(T) - \hat{a}(T-1)] + (1 - \beta) \cdot \hat{b}(T-1)$$

$$\hat{x}_{T+h} = \hat{a}(T) + h \cdot \hat{b}(T)$$

Fig. 2.1.4.24 Fórmulas de alisado exponencial correspondientes al modelo lineal con dos parámetros de alisado (procedimiento de HOLT)

Habitualmente tomaremos:

$$0 < \beta < \alpha < 1$$

t	x_t	$\alpha = 0,2$ $\beta = 0,1$			$\alpha = 0,4$ $\beta = 0,1$		
		$\hat{a}(t)$	$\hat{b}(t)$	\hat{x}_{t+1}	$\hat{a}(t)$	$\hat{b}(t)$	\hat{x}_{t+1}
0		95	1	96	95	1	96
1	98	96,4	1,04	97,44	96,80	1,08	97,88
2	94	96,75	0,97	97,72	96,33	0,92	97,25
3	99	97,98	1,00	98,98	97,95	0,99	98,95
4	104	99,98	1,10	101,08	100,97	1,20	102,16
5	108	102,46	1,24	103,70	104,50	1,43	105,93
6	100	102,96	1,16	104,12	103,56	1,19	104,75
7	106	104,50	1,20	105,70	105,25	1,24	106,49
8	104	105,36	1,17	106,52	105,50	1,14	106,64
9	118	108,82	1,40	110,21	111,18	1,60	112,78
10	109	109,97	1,37	111,34	111,27	1,45	112,72
11	102	109,47	1,18	110,66	108,43	1,02	109,45
12	116	111,73	1,29	113,02	112,07	1,28	113,35

Fig. 2.1.4.25 Determinación de los parámetros del modelo lineal correspondientes a la serie ST07 mediante las Fórmulas $\alpha + \beta$ para dos pares de valores (0,2 - 0,1) y (0,4 - 0,1)

2.1.4.5 Control del modelo (*Tracking signal*)

Sea cual sea el sistema de previsión a corto plazo utilizado, pueden darse situaciones en las que las proyecciones obtenidas estén desviadas en cuantía importante a causa de la utilización de parámetros inapropiados (o incluso de modelos inapropiados). Si las proyecciones se efectúan mediante un procedimiento automatizado, sería ideal poder detectar rápidamente, también en forma automática, este tipo de situaciones, a fin de minimizar las consecuencias de las desviaciones transfiriendo el control del procedimiento de proyección al modo manual para efectuar las correcciones pertinentes, e incluso, en ocasiones, introducir automáticamente correcciones en el mismo (fig. 2.1.4.29).

No disponemos de sistemas de control que posean un amplio espectro de aplicación, y vamos a centrarnos en la utilización del ajuste exponencial *con un solo parámetro de alisado*. Todo método de proyección de la tendencia dará lugar a errores sistemáticos, independientemente del método utilizado, cuando se produzcan cambios en la misma (en el modelo constante modificación de la ordenada, en el caso lineal modificación de la ordenada y/o de la pendiente).

El procedimiento de alisado exponencial está diseñado para hacer frente a tales situaciones,

pero la respuesta obtenida ante una modificación, según cuál sea el valor de α adoptado, puede ser demasiado lenta. Centrémonos en el modelo constante, con $\alpha = 0,2$, un salto brusco del fenómeno de 100 a 200 (aunque una modificación del 100% sea, afortunadamente, poco frecuente) conduciría a una media alisada en el primer período después del cambio del orden de 120, en el segundo de 136 y en el tercero de 149. Serían necesarios 8 periodos (tal vez ocho meses) para que la desviación respecto al nuevo valor 200 fuese inferior al 10%. Este retraso podría reducirse utilizando valores mayores de α , pero entonces la influencia de las perturbaciones en la proyección podría ser muy importante, con lo que aumentaría la inestabilidad. Convendría, en todo caso, utilizar un valor de α superior durante unos pocos períodos para asumir el efecto de la modificación, regresando al valor que conduce a proyecciones estables cuando se ha alcanzado este resultado.

Precisamos un método objetivo de control que utilice reglas numéricas para detectar los cambios de la tendencia susceptibles de causar dificultades en la gestión con destino a la cual realizamos las proyecciones. Veremos a continuación algunas ideas muy limitadas en cuanto a su extensión, pero que muestran el camino a seguir.

El error de proyección (o residuo):

$$e_t = x_t - \hat{x}_t$$

convenientemente analizado puede revelar características importantes a la vez del sistema de proyección y de la serie temporal. Su examen puede permitir detectar si proviene de un modelo estable (modelo acertado y sistema adecuado): el valor medio de los errores será cercano a cero y su variancia dependerá de la del ruido existente en la serie.

$$V[e_t] = V[x_t] + V[\hat{x}_t]$$

y suponiendo independencia entre x_t y \hat{x}_t ,

$$\sigma_e^2 = \sigma_\theta^2 + \sigma_x^2$$

Para el modelo constante (alisado exponencial de primer orden):

$$V[\hat{x}_{T+h}] = \sigma_x^2 = \frac{\alpha}{2-\alpha} \cdot \sigma_\theta^2 \quad \text{de donde} \quad \sigma_e^2 = \frac{2}{2-\alpha} \cdot \sigma_\theta^2$$

En el modelo lineal:

$$V[\hat{x}_{T+h}] = \frac{\alpha}{(1+\beta)^3} \cdot [1 + 4 \cdot \beta + 5 \cdot \beta^2 + 2\alpha \cdot (1 + 3 \cdot \beta) \cdot h + 2 \cdot \alpha^2 \cdot h^2] \cdot \sigma_\theta^2 \approx \alpha \cdot (1,25 + \alpha \cdot h) \cdot \sigma_\theta^2$$

En el modelo cuadrático:

$$V[\hat{x}_{T+h}] \approx \alpha(2 + 3 \cdot \alpha + 3 \cdot \alpha^2 \cdot h^2) \cdot \sigma_\theta$$

Es útil conocer además de la media y la variancia la distribución (o suponer y comprobar con los datos históricos una distribución normal).

Con los errores podremos construir una *señal rastreadora (tracking signal)* que indicará que todo está bajo control (o que nada indica que no lo esté) mientras se mantenga dentro de ciertos límites; en cambio, al salirse de ellos, mostrará la conveniencia de intervenir. En lo que sigue se considera \hat{x}_t calculado en el instante $t-1$ (debería escribirse $\hat{x}_{(t-1)+1}$). Sea Y_T la suma de los errores hasta el período T :

$$Y_T = \sum_{t=1}^T e_t = e_T + Y_{T-1}$$

Este valor debe oscilar alrededor de cero, pero si la oscilación es demasiado grande indicará la pérdida del control. Puesto que la amplitud de las oscilaciones aceptables depende de la desviación tipo de la variable, deberemos dividir por una cantidad que permita estimar directa o indirectamente dicha desviación tipo. Brown ha demostrado para el modelo constante:

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \cdot \sigma_\theta^2$$

para el modelo lineal:

$$\sigma_Y^2 = \frac{2 - 2 \cdot \alpha^3 + \alpha^4}{4 - \alpha - 4 \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \alpha^3} \cdot \frac{\alpha_\theta^2}{1 - \beta^2} \approx \frac{\sigma_\theta^2}{1 - \beta^4}$$

para el modelo cuadrático:

$$\sigma_Y^2 = \frac{6 - 4 \cdot \alpha + 10 \cdot \alpha^2 - 40 \cdot \alpha^3 + 55 \alpha^4 - 36 \alpha^5 + 10 \cdot \alpha^6}{16 - 7 \cdot \alpha - 53 \cdot \alpha^2 + 81 \cdot \alpha^3 - 45 \cdot \alpha^4 + 9 \cdot \alpha^5} \approx \frac{\sigma_\theta^2}{1 - \beta^6}$$

y supone que en general en el modelo con n parámetros:

$$\sigma_Y^2 \approx \frac{1}{1 - \beta^{2 \cdot n}} \cdot \sigma_\theta^2$$

Si $*Y_T*$ es mayor que un múltiplo relativamente grande de σ_Y podemos considerar que esto no ocurre por casualidad y concluir que el sistema de proyección no es adecuado para el proceso, en cambio si:

$$\left| \frac{Y_T}{\sigma_Y} \right| < K$$

el sistema de proyección se comporta correctamente. Por consiguiente es preciso estimar σ_Y para lo que basta estimar σ_θ .

Si el error de proyección se distribuye según una ley normal de media 0 y desviación tipo σ_e , la *desviación media absoluta* D es:

$$D = E[|e - E[e]|] = 2 \cdot \int_0^{\infty} (e - 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \sigma_e} \cdot \exp\left(-\frac{e^2}{2 \cdot \sigma_e^2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sigma_e \approx 0,8 \cdot \sigma_e$$

Esta aproximación se ajusta bastante bien incluso para datos no normales. Podemos estimar la desviación media absoluta al final del periodo T mediante:

$$D_T = \alpha \cdot |e_T| + (1 - \alpha) \cdot D_{T-1}$$

con una posible alternativa (menos eficiente):

$$D_T = \frac{1}{N} \cdot \sum_{t=T-N+1}^T |e_t|$$

Claramente D_T , al ser una media alisada de los valores absolutos de los errores, es una cantidad positiva. De ahí obtenemos:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\pi}{2} \cdot (D_T)^2$$

y en el caso de alisado simple:

$$\hat{\sigma}_\theta^2 = \frac{2 - \alpha}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (D_T)^2$$

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \cdot \frac{2 - \alpha}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (D_T)^2 = \frac{1}{2 \cdot \alpha} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (D_T)^2$$

Tomando como señal rastreadora:

$$TS_1 = \frac{|Y_T|}{D_T}$$

no habrá motivo de intervención si:

$$TS_1 < \frac{K \cdot \sqrt{\pi}}{2 \cdot \sqrt{\alpha}} = K_1$$

Eligiendo K en la tabla de la ley normal podemos obtener aproximadamente un intervalo de confianza; también podemos fijar directamente un límite de K_1 (tradicionalmente se toma dicho límite entre 4 y 6). Un valor de TS_1 superior al límite elegido conduce a la intervención manual. Se ha propuesto otro tipo de señal rastreadora a partir de una suma alisada de los errores:

$$Z_T = \alpha \cdot e_T + (1 - \alpha) \cdot Z_{T-1}$$

en la forma:

$$TS_2 = \frac{|Z_T|}{D_T}$$

TS_2 está siempre comprendido entre 0 y 1, y los valores límites oscilan entre 0,2 y 0,4. TS_2 no parece ser según diversos autores, a pesar de su rango de variación perfectamente establecido, tan eficaz como TS_1 .

El valor inicial D_0 puede darse mediante simulación sobre datos históricos, o bien mediante fórmulas a partir de dichos valores históricos basadas en consideraciones teóricas.

Si la señal rastreadora por dos o tres veces seguidas está fuera de los límites señalados podemos concluir con un alto grado de confianza que algo va mal en el sistema de proyección. Una vez realizada la corrección correspondiente, los valores de Y_T o de Z_T se reajustan a 0 y vuelve a iniciarse el procedimiento.

Veamos un ejemplo numérico. Para cierto fenómeno se ha determinado que el modelo constante es adecuado, realizando la actualización del parámetro con $\alpha = 0,1$. En diciembre de 1988 los valores disponibles son:

$$S_0 = 100,00; \quad Y_0 = 0,00; \quad D_0 = 2,00$$

En las *figuras 2.1.4.26, 2.1.4.27 y 2.1.4.28* se han recogido los resultados, donde se ve que a partir de abril la situación se degrada (probablemente debido a una modificación brusca de la tendencia). Conviene actuar, por ejemplo, modificando el valor de α .

t	mes	x_t	\hat{x}_t	e_t	Y_t	D_t	TS_1
1	ENERO	101	100	1,00	1,00	1,90	0,53
2	FEBRERO	104	100,10	3,90	4,90	2,10	2,33
3	MARZO	98	100,49	-2,49	2,41	2,14	1,13
4	ABRIL	110	100,24	9,76	12,17	2,90	4,20 *
5	MAYO	120	101,22	18,78	30,95	4,49	6,89 **
6	JUNIO	118	103,10	14,90	45,85	5,53	8,29 **

Fig. 2.1.4.27 Funcionamiento de la señal rastreadora TS_1 en la serie temporal ST08 ($\alpha = 0,1$)

t	mes	x_t	\hat{x}_t	e_t	Y_t	D_t	TS_1
1	ENERO	101	100	1,00	1,00	1,80	0,56
2	FEBRERO	104	100,20	3,80	4,80	2,20	2,18
3	MARZO	98	100,96	-2,96	1,84	2,35	0,78
4	ABRIL	110	100,37	9,63	11,47	3,81	3,01
5	MAYO	120	102,30	17,70	29,17	6,59	4,43 *
6	JUNIO	118	105,84	12,16	41,33	7,70	5,38 *

Fig. 2.1.4.27 Funcionamiento de la señal rastreadora TS_1 en la serie temporal ST08 ($\alpha = 0,2$)

t	mes	x_t	\hat{x}_t	e_t	Y_t	D_t	TS_1
1	ENERO	101	100	1,00	1,00	1,70	0,59
2	FEBRERO	104	100,30	3,70	4,70	2,30	2,04
3	MARZO	98	101,41	-3,41	1,29	2,63	0,49
4	ABRIL	110	100,39	9,61	10,90	4,73	2,30
5	MAYO	120	103,27	16,73	27,63	8,32	3,32
6	JUNIO	118	108,29	9,71	37,34	8,74	4,27 *

Fig. 2.1.4.28 Funcionamiento de la señal rastreadora TS_1 en la serie temporal ST08 ($\alpha = 0,3$)

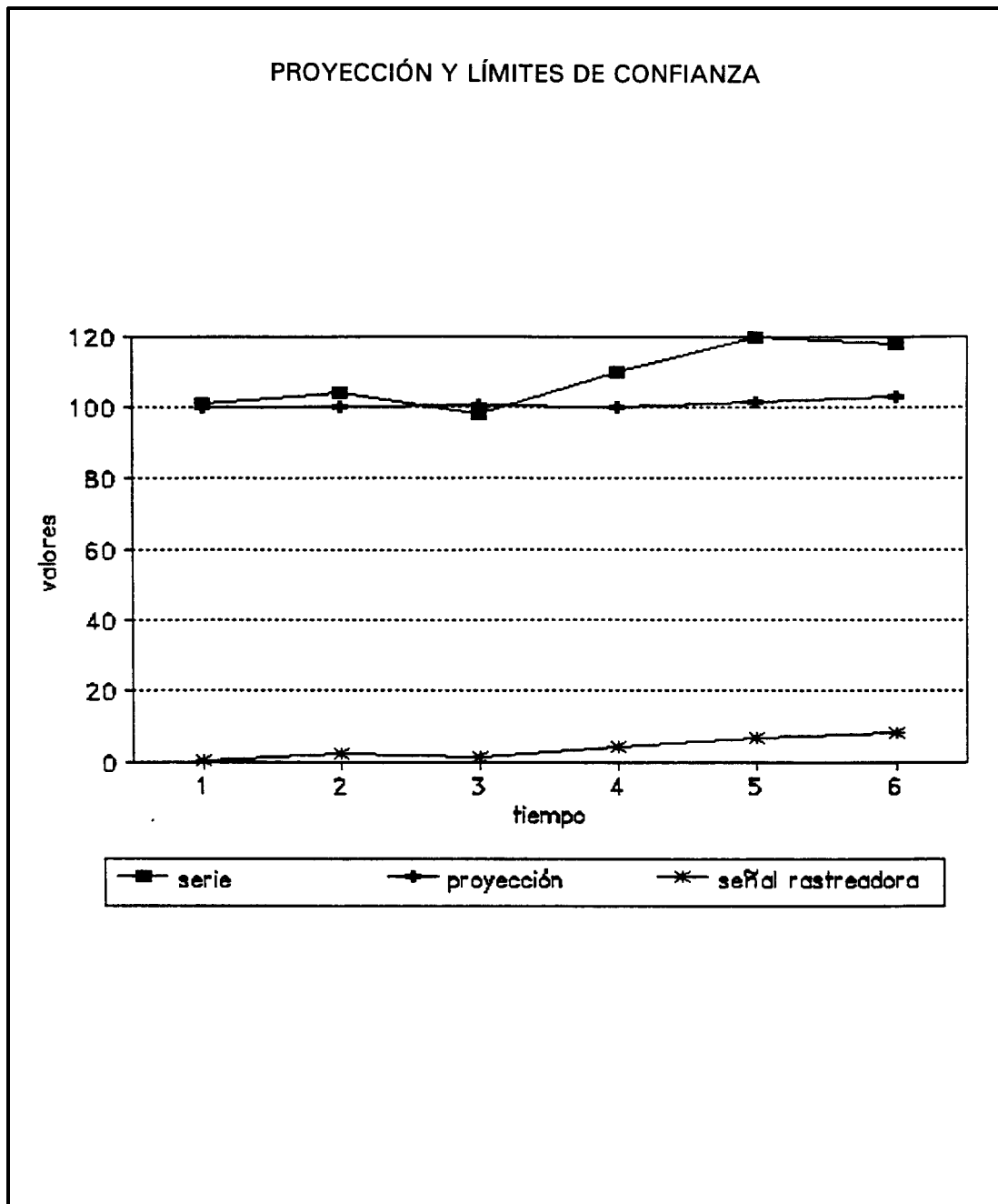


Fig. 2.1.4.29 Señal rastreadora para la serie ST08: Para la serie ST08 hemos efectuado el alisado exponencial con $\alpha = 0,1$ y hemos determinado la señal rastreadora. A partir de la cuarta observación existe una discrepancia en la proyección, que debería dar lugar a modificaciones en el procedimiento

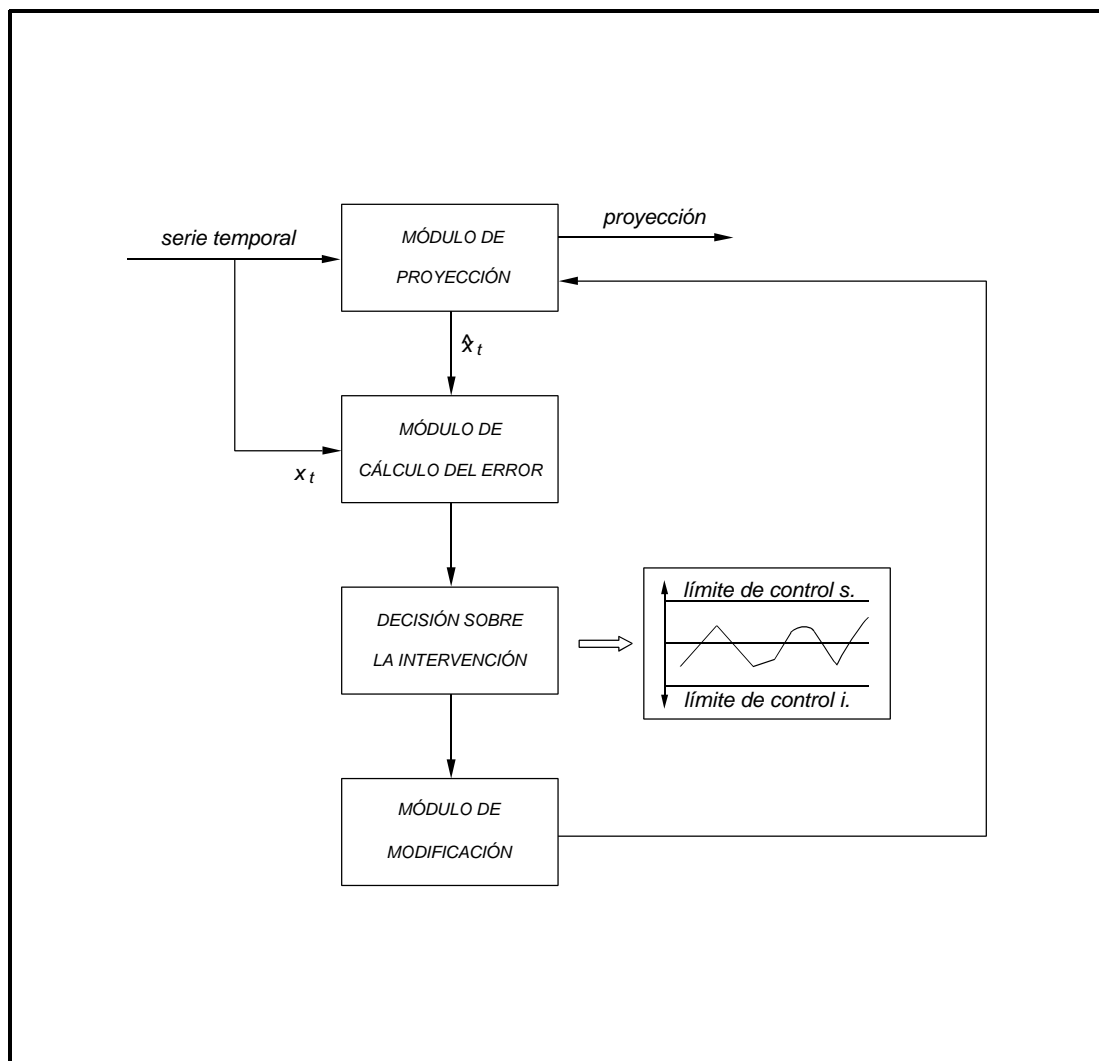


Fig. 2.1.4.30 Control del sistema de proyección a partir de la señal rastreadora: Si una observación o una sucesión de observaciones se desvían significativamente de las proyecciones establecidas, el procedimiento utilizado queda en entredicho y debe procederse a una corrección (manual o automática)

De hecho los valores límite de la señal rastreadora con un cierto umbral de confianza son función de la α efectivamente utilizada. En la figura 2.1.4.31 aparecen, para diversos valores de α dichos límites para ST_1 , basados en una distribución normal de Y_T para unos riesgos del 5 y del 1% (el valor del riesgo indica la máxima probabilidad de equivocarse considerando que el sistema de previsión no se comporta adecuadamente cuando la señal sobrepasa el límite). En la figura 2.1.4.32 hemos reproducido los límites para los mismos riesgos determinados por simulación, que no parecen muy coherentes con los anteriores.

α	LÍMITES MODELO CONSTANTE		LÍMITES MODELO LINEAL	
	al 5%	al 1%	al 5%	al 1%
0,05	7,77	9,23	5,43	6,45
0,10	5,49	6,53	3,80	4,52
0,15	4,48	5,33	3,08	3,66
0,20	3,88	4,62	2,64	3,14
0,25	3,47	4,13	2,35	2,79
0,30	3,17	3,77	2,13	2,53

Fig. 2.1.4.31 Valores límites para unos niveles de riesgo del 5% y del 1% de la señal rastreadora en los modelos constante y lineal obtenidos mediante los valores teóricos y utilizando la ley normal

α	LÍMITES MODELO CONSTANTE		LÍMITES MODELO LINEAL	
	al 5%	al 1%	al 5%	al 1%
0,05	10,20	12,87	7,45	9,42
0,10	7,62	9,83	5,38	6,82
0,15	6,04	7,94	4,30	5,56
0,20	5,65	7,59	4,00	5,18
0,25	4,98	6,80	3,58	4,74
0,30	4,92	6,86	3,35	4,53

Fig. 2.1.4.32 Valores límites para unos niveles de riesgo del 5% y del 1% de la señal rastreadora en los modelos constante y lineal obtenidos por simulación

2.1.4.6 Elección dinámica del parámetro de alisado

Hasta el momento hemos supuesto que él (o eventualmente los) parámetro de alisado era un valor fijado exteriormente, en forma independiente de los datos. Sin embargo se han propuesto técnicas para elegir el parámetro a partir de los datos (lo que ciertamente altera algunos de los supuestos básicos que hemos venido utilizando), e incluso modificarlos en curso de aplicación del esquema proyección-actualización (lo que todavía los perturba más).

Una técnica ampliamente utilizada es la de emplear los datos históricos disponibles inicialmente no sólo para establecer los valores iniciales de las medias alisadas, sino también para elegir el valor *más adecuado* de α . Para ello se realizan una serie de pruebas con un conjunto de datos históricos usando varios valores diferentes del coeficiente de alisado y seleccionando el valor de α que optimiza alguna medida de eficiencia tal como la suma de los errores cuadráticos obtenidos. Este enfoque puede sofisticarse considerablemente, por ejemplo:

Paso 1: Dividir la serie histórica en dos partes, aproximadamente iguales. Con la primera parte, como si fuera la única disponible, determinamos los valores iniciales de las medias alisadas.

Paso 2: Elegimos un valor de α y realizamos una *pseudo-proyección* con los valores de la segunda parte, actualizando los parámetros con los valores reales ya conocidos.

t	x_t	t	x_t	t	x_t	t	x_t
1	108	6	128	11	146	16	174
2	118	7	123	12	157	17	167
3	119	8	134	13	155	18	182
4	136	9	133	14	158	19	178
5	130	10	148	15	161	20	183

Fig. 2.1.4.33 Valores de las 20 observaciones de la serie temporal ST09

Paso 3: Determinamos la suma de errores cuadráticos en dicha segunda parte, asociados al valor de α adoptado. Para ello utilizamos sistemáticamente la previsión del valor en $t+1$ realizada en el instante t .

Paso 4: Repetimos los *pasos 2 y 3* para diferentes valores de α , y elegimos aquél para el cual el error cuadrático es menor.

Paso 5: Si las pruebas indican que el valor óptimo de α es superior a 0,3, debemos poner en duda la validez del modelo adoptado (los datos pueden tener una autocorrelación significativa, en cuyo caso los métodos a utilizar deberán ser diferentes, o bien tendencias de tipo especial, o ciclos). En caso contrario dispondremos de valores iniciales para la proyección *real*, así como del valor de α *óptimo*.

Con los 10 primeros valores de la serie temporal ST09 obtenemos la recta de regresión:

$$108,0964 + 3,564284 \cdot t$$

que nos da las condiciones iniciales para calcular los valores de SSE correspondientes a los 10 valores siguientes utilizando diversos valores de α en un ajuste exponencial con modelo lineal y un solo parámetro de alisado.

α	SSE(α)
0,01	224,8856
0,05	202,7371
0,10	198,0730
0,15	207,2687
0,20	224,2599
0,25	246,4378
0,30	272,8614

Fig. 2.1.4.34 Valores de SSE en función de diversas α para los 10 últimos valores de la serie temporal ST09

De los cálculos realizados se deduce que el valor *óptimo* de α se encuentra en el entorno de 0,10 (un análisis más detallado nos llevaría a $\alpha=0,09$, que corresponde a SSE= 197,6107).

Muchos usuarios prefieren disponer de varios valores del coeficiente de alisado y utilizar el apropiado cada vez; por ejemplo $\alpha=0,1$ cuando el proceso está estabilizado, pero cuando parece que los coeficientes del proceso varían rápidamente prefieren $\alpha=0,25$. En el apartado anterior hemos tratado de las señales rastreadoras para contrastar el sistema de proyección y suministrar la información básica para su control; sin embargo, el empleo de señales rastreadoras requiere normalmente la intervención directa del decisor como parte del control, no existe control automático. Si el número de series temporales sujetas al sistema de proyección es importante, será deseable que la mayoría de las acciones sobre el mismo sean automáticas.

Se han desarrollado algunos esquemas para contrastar y modificar automáticamente la constante de alisado en el ajuste exponencial; dichas técnicas se denominan habitualmente *modelos de alisado con control adaptativo*. El método de Chow consiste en utilizar tres valores equidistantes del parámetro de alisado, el nominal (α_0), uno superior (α_s) y otro inferior (α_i):

$$\alpha_s = \alpha_0 + \delta$$

$$\alpha_i = \alpha_0 - \delta$$

donde δ es una constante arbitraria (Chow utiliza valores de δ cercanos a 0,05). Cada período se calculan tres proyecciones para el período siguiente, una con cada valor del coeficiente, aunque la proyección asociada al valor nominal α_o es la que normalmente se emplea para la toma de decisiones. Se calcula cada período la desviación absoluta media para cada una de las proyecciones, sean $D(\alpha_o)$, $D(\alpha_s)$ y $D(\alpha_i)$:

- si $D(\alpha_o)$ es menor que $D(\alpha_s)$ y $D(\alpha_i)$ no se cambia nada,
- si $D(\alpha_s) < D(\alpha_o) \leq D(\alpha_i)$ se toma como α_o el valor α_s y se recalculan los nuevos α_s y α_i ,
- si $D(\alpha_i) < D(\alpha_o) \leq D(\alpha_s)$ se toma como α_o el valor α_i y se recalculan los nuevos α_s y α_i ,
- si $D(\alpha_s)$ y $D(\alpha_i)$ son menores que $D(\alpha_o)$ se ajusta α_o en la dirección de la desviación absoluta media menor.

Después de cada modificación de α_o se hacen iguales a cero los tres valores de D .

2.1.5 Formas especiales de la curva de tendencia

Vamos a analizar el ajuste de expresiones representativas de la evolución de la tendencia diferentes de la polinómica utilizada hasta el momento. Es fácil extrapolar los resultados alcanzados hasta el momento al ajuste de expresiones formadas por combinación lineal de funciones de t ; por ejemplo, el modelo:

$$x_t = a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t) + \dots + a_n \cdot f_n(t) + \theta_t$$

donde la linealidad respecto a los parámetros a estimar: a_1, a_2, \dots, a_n permite la utilización de procedimientos relativamente sencillos y ricos en propiedades. A dicho esquema pertenecen las curvas de tendencia polinomial:

$$x_t = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_n \cdot t^n + \theta_t$$

que ajustará adecuadamente series temporales tales que las diferencias finitas de orden n se ajusten, a su vez, a una constante (recta horizontal). Podrá utilizarse el procedimiento descrito en 2.1.2.2 para el ajuste. Un caso particular es la tendencia lineal sobre la que hemos tratado extensamente.

Un nivel superior de dificultad aparece cuando no existe linealidad respecto a los parámetros, con lo que el modelo es de la siguiente forma:

$$x_t = F(t, a_1, a_2, \dots, a_n) + \theta_t$$