# Capítulo 2 Proyecciones y previsiones

## 2.1 Conceptos

> Un hombre con experiencia es como un jugador que va apuntando los números que salen en la ruleta. Sabe los números que han salido pero no los que saldrán.
>
> Santiago Rusiñol

Es muy notable la fascinación que ejerce la posibilidad de conocer el futuro sobre nuestras mentes y la admiración que despiertan aquellas personas capaces de hacer predicciones que se cumplen. Durante muchos años Jules Verne se ha considerado como el paradigma de un autor que en sus escritos previó algunos de los avances tecnológicos que posteriormente se han producido. Curiosamente ello ha llevado a los adultos, llenos de entusiasmo, a regalar sus obras -que consideran de literatura infantil- a los niños, cuya capacidad de asombro ante las mismas es mucho más limitada, dada su falta de perspectiva que les lleva a considerar dichos avances como algo natural. Pero, además de la mera curiosidad que despierta el conocimiento adelantado de lo que ocurrirá en el futuro, existen otros aspectos que muestran el interés de tal conocimiento.

El objeto del presente capítulo es la previsión enmarcada en un contexto productivo: previsión de la demanda y previsión tecnológica consideradas como un paso previo a la adopción de decisiones eficientes. Implícitamente consideramos que si conocemos la evolución futura del entorno de nuestro sistema, aunque sea con cierta imprecisión, nuestras decisiones serán más adecuadas, por cuanto permitirán obtener mejor aprovechamiento de las oportunidades que se ofrecerán y eludirán más eficazmente los escollos que se presentarán. Si además tenemos la convicción de que el futuro no está ineludiblemente determinado en el presente, asumiremos que podremos ayudar con las decisiones presentes a que el futuro concreto que se alcance sea más próximo al que deseamos que el que se produciría en ausencia de nuestras decisiones o con decisiones desenfocadas. Se produce, por tanto, en este caso, un efecto, tal vez a muy pequeña escala, de modificación del fenómeno observado por el mero hecho de observarlo y actuar en consecuencia, efecto que en general hemos visto poco tenido en cuenta por los diversos autores.

La validez de un procedimiento de previsión en este contexto estriba en la oportunidad de las decisiones que con él se adoptan y no en el mayor o menor parecido de los valores previstos con los que se den realmente. Debe existir una adecuación y una estrecha coordinación entre los procedimeitnos utilizados en la elaboración de previsiones y aquellos que elaboran las decisiones que hacen uso de las mismas.

Entre los diversos procedimientos utilizables para realizar previsiones, el presente capítulo se centra en los objetivos, sin desdeñar los subjetivos aunque son de difícil descripción general formalizada por estar íntimamente relacionados con las circunstancias existentes en cada caso. Los procedimientos objetivos se basan casi sin excepción en la extrapolación de las situaciones conocidas, pasadas y presentes; en el caso de la previsión de la demanda, en la extrapolación de series numéricas; a este caso dedicaremos preferentemente los párrafos que siguen.

La extrapolación se realiza definiendo una función (función teórica) que pretende representar la serie numérica tanto en el futuro como en el presente y pasado, esta función constituye un modelo del fenómeno estudiado. Mayoritariamente se supone que la extrapolación será tanto más eficaz cuanto lo sea la interpolación, es decir, cuanto más parecidos sean los valores (valores teóricos) dados por la función teórica asociados o correspondientes a los valores conocidos. A este nivel cualquier procedimiento de interpolación/extrapolación conocido puede ser aplicable (polinomios de Hermite, Chébichef, etc.).

Normalmente se presupone que consideraciones teóricas sobre el fenómeno estudiado y que se pretende extrapolar implican una forma especial de la función teórica, ciertas formas son aceptables y otras no. En el mejor de los casos la forma de la función teórica está totalmente determinada salvo los valores de algunos parámetros que ayudan a concretarla. Los valores definitivos de dichos parámetros son los que se calculan a partir de los datos conocidos, siempre con el objetivo de minimizar la diferencia (distancia) entre los valores reales y los teóricos. Un factor añadido más, que puede considerarse como una aplicación de la "navaja" de Occam, hace presuponer que entre las diferentes posibilidades en cuanto la forma de la función teórica, aquélla que conduce a la forma más sencilla es la mejor. Se trata tal vez de un reflejo propio de las religiones monoteístas con un Ser Supremo creador e inteligente que lleva a considerar que todos los fenómenos tienen una "explicación" muy simple, consideración, que por otra parte, ha sido muy fructífera en las ciencias físicas a lo largo de la Historia.

Dado que la función teórica conduce a valores diferentes (es de esperar en poca proporción) de los observados, es preciso justificar la causa de dicha diferencia, y para ello se recurre a la aleatoriedad. De las dos vías posibles se suele elegir la de la imperfección de nuestros métodos antes que la de la aleatoriedad intrínseca de los fenómenos, ya que es mucho más confortable. Se considera que en los valores observados actúan dos causas de aleatoriedad. Una de ellas está constituida por los factores no tenidos en cuenta al establecer el modelo o función teórica, que al ejercer su influencia sobre el fenómeno producen desviaciones respecto a lo estipulado por los factores considerados. La otra la constituyen los errores de medida sobre las observaciones. En ambos casos se presupone que el perfeccionamiento del modelo y de los instrumentos de medida eliminaría las discrepancias. En todo caso la discrepacia se debe a nuestra falta de conocimiento y de información totalmente fiable, no a que el fenómeno no siga una ley completamente determinista. Nosotros somos partidarios de la segunda vía, la de los fenómenos intrínsecamente aleatorios, sin despreciar las fuentes de aleatoriedad citadas, que reconocemos que también actúan. En cualquier caso la disquisición es meramente filosófica por cuanto en cualquier caso llegaremos a idénticos procedimientos.

No es ocioso señalar, aunque sea una repetición, que la acción adaptada a la finalidad de la previsión es la elección de la forma de la función teórica que, por tanto, debería estar razonablemente aislada de los valores concretos de las observaciones disponibles. La determinación de los valores concretos de los parámetros se realiza habitualmente tal como se ha indicado intentando disminuir la distancia entre los valores teóricos y los de las observaciones, y por tanto se encuadran preferentemente en un objetivo de interpolación.

Las consideraciones estadísticas asociadas comúnmente con las previsiones (variancia, intervalo de confianza, etc.) exigen la aceptación de ciertos supuestos relativos a la estabilidad de los fenómenos estudiados, imposibles de justificar teóricamente en general. Ningún fenómeno que no se halle artificialmente aislado es totalmente estable; el mero hecho de que está inmerso en nuestro entorno y que por tanto se ve afectado por nuestras acciones implica la evolución de sus factores causantes. Únicamente puede confiarse en que dicha evolución sea lenta y por tanto inapreciable en el segmento temporal en el que aplicamos un procedimiento de previsión. A la larga será necesario revisar y actualizar el procedimiento, es decir, el procedimiento más eficaz también será evolutivo para adaptarse continuamente a la estructura del fenómeno considerado.

Nos explicaron una vez el caso de una empresa del sector del automóvil que fabricaba mayoritariamente sus vehículos de cierto modelo de color blanco. Según sus estadísticas, los vehículos de color blanco eran los que más se habían vendido en el pasado y, por tanto, extrapolando, llegaban a la conclusión de que eran los que más iban a venderse en el futuro. Un día un ejecutivo inquieto decidió analizar el fenómeno, que le parecía incongruente, seguramente porque prefería algún otro color al blanco y llegó a una conclusión inquietante. Algún tiempo atrás, durante el lanzamiento del modelo objeto del estudio, se había producido un incidente en las cabina de pinturas de forma que durante un período prolongado sólo había sido posible pintar los vehículos de blanco; consecuentemente sólo se habían vendido vehículos blancos pues prácticamente no había de otro color. Los expertos en previsiones, viendo los resultados de las ventas, habían recomendado fabricar gran proporción de blancos, y aunque el incidente en pinturas se había subsanado, siguieron fabricándose una mayoría de vehículos blancos, y por tanto vendiéndose en mayor proporción que los de los otros colores que eran difíciles de encontrar. No me explicaron si las conclusiones de dicho ejecutivo tuvieron alguna repercusión práctica.

En la anécdota anterior queda manifiesta, en forma extrema, la modificación que indicábamos del fenómeno observado a través del binomio previsión-decisión. No se crea que la situación descrita es meramente una caricatura; hemos observado comportamientos similares en diversos sectores llevando por ejemplo a la desaparición de variedades de un producto en las que no creía el aparato comercial de la empresa. Cosecuentemente, dichas variedades eran distribuidas con poco entusiasmo, lo que llevaba a que el consumidor no podía encontrarlas fácilmente en los puntos de venta. Como dichas variedades se vendían poco, se disminuía su producción, con lo que la dificultad de comprarlas crecía, etc.

Hay otro aspecto de la anécdota anterior que invita a una profunda reflexión: ¿se observa el fenómeno de una manera eficaz?, ¿medimos lo que queremos medir o lo que podemos medir? Para decidir qué debemos fabricar parece lógico estimar qué es lo que quiere el mercado, o sea la demanda potencial. En la anécdota los datos disponibles se referían a las ventas, naturalmente relacionadas con la demanda pero no idénticas a ella, como ha podido comprobarse. También esta situación es habitual en la práctica; es tan difícil medir lo que queremos evaluar que nos contentamos con medir algo parecido. No criticamos el que se adopte esta solución, sí el que se olvide "a posteriori" que se ha adoptado.

La evolución del fenómeno, y consecuentemente del procedimiento de previsión, entronca con una peculiaridad que dificulta una presentación pedagógica del tema y que hemos intentado solventar con mayor o menor fortuna en el presente capítulo: la asunción del paso del tiempo. En un momento determinado disponemos de unas observaciones determinadas sobre cierto fenómeno y con ellas realizamos una determinadas previsiones sobre los valores futuros del fenómeno. Pasado el tiempo disponemos de más observaciones y por tanto podemos proceder a nuevas previsiones teniéndolas en cuenta, algunas de las cuales pueden corresponder a instantes futuros ya considerados anteriormente, aunque los valores concretos previstos puedan ser, y normalmente sean, diferentes. Razonablemente cuando esto ocurra daremos validez a la última previsión realizada y no a la anterior. Por consiguiente, cualquier previsión está asociada a dos instantes de tiempo: aquél en el que se realiza y aquél al que se refiere su valor. Una notación que tenga en cuenta este hecho es relativamente complicada y, dentro de lo posible, lo hemos intentado eludir.

Por otra parte, y consecuentemente, la función teórica al incorporar las nuevas observaciones queda modificada; en el caso más sencillo son solamente sus parámetros los que varían. Por tanto los valores de dichos parámetros también están asociados al instante de elaboración de la previsión. La experiencia nos muestra que esta consideración resulta difícil de entender a nuestros alumnos, tal vez porque en la exposición no se percibe adecuadamente el paso del tiempo aludido. Por ello también es difícil transmitir la idea de que algunos procedimientos son más apropiados para actualizar los parámetros incorporando el efecto de las nuevas observaciones que para el establecimiento de los valores iniciales de los mismos al poner en marcha el procedimiento.

La estructura del capítulo es la siguiente: en el apartado **2.1.1** definimos la importancia y los objetivos de la previsión, establecemos la distinción entre previsión de la demanda y la previsión tecnológica, clasificamos los procedimientos habitualmente empleados para la previsión de la demanda y presentamos el modelo de base para el tratamiento de las series temporales, distinguiendo en especial entre tendencia, variación estacional y álea o ruido.

Iniciamos seguidamente el tratamiento de series temporales desprovistas de variación estacional, lo que, en cualquier caso, constituye un paso necesario también en el caso de existir ésta. Sucesivamente analizamos la regresión (**2.1.2**), las medias móviles (**2.1.3**) y el ajuste exponencial (**2.1.4**) para determinar los parámetros de tendencias lineales en función de la variable temporal (y eventualmente polinómicas). El estudio del ajuste exponencial es particularmente extenso, dado que dicha técnica se halla muy extendida en los paquetes informáticos de gestión de producción y por otra parte constituye un excelente procedimiento de actualización de los parámentros de la función teórica. Se describe su utilización tanto para el establecimiento de los valores iniciales de los parámetros (que se desaconseja) como meramente para su revisión, incluyéndose el aspecto de la señal rastreadora para la detección de la inadecuación del modelo.

En **2.1.5** analizamos el ajuste de funciones no lineales de la variable temporal, funciones exponenciales y otras adaptadas al crecimiento con saturación, tales como la función logística. Pasamos seguidamente en **2.1.6** a la consideración de la inclusión de la variación estacional, recurriendo a procedimientos de cálculo iterativos. El breve apartado **2.1.7** está dedicado a los modelos explicativos de regresión.

La última parte del capítulo (**2.1.8**) pretende describir someramente las finalidades y el contenido de las técnicas utilizadas en la previsión tecnológica.

## 2.1.1 Importancia y objetivos de la previsión

La adopción racional de cualquier decisión presupone algún tipo de suposición relativa a cómo van a ser las condiciones futuras que afectarán el resultado de la misma, es decir, algún tipo de previsión. Gran parte de las previsiones, incluso de las realizadas en las empresas, nunca llegan a formalizarse: son adivinaciones o corazonadas, basadas en la experiencia personal y en el tipo de carácter (optimista o pesimista) de quien las realiza. Por ejemplo, la decisión de contratar más empleados en general supone que se estima que la demanda de nuestros productos seguirá aumentando (y que la productividad de los empleados actuales no aumentará); si se decide no reponer el stock de cierto producto es que se estima que el nivel de inventario existente es suficiente para cubrir la demanda o consumo durante cierto tiempo, etc.

En el presente contexto denominaremos previsión a la estimación formalizada del valor futuro de cierta variable o grupo de variables (que posiblemente sirven para describir un cierto fenómeno). Para realizar la previsión podemos proceder de muchas formas, utilizar la experiencia, el criterio humano, las técnicas de análisis de datos, etc. Por ello distinguiremos proyección (*forecast*), que es una estimación objetiva de las observaciones o valores futuros, de predicción (*predict*) en la que la estimación del valor futuro tiene en cuenta aspectos objetivos y subjetivos. La proyección es un procedimiento objetivo, que se fundamenta en la historia, en un conjunto de valores del fenómeno observados en el pasado (serie temporal). También puede utilizar la historia de otros fenómenos (índices o variables exógenas), cuya evolución futura se considera fácilmente predecible, íntimamente correlacionados con el fenómeno que nos interesa. Se supone que ésta correlación proseguirá en el futuro de una forma análoga. En definitiva se conocen los factores considerados y los no considerados. Cuando un factor no considerado produce cambios en la naturaleza básica de la serie temporal o de la correlación y el decisor conoce dicho cambio, frecuentemente puede incorporar la información a la proyección. La proyección es, por tanto, un *input* para la predicción. Nosotros nos interesaremos fundamentalmente en lo que sigue por los procedimientos para realizar proyecciones, pero debe quedar claro que los sistemas de previsión funcionan con la posibilidad de que el decisor modifique la proyección para convertirla en predicción, como parte de su proceso decisorio.

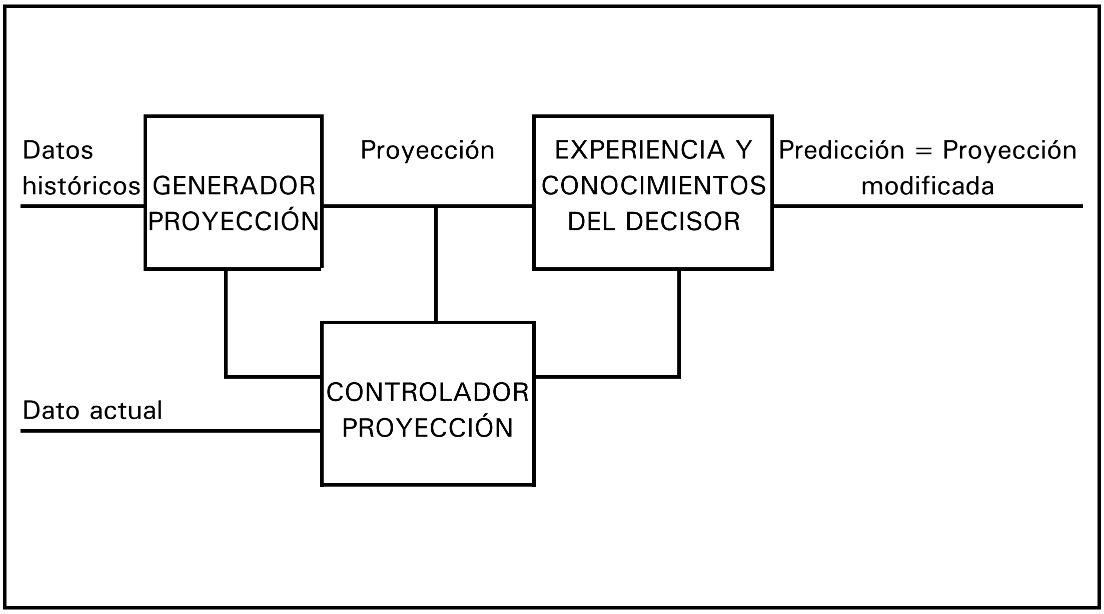


*Fig. 2.1.1.1* Elaboración de previsiones: *La elaboración de previsiones cuantitativas se realiza mediante un proceso de dos etapas en serie que se complementan: la* proyección*, basada en datos históricos y formalizable objetivamente y la* predicción *que se apoya en la proyección y en otros tipos de información incluyendo aspectos subjetivos. El conjunto no sería completo sin una etapa paralela de* control *que permita revisar los parámetros y procedimientos*

La proyección admite el uso de técnicas matemáticas sofisticadas y la ayuda de ordenadores electrónicos de diversas dimensiones. Un peligro existente en el uso de dichos procedimientos es la tentación de creer que lo delicado y poderoso del instrumento da validez por sí mismo al resultado obtenido, alejando los factores subjetivos (u objetivos no incorporados al proceso) de participar en la previsión. Como dichos instrumentos pueden ser manejados por personal menos experto o con menos familiaridad y criterio sobre el fenómeno que se quiere estimar, y como el número de fenómenos a considerar simultáneamente puede ser elevado, el riesgo de no tener en cuenta los factores suplementarios es grave; sólo incorporando al sistema de previsión señales de alarma que hagan necesaria la presencia del personal experto cuando sea conveniente, el sistema de proyección podrá considerarse satisfactorio.

Aunque ya hemos hecho énfasis en el hecho de que la previsión es un paso previo a la decisión, es conveniente darse cuenta de lo que esto implica. En primer lugar debemos considerar que los errores en la previsión se traducirán en decisiones poco acertadas y por consiguiente en repercusiones no deseadas por el decisor. Las decisiones empresariales equivocadas producen, cuando menos, consecuencias económicas negativas. Por ejemplo, si se asignan recursos sobre la base de una previsión de la demanda futura que sea uniformemente más alta que la demanda real que se produce, entonces:

- Aumentarán los stocks de los productos acabados, lo que puede agotar los recursos financieros de la empresa, así como su capacidad de almacenaje, forzándola a intentar reducciones de stock a base de vender a precios desfavorables. Como, por otra parte, los productos estarán almacenados más tiempo del conveniente, a veces en condiciones precarias, su degradación y obsolescencia se incrementarán, pudiendo aumentar en consecuencia las reclamaciones, coste de garantía, etc. y disminuir la apreciación del producto en el mercado.

- La capacidad de producción disponible podrá ser muy superior al nivel de producción en el que realmente se opera, con lo que los costes, posiblemente los directos pero con toda seguridad los fijos, serán excesivos, con lo que se reducirá el margen de beneficios.

- La plantilla podrá ser excesiva, con lo que deberá procederse a regulación de empleo, lo que, a parte del coste, incrementará la conflictividad social.

Si, por el contrario, la previsión de la demanda futura ha sido uniformemente más baja, entonces:

- Los clientes no se verán atendidos, por lo que se dirigirán a otros proveedores. Si encuentran satisfacción en ellos el cambio puede ser permanente, con lo que nuestra participación en el mercado se reducirá así como nuestros beneficios a largo plazo.

- Los medios de producción se verán sobrecargados al intentar seguir el ritmo de la demanda. En consecuencia se incrementarán los costes directos por trabajar fuera del intervalo económico de nivel de producción (horas extraordinarias, subcontratación, uso de equipos no idóneos, mayor manipulación, averías, etc.).

- La adquisición de medios de producción adicionales se realizará en forma apresurada, por lo que su coste será superior al que supondría una adquisición normal.

Por tanto la cantidad de esfuerzos, y consecuentemente el coste, dedicados a la realización de una previsión debe estar en consonancia con las posibles consecuencias de los errores de la misma. Si los errores son fácilmente subsanables, debido a que se trata de un proceso secuencial en el que podemos buscar la compensación entre períodos, o bien su trascendencia es ligera, una vez definido el procedimiento de previsión puede dejarse su explotación a medios casi automáticos, con un sencillo procedimiento de alarma. Si los errores son de gran trascendencia, afectando aspectos vitales de la empresa, la previsión la realizarán o supervisarán directamente los máximos responsables de la misma, usando toda su experiencia, todo su criterio y todos sus conocimientos, ayudados, si es que creen en ellos, por los procedimientos más sofisticados.

Por otra parte, cuando se hable de precisión de una previsión (a pesar de lo ambiguo y difícil de definir que es este concepto), la magnitud utilizada deber estar en consonancia con las consecuencias económicas correspondientes. Lo contrario equivale a un ejercicio teórico cuya trascendencia práctica es cuando menos discutible. Algún autor ha ideado una frase ocurrente pero desenfocada: "lo único exacto de una previsión es que no será exacta al 100 %". Pero, ¿tiene alguna pertinencia hablar de la *exactitud* de una previsión? Creemos firmemente que es más correcto hablar de *utilidad* de una previsión, una previsión es útil, fiable o precisa si se quiere, cuando permite adoptar buenas decisiones.

Finalmente, pero no como menos importante, cabe indicar que si creemos que el futuro lo determinamos nosotros con nuestros actos en el presente, hemos creado un círculo vicioso pues prevemos para decidir cómo actuar, y nuestras acciones influyen en el futuro, por lo que deberían, a su vez, modificar la previsión. Si a partir de una previsión razonable adoptamos una decisión sensata coherente con ella esta decisión ayudará a hacer realidad la previsión. Una pauta de acción consiste en prever qué pasará sin nuestra intervención, y a continuación decidir nuestras acciones en el sentido de orientar el futuro hacia donde deseamos (planificación inter-activista según R.L.Ackoff). Dentro de este esquema el mayor éxito consiste en que la realidad se separe lo más posible de la previsión inicial (naturalmente en el sentido deseado).

La *figura 2.1.1.2* resume las funciones básicas de la previsión, con la descripción del caso de previsión de la demanda, incluyendo:

- Acondicionamiento y filtrado de los datos, lo que señala los problemas relativos a los datos históricos, como datos perdidos u omitidos, erróneos, puntos singulares por causas especiales (puntos de demanda extraordinariamente altos o bajos), etc.

- Técnicas de selección de modelos de previsión que formulen la manera más conveniente de representar configuraciones uniformes de la demanda.

-Procedimientos empleados para efectuar la previsión para artículos cuyos modelos de demanda sean poco comunes.

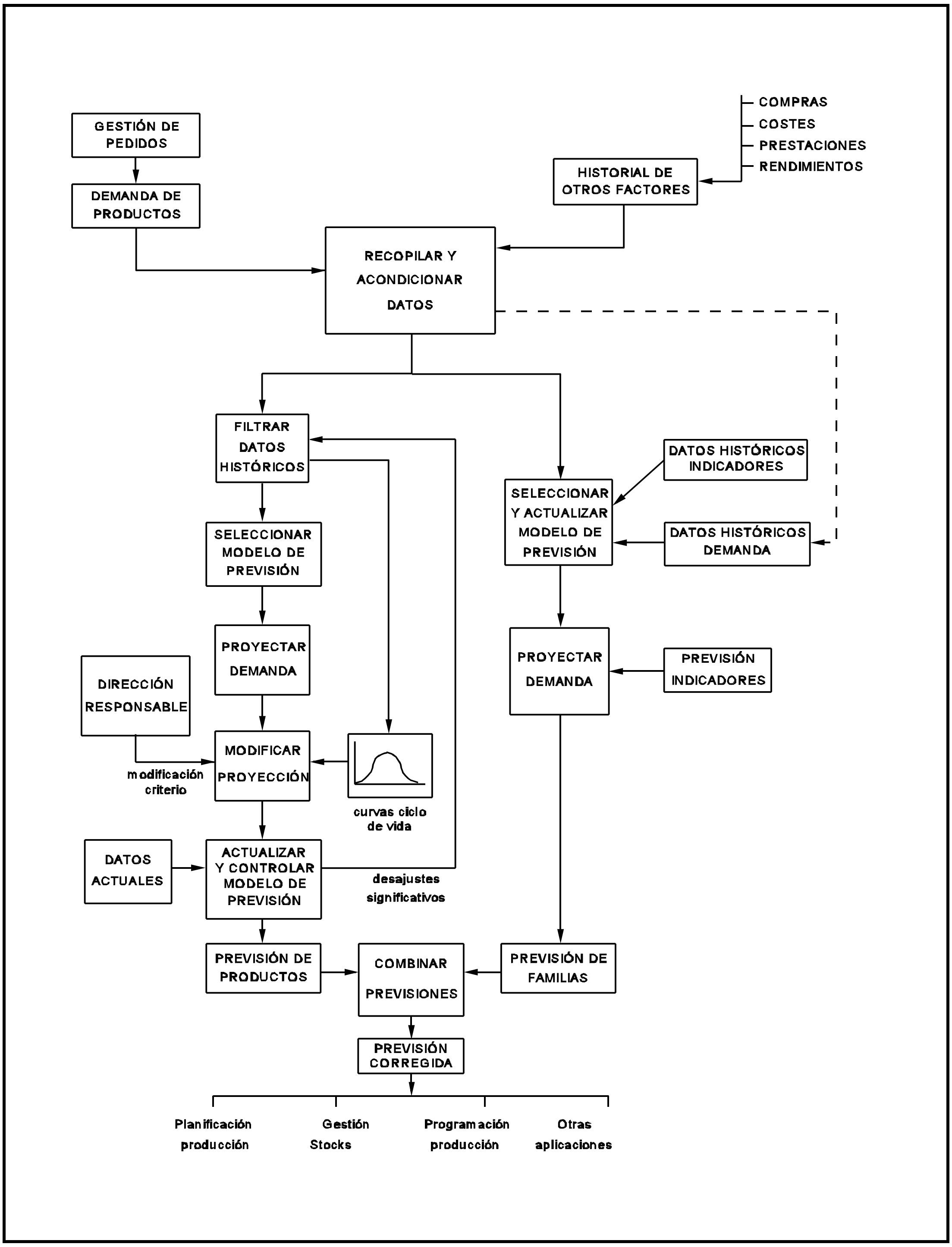


*Fig. 2.1.1.2 Funciones básicas de la previsión de la demanda*

- Proyección de la demanda futura por períodos, en el horizonte requerido por el sistema de planificación que utiliza la previsión.

- Ajuste de previsiones de artículos aislados para hacerlos coincidir con las previsiones de la familia o grupo del artículo.

- Aplicación de curvas de vida que modifiquen las proyecciones a plazo más largo, sobre la base del historial de elementos similares. (Esto aumenta la exactitud de las previsiones a largo plazo y las de los productos nuevos).

- Fácil aplicación de factores de criterio, que permita a la dirección corregir el efecto de situaciones que se producen en forma puntual y que se conozcan de antemano. Entre estas contarían cosas tales como campañas de promoción de ventas, anuncio de nuevos productos (propios o de la competencia), ampliación de mercados, cambios de precio, etc.

- Técnicas de mantenimiento de los modelos de previsión que disminuyen los costes de previsión reduciendo la necesidad de mantener datos históricos de la demanda.

- Procedimientos de supervisión que garantizan que los modelos actuales de previsión pueden seguir aplicándose y que reduzcan al mínimo la intervención manual.

- Creación de modelos de previsión basados en factores económicos y comerciales, externos a la empresa (previsión extrínseca o econométrica).

### 2.1.1.1 Técnicas de proyección

Las técnicas empleadas en la realización de proyecciones varían en función del contexto en que se mueve el fenómeno objeto de la previsión. En principio las técnicas pueden clasificarse en dos grandes categorías: técnicas cualitativas y técnicas cuantitativas.

Las técnicas cualitativas se basan fundamentalmente en el conocimiento humano y efectúan las estimaciones futuras a partir de informaciones cualitativas, tales como opiniones de expertos, analogías, comparaciones, etc. La distinción entre proyección y predicción aquí no es tan acusada. Se utilizan especialmente en la previsión tecnológica, y en el capítulo dedicado a este tema discutiremos algunas de ellas.

Las técnicas cuantitativas aplican varios procedimientos de análisis de datos a series cronológicas históricas, para extrapolarlas hacia el futuro. Pueden dividirse en tres grupos principales (no totalmente disjuntos):

- Análisis de series temporales

- Modelos explicativos con una ecuación de regresión
- Modelos explicativos con varias ecuaciones simultáneas.

*Análisis de series temporales*

Estos métodos tratan de descubrir la pauta o configuración interna y otras características particulares de unos datos históricos. La proyección se realiza extendiendo dicha configuración hacia el futuro, es decir, extrapolando. Se supone implícitamente que todos los factores externos que influyen en el fenómeno considerado seguirán en el futuro con la misma pauta, sin cambios bruscos que influyan en el mismo.

*Modelos explicativos con una ecuación de regresión*

La previsión extrínseca está ampliamente basada en la regresión, procedimiento comunmente utilizado en estadística y econometría. Supuesto que deseamos determinar la relación del volumen de ventas con varios indicadores que pensamos influyen significativamente en el mismo. Supongamos, además, que el efecto de cada factor es aditivo lo que nos llevará a escribir:

$$(\text{Volumen de ventas}) = a_1 + a_2 \times (\textit{precio}) + a_3 \times (\text{número de vendedores}) +$$

$$+ a_4 \times (\text{presupuesto de publicidad})$$

La determinación de los valores concretos de $a_1$, $a_2$, $a_3$ y $a_4$ se realizará habitualmente a partir de los datos históricos, eligiendo aquellos que conduzcan a un error cuadrático menor sobre dichos datos. A continuación extrapolaremos el resultado a todos los conjuntos de (precio), (número de vendedores), (presupuesto de publicidad) que nos interese.

*Modelos explicativos con ecuaciones simultáneas*

Muchas veces las dependencias de algunas variables están cruzadas, por ejemplo, el volumen de ventas puede influenciar al precio y a la publicidad:

$$\text{precio} = b_1 + b_2 \times (\text{volumen de ventas}) + b_3 \times (\text{coste})$$

La expresión del párrafo anterior y la que acabamos de escribir pueden formularse simultáneamente para expresar una doble relación de causa y efecto, en un modelo con ecuaciones simultáneas. Estos modelos tienen la facultad de describir situaciones más complejas, en las que se desee, además de la fidelidad a nuestra concepción de la realidad, la obtención de previsiones coherentes de varias variables.

| | TÉCNICAS | | |
|---|---|---|---|
| CRITERIOS: | Análisis de la serie temporal | Modelo explicativo | |
| | | Regresión simple | Ecuaciones simultáneas |
| Consideración de condiciones externas | NO | SÍ | SÍ |
| Detección de puntos de transición | SÍ (sólo estacionalidad y ciclo) | SÍ (limitado) | SÍ |
| Previsión consistente de eventos relacionados | NO | NO | SÍ |
| Expresa naturaleza dinámica del sistema | NO | SÍ (limitado) | SÍ |
| PRECISIÓN: | | | |
| - Corto plazo (0 a 3 meses) | Buena a excelente | Buena a Muy buena | Buena a Muy buena |
| - Medio plazo (3 meses a 2 años) | Pobre a buena | Buena a Muy buena | Buena a Excelente |
| - Largo plazo (más de 2 años) | Muy pobre | Pobre | Buena |

*Fig. 2.1.1.3 Características de los procedimientos de previsión*

No hay un criterio universal que permita determinar qué técnica de proyección es la mejor en cada caso. En la *figura 2.1.1.3* se sugieren varios criterios para la elección del tipo de modelo. La proyección debería considerar y acomodar las condiciones externas, esto es, reflejar el entorno existente y a ser posible anticipar eventuales cambios en el mismo y cambios potenciales de políticas. La capacidad de detectar puntos de transición debidos a cambios en el mercado o en la estrategia es una cualidad muy importante. Una técnica de proyección debería dar resultados consistentes para las variables asociadas a fenómenos relacionados, como previsiones múltiples para ventas, costes y beneficios. Además un modelo de proyección debería ser capaz de expresar el caracter dinámico de las variables del mismo que pueden ser dependientes del tiempo e interaccionarse mutuamente entre ellas. La fiabilidad de una previsión es función de lo adecuado del modelo formulado en cada caso; pero la adecuación del modelo resulta de la interpretación de la naturaleza del fenómeno estudiado y no de pruebas más o menos estadísticas.

### 2.1.1.2 Modelo tipo

Un modelo traduce un conjunto de hipótesis relativas a un fenómeno presentando rigurosamente, y en forma cuantitativa, las variables que son necesarias para su comprensión y sus relaciones. Un modelo se utiliza no sólo para reflejar el comportamiento de la realidad sino para anticiparlo, pudiéndose contrastar dicho anticipo con los hechos observados. En la *figura 2.1.1.4* se representa un esquema tipo que refleja la toma de decisiones, donde:

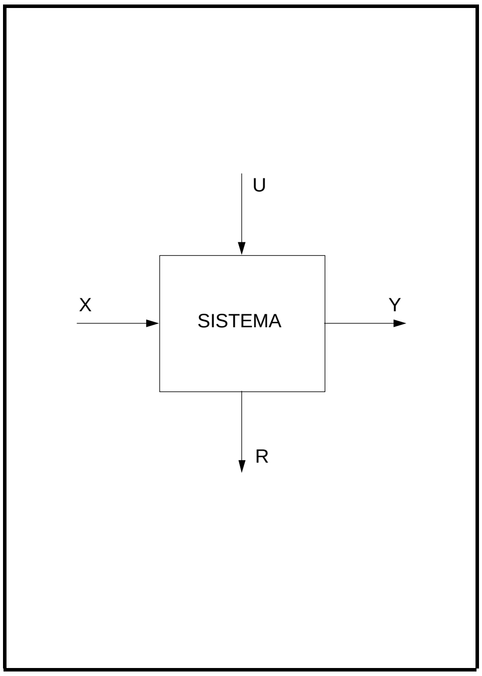


*Fig. 2.1.1.4* Gobierno o control de un sistema: *El control del sistema se obtiene eligiendo el valor adecuado de las variables de acción U, para que combinadas con el valor de las entradas X proporcione un salida Y dentro de cierto dominio admisible y el máximo del rendimiento R*

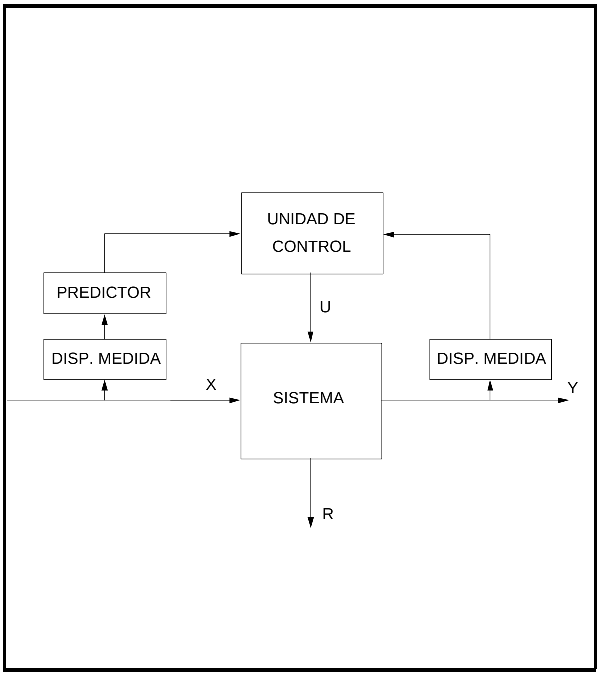


*Fig. 2.1.1.5* Predictor: *la unidad de control que define el valor de U precisa una estimación de los valores futuros de la entrada X*

U: resultado de la decisión (variables de acción mediante las cuales el decisor actúa sobre el sistema que desea controlar o gobernar),

X: entrada (variables independientes, no controlables por el decisor, que representan la actuación del entorno sobre el sistema),

Y: salida (variables que reflejan la respuesta del sistema a la entrada y a las variables de acción, generalmente el decisor pretende mantener dichas variables dentro de unos intervalos dados, es decir bajo control),

R: rendimiento del sistema (aunque de hecho se trata de una salida generalmente miden la eficiencia de las decisiones tomadas y el decisor desea que adopten valores máximos).

Consideremos ahora la variable tiempo y que los sistemas poseen una cierta histéresis. Nos interesa no sólo que el valor de R sea satisfactorio hoy, sino que lo siga siendo en el futuro, ya que los rendimientos suelen ser acumulativos y su bondad se debe medir por valores acumulados o medios sobre un período largo y no por valores instantáneos. Por tanto nos damos cuenta fácilmente de que la elaboración de una decisión eficiente hoy debería tener en cuenta no sólo el valor presente y la historia de X (y de U) sino también los valores futuros de X. En la *figura 2.1.1.5* hemos representado una extensión del modelo, en la que la denominada UNIDAD DE CONTROL (que representa al decisor) que elabora los valores de U a partir de la información indicada. Aparece el módulo PREDICTOR, que suministra la estimación de los valores futuros de X, y el DISPOSITIVO DE MEDIDA, que fatalmente introduce una distorsión en la entrada, por lo que se puede definir:

$X^0$: parte observable de la entrada (eventualmente con ruido o perturbación incorporada,

$Y^0$: parte observable de la salida (id.)

No efectuamos ninguna consideración similar respecto a R, por cuanto si R sirve para evaluar la eficiencia debe ser tangible. Soslayamos igualmente la forma de determinar U, conocido $X^0$, por cuanto la misma corresponde a los desarrollos correspondientes a cada uno de los tipos de decisión que desarrollamos en otros capítulos; únicamente postulamos la existencia de un modelo formal del comportamiento del sistema (respuesta obtenida a unas solicitudes X y U) dentro de la unidad de control, ya que es necesario el conocimiento de $Y^0$ y de R para poder ajustarlo y contrastarlo.

En algunas circunstancias podremos asumir que la entrada está generada por algunos factores exógenos, que representamos por E en la *figura 2.1.1.6*. En dichas circunstancias tendremos:

E : variables exógenas (factores elementales independientes, que definen unívocamente el valor de la entrada, y cuya proyección es sencilla),

$E^0$: parte observable de las variables exógenas.

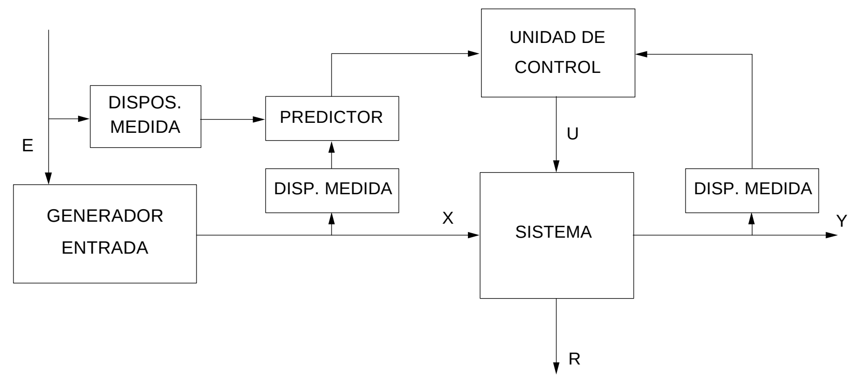


*Fig. 2.1.1.6 Elaboración de la proyección a partir del conocimiento de las variables exógenas*

El problema que nos planteamos en el predictor es, por consiguiente, el de determinar la relación entre E y X. Incluso en el caso determinista y en ausencia de ruido, la correspondencia exacta entre X y E, o entre $X^0$ y $E^0$ nos será desconocida, y deberemos deducirla del comportamiento histórico del pasado. Para continuar adoptaremos la posición de que siéndonos inasequible el conocimiento estricto de X y de E, debemos considerar a $X^0$ y $E^0$ haciendo sus veces, lo que traerá como consecuencia que en prácticamente todas las circunstancias la relación que percibiremos entre X y E será no-determinista.

Consideremos una situación estática donde a cada entrada E(*i*) producida espontáneamente o bien provocada a través de un experimento, le ha sucedido una respuesta observada X(*i*); se dispone de los datos correspondientes a varias parejas (E(*i*),X(i)), *i*=1,2,3,....,*n*. La manera habitual de proceder consiste en definir la forma de la relación entre X y E a partir de consideraciones teóricas ligadas con la naturaleza del fenómeno observado, aunque en dicha definición falten por concretar los valores precisos de ciertos parámetros que se deducirán de los datos. Sea, por ejemplo, dicha forma F(*E,a,b,c,..*) donde *a,b,c,...* son los parámetros en cuestión. Cuando los parámetros hayan recibido unos valores, a cada entrada E le corresponderá un valor de F, que llamaremos habitualmente en forma abusiva *teórico*; en particular para los valores E(*i*) podremos obtener unos valores F(*i*) que idealmente deberían coincidir con los valores *reales* X(*i*) pero que debido a las perturbaciones, al conocimiento parcial y a la naturaleza aleatoria de la relación aceptaremos que tengan una cierta desviación respecto a aquéllos. En un espacio de *n* dimensiones podemos considerar el punto **X** cuyas componentes son las X(*i*) y el punto **F** cuyas componentes son las *F(E(i),a,b,c,....)*; ambos puntos *idealmente* deberían estar confundidos pero por las razones antedichas aceptamos que entre ellos exista una cierta *distancia* (*fig. 2.1.1.7*). Paradójicamente, uno de los criterios más ampliamente utilizados para la determinación de los valores de los parámetros consiste en buscar aquellos que minimizan la distancia entre ambos puntos. Dado que una de las distancias con más tradición es la euclídea, dicha minimización conduce a métodos de mínimos cuadrados (que no son ni los únicos ni los obligatorios).

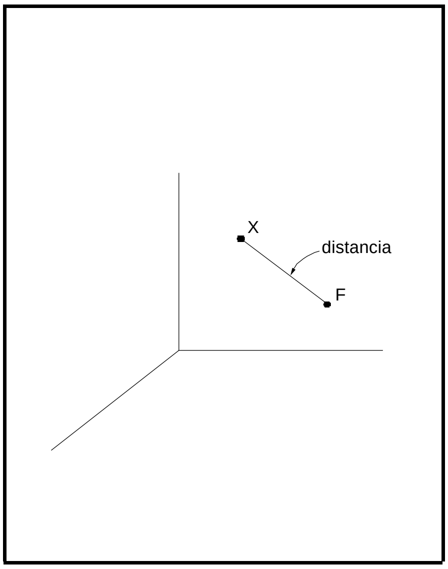


*Fig. 2.1.1.7 Distancia entre el vector de observaciones X y el vector de valores teóricos F*

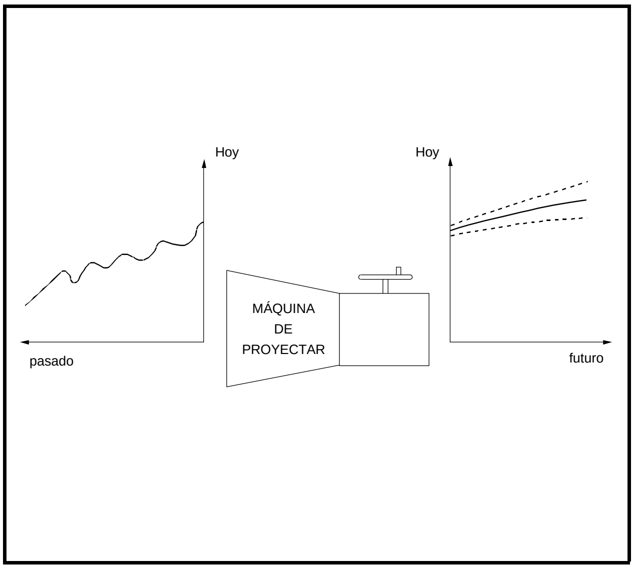


*Fig. 2.1.1.8* Máquina de elaborar proyecciones: *Alimentado por los datos históricos del pasado, el procedimiento de proyección estima los valores futuros con un cierto intervalo de imprecisión, mayor a medida que más lejos del presente se encuentra la proyección*

El razonamiento anterior se plasma aceptablemente mediante la suposición de que la relación entre la entrada y la respuesta es:

$$X = F(E, a, b, c, \ldots) + \theta$$

donde θ es el resultado de todas las perturbaciones y aleatoriedades, una variable aleatoria de media nula. Sometiendo a esta variable aleatoria a hipótesis cada vez más restrictivas es posible relacionar muchas propiedades de las estimaciones realizadas de los valores de los parámetros, y de las predicciones sobre las respuestas X que efectuemos.

Como ya hemos indicado, sin embargo, la situación en que nos encontramos es dinámica, participando en la misma la variable tiempo. Tanto E como X son variables que evolucionan en *t*: E(t), X(t) y están definidas habitualmente para los valores de *t* correspondientes a la recta real (caso continuo) o a los números enteros (caso discreto). El conocimiento disponible en un instante dado de los valores de dichas variables es limitado, sólo podemos postular el conocimiento del pasado y del presente para X y para E, aunque el futuro de E lo supondremos aceptablemente conocido en virtud de otra proyección. Si somos más pragmáticos incluso pondremos cotas a este conocimiento, limitándolo a un entorno reducido del presente, y a un conjunto de valores discretos de *t*. Afortunadamente nuestra convicción de que el futuro no influye en el pasado nos permitirá proceder tal como ya hemos indicado.

Supongamos que, para los valores $t = 1,2,3,\ldots,T$, hemos recopilado los valores de las entradas E(*t*), así como el de las respuestas X(*t*) la forma de la función teórica podrá ser:

$$F(E(t), a, b, c, \ldots)$$

en la que hemos reducido el papel de la *memoria* al mínimo posible (prácticamente sólo *t*), evitando modelos con memoria *más larga* tales como:

$$F(E(t), E(t-1), a, b, c, \ldots)$$

siendo *a,b,c,...* los parámetros como antes. El ajuste de los parámetros (determinación de sus valores) se realizará habitualmente minimizando la distancia en el espacio de T dimensiones entre el punto **X** y el punto **F** (*fig. 2.1.1.7*).

Hallados los parámetros y alimentado el modelo con los valores E y *t* futuros obtendremos las proyecciones buscadas de X.

### 2.1.1.3 Modelos endógenos de análisis de series temporales: Concepto

Una serie temporal (serie cronológica o crónica) es una sucesión de observaciones de una misma variable asociada a un fenómeno, regularmente espaciadas en el tiempo. Esta naturaleza discreta de los datos puede resultar intrínseca al fenómeno de que la información sólo está disponible en ciertos instantes o puntos en el tiempo, de que hemos sometido un fenómeno continuo a un muestreo o discretización, o a que son valores acumulados a lo largo de ciertos intervalos. En este último caso el intervalo de muestreo, unidad de tiempo considerada, puede ser un día, una semana, o varias, dependiendo de la naturaleza de la aplicación y de la finalidad de la proyección (no pueden pescarse peces de dimensión inferior a la malla de la red). Obviamente la elección del intervalo de muestreo (cuando se puede elegir) tiene mucha influencia en los datos, en el mismo sistema de proyección, y en los resultados obtenidos.

Llamaremos $x_t$ a la observación realizada en el instante *t* o correspondiente a él.

Los datos que realmente representan el proceso en estudio son una parte importante de un sistema de proyección válido. Por ejemplo, en el control de stocks y de producción debe partirse de la proyección de la demanda, es decir, las necesidades reales del cliente. Sin embargo los datos disponibles suelen ser ventas, expediciones a los clientes, facturación o algo similar. Aunque todas estas informaciones están muy relacionadas con la demanda, pueden diferir de ella en forma que perturben una proyección basada en ellas: las ventas no tienen en cuenta las no realizadas a causa de rupturas de stock, las expediciones están distorsionadas respecto a la demanda en lo anterior y por los plazos, etc.

Los datos usados para proyectar están sujetos a errores de transcripción y transmisión (como todos los demás), y por tanto deben ser depurados, filtrados y corregidos previamente.

En el análisis de series temporales actuamos sin considerar ninguna variable exógena exceptuando *t*, lo cual equivale a aceptar una de las dos posiciones siguientes (o ambas):

a) Durante el intervalo temporal considerado, *historia* + *horizonte*, el valor de E permanece invariable.

b) La evolución de E está explicada a través del modelo de proyección y la variable *t*.

En definitiva nos encontramos en situación semejante a la que nos plantean los tests o problemas lúdicos, en los que se da una sucesión de números y se pregunta cuál es el siguiente, por ejemplo:

I) 3, 14, 39, 84, 155, 258, ...............?

II) 1, 6, 20, 56, 144, 352, ...............?

III) 1, 3, 7, 12, 18, 20, 29,..........?

IV) 19, 23, 22, 7, 46, 13, ...............?

Muy probablemente el lector proyectará fácilmente las sucesiones I y II, tal vez logrará hacer lo propio con la III, pero más duro le será determinar la ley que corresponde a la IV. Y sin embargo leyes matemáticas estrictas que sean capaces de generar cualquiera de las sucesiones anteriores existen a millares, basta recordar que una progresión aritmética de orden $n$ queda determinada por $n+1$ valores (por tanto en los casos anteriores con progresiones aritméticas de orden 5 o 6 tenemos una solución del problema, tal vez no LA SOLUCIÓN). Lo que nos hace rechazar algunas de dichas soluciones es la creencia de que la verdadera solución, la que pensó el autor, es más sencilla. Pero, ¿qué quiere decir más sencillo? En las sucesiones anteriores aparte de que los valores generados son enteros probablemente casi nada más.

En el caso general de la proyección de series temporales observadas en ciertos fenómenos y no fabricadas con fines de divertimento cabe formular algunas matizaciones. La hipótesis de que el modelo a utilizar es sencillo no debe desdeñarse, ya que a nuestro entender es la suposición básica de que en el pasado estuvo en la génesis de las ciencias físicas y químicas, pero el dilucidar hasta qué nivel de sencillez es conveniente recurrir sólo pueden responder la experiencia y la experimentación. Recuérdese que lo que se pretende es proyectar, no representar de la mejor forma posible los datos históricos. Sabemos que por $n+1$ puntos pasa una parábola de orden n, lo que se traduce en que podemos lograr ajustes tan estrechos como deseemos si disponemos de suficientes parámetros de ajuste. Sin embargo nuestro interés no es el de ajustarnos a los puntos del pasado sino a los del futuro. Sólo será válido realizar grandes y sofisticados análisis y pruebas estadísticas en los datos históricos si presuponemos que nuestro modelo (o familia de modelos) es adecuado y que toda la estructura del fenómeno se halla ya en la historia disponible.

### 2.1.1.4 Componentes de una serie temporal

Toda tentativa de explicación de un fenómeno a partir de las observaciones disponibles nos lleva a considerar las causas que pueden concurrir en la elaboración del fenómeno estudiado. En el esquema explicativo adoptado cada causa se suele explicar por un componente particular de la serie, considerando que dos causas son diferentes únicamente si hacen intervenir el tiempo de manera distinta. Habitualmente se consideran los siguientes componentes de toda serie temporal (*fig. 2.1.1.9*):

a) La tendencia (en inglés *trend*)

   Corresponde a la evolución de la crónica durante un período de tiempo largo, del orden de una decena de años, por ejemplo, de carácter global creciente o decreciente. Este crecimiento general se representa frecuentemente en forma lineal o exponencial. La tendencia encuentra su explicación en la acción de factores tales como el crecimiento demográfico o la elevación del nivel de vida, cuyo efecto es aumentar el valor global del consumo.

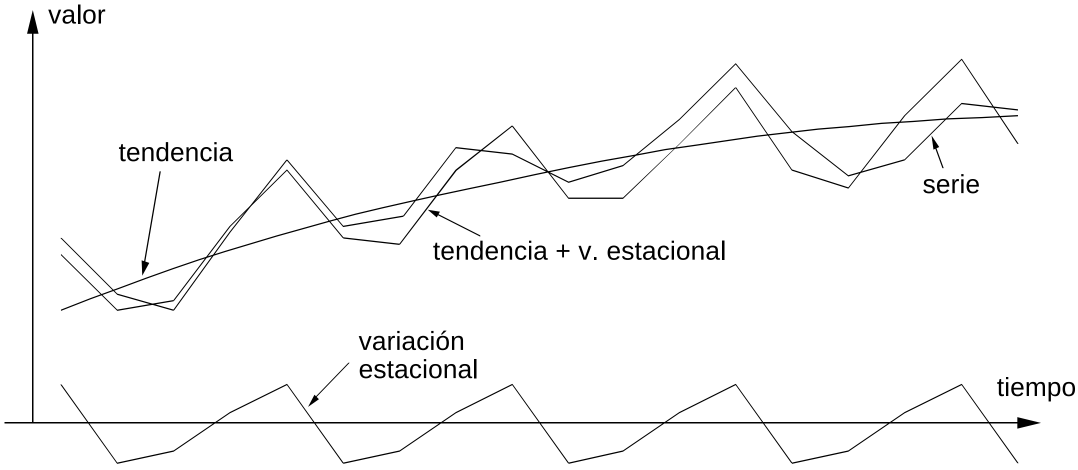


*Fig. 2.1.1.9* Modelo básico del análisis de series temporales: *El valor observado de la serie temporal se considera la resultante de tres componentes: la tendencia, la variación estacional y el álea o ruido. Hemos prescindido de la variación cíclica*

b) El ciclo (en ingles *cycle*)

Si se observan períodos más cortos, de 3 a 8 años, se aprecian a veces en la evolución de la crónica unas variaciones de forma sinusoidal, que son las variaciones cíclicas, y expresan la alternancia de las fases de expansión y de recesión. Estas variaciones no deben confundirse con las variaciones estacionales, cuyo ritmo está ligado con el de los meses y de las estaciones. Las empresas existentes antes de la 2ª Guerra Mundial recuerdan, en ocasiones con amargura, las crisis económicas que consideraban como una plaga fatal. De hecho, el análisis de los ciclos en las series cronológicas ha empezado antes que el de la tendencia. En aquellos tiempos ésta no era lo suficientemente importante como para compensar las violentas oscilaciones de los ciclos. Actualmente, después de la 2ª Guerra Mundial, las cosas han cambiado; los ciclos siguen existiendo, especialmente después de la crisis del petróleo, pero además la pendiente de las tendencias se ha incrementado (en valor absoluto) notablemente. En lo que sigue no consideraremos el ciclo, el horizonte de la previsión será en general lo suficientemente corto comparado con el período del ciclo, para que podamos considerar los efectos de éste incorporados en la evolución de la tendencia.

c) Las variaciones estacionales (en inglés *seasonality*)

A escala semanal, mensual o anual se observan unas fluctuaciones cuyo trazado se reproduce casi idénticamente de un período a otro. El simple examen gráfico de la serie temporal permite darse cuenta de su importancia. La aparición periódica de estas variaciones está ligada al ritmo de la vida cotidiana: horas punta, estaciones, fiestas, períodos de frío o calor, vacaciones, etc. Todas las empresas, y singularmente las que están en contacto directo con el consumidor final, conocen el caracter estacional de sus ventas. Citemos como ejemplo:

- los salones monográficos (por ejemplo SONIMAG para la industria del audiovisual, el SIMO para la industria informática, etc.);
- las fiestas de fin de año para la industria del disco;
- los períodos de vacaciones para la industria hotelera (punta);
- los mismos períodos para la industria de electrodomésticos (valle);
- el comienzo del curso escolar para la industria de confección para niños;

Los ejemplos son abundantes, casi se pueden enunciar tantos como tipos de empresa. Las puntas estacionales en el transcurso de una año (o los valles) pueden ser únicos (vacaciones largas de verano), dobles (Pascua y comienzo de curso escolar en la confección para niños), múltiple (inicio y fin de mes para la salida de billetes en los bancos y cajeros automáticos). Pueden ser simples o compuestos; en un banco se distinguen ciclos mensuales y ciclos anuales que se superponen.

d) Los áleas o componentes aleatorias (en inglés *random variations*)

Traducen el carácter imprevisible de multiples causas, generalmente muy difíciles de enumerar y aislar y prácticamente imposible de medir en extensión y repercusión, que introducen ciertas variaciones entre las distintas observaciones. Por ejemplo, las ventas de un detallista de confección dependen del número de sábados y de su posición respecto al fin de mes (proximidad de la nómina percibida o a percibir), de las consideraciones meteorológicas, de la moda, de la disposición del escaparate y de los mostradores, del número de personas que pasan por la calle, de las condiciones políticas y sociales (huelgas, elecciones, subida de precios y/o de salarios, etc.), de la simpatía de los vendedores (o sus circunstancias personales dentro de un período dado que influyan en su comportamiento), de los plazos de reaprovisionamiento, etc. Todas estas circunstancias, algunas de las cuales son dificílmente cuantificables, se reagrupan en una componente *caja de Pandora*, el álea.

Con estas componentes puede formularse un modelo aditivo o multiplicativo (o mixto). En el esquema aditivo:

(tendencia + ciclo + var.estacional + álea)

la acción de cada una de las componentes sobre el valor total observado es independiente de los valores tomados por las otras componentes. Así, por ejemplo, el efecto de la estacionalidad será el mismo tanto si el nivel de la tendencia es elevado como si no lo es.

En el esquema multiplicativo:

(tendencia x ciclo x var.estacional x álea)

la acción es relativa, el efecto de la estacionalidad se manifiesta con una amplitud mayor a medida que la tendencia crece, como ocurre frecuentemente en la práctica. Debido a ello este esquema se usa a menudo, y se puede pasar al anterior considerando los logaritmos de las observaciones como crónica a proyectar.

Supondremos en nuestro desarrollo que no hay variaciones cíclicas, o bien las consideraremos incluidas en la tendencia. Según la naturaleza del fenómeno estudiado será importante determinar la tendencia o la estacionalidad o ambas a la vez. Si la serie está formada por valores anuales no va a jugar la estacionalidad; por el contrario, si los valores son mensuales, semanales o diarios, las variaciones estacionales pueden enmascarar la tendencia si no las consideramos como tales, y se tendrán que tener en cuenta para efectuar proyecciones correctas.

### 2.1.2 Determinación de la tendencia

A continuación vamos a considerar el caso de series temporales desprovistas de estacionalidad, y analizaremos diversos procedimientos para ajustar la tendencia: mínimos cuadrados, medias móviles y ajuste exponencial.

#### 2.1.2.1 Ajuste por mínimos cuadrados de una función lineal (métodos de regresión)

Muchas series temporales pueden representarse como una función lineal del tiempo, es decir, incluyendo el álea (ruido o perturbación):

$$x_t = a + b \cdot t + \theta_t$$

donde $\theta_t$ es la perturbación, por lo que supondremos que su valor medio es 0:

$$E[\theta_t] = 0$$

Disponemos de $T$ valores históricos de $x_t$, distribuidos uniformemente en el tiempo, que designaremos por:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_T$$

es decir, identificamos el origen de tiempos en el intervalo anterior a la primera observación. Téngase en cuenta que la situación del origen de tiempos es totalmente arbitraria e indiferente para los procedimientos que detallaremos (siempre que sepamos donde está). A veces situaremos dicho origen tal como hemos hecho en este caso, en ocasiones nos será más cómodo situarlo centrado, y en otras (cuando consideremos la *antigüedad* de los datos) nos convendrá situarlo al final, en la posición temporal del último valor conocido.

Nuestro deseo es el de obtener unos valores para $a$ y $b$, de hecho los *mejores* valores posibles; dichos valores los denominaremos *estimaciones* de $a$ y $b$ y los escribiremos $\hat{a}$ y $\hat{b}$. Los mejores valores serán evidentemente los que nos permitan prever mejor el futuro, pero por motivos obvios, deberemos contentarnos con los que mejor *explican* el pasado. Para ello buscaremos una manera de medir la *distancia* entre los valores *reales* (los de la serie temporal) y los *teóricos*, dados por la fórmula tomando para $\theta_t$ su valor medio (cero), es decir:

$$\hat{a} + \hat{b} \cdot t$$

y de reducirla al mínimo. Una forma es medir la distancia mediante la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores reales y teóricos, y buscar las $a$ y $b$ que minimizan dicha suma (de donde resulta el nombre *mínimos cuadrados*). Tenemos pues:

$$[MIN] \; SSE = \sum_{t=1}^{T} \left[ x_T - \hat{a} - \hat{b} \cdot t \right]^2$$

que se minimiza derivando SSE respecto a $\hat{a}$ y a $\hat{b}$, e igualando a cero dichas derivadas, lo que conduce al sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\hat{a} \cdot T \quad + \hat{b} \cdot \sum_{t=1}^{T} t = \sum_{t=1}^{T} x_t$$

$$\hat{a} \cdot \sum_{t=1}^{T} t + \hat{b} \cdot \sum_{t=1}^{T} t^2 = \sum_{t=1}^{T} t \cdot x_t$$

y recordando el valor de la suma de los $T$ primeros números naturales y de sus cuadrados obtenemos:

$$\hat{a} = \frac{2 \cdot (2 \cdot T + 1)}{T \cdot (T - 1)} \cdot \sum_{t=1}^{T} t \quad - \frac{6}{T \cdot (T - 1)} \cdot \sum_{t=1}^{T} t \cdot x_t$$

$$\hat{b} = \frac{12}{T \cdot (T^2 - 1)} \cdot \sum_{t=1}^{T} t \cdot x_t - \frac{6}{T \cdot (T - 1)} \cdot \sum_{t=1}^{T} x_t$$

o bien, llamando P y Q a:

$$P = \sum_{t=1}^{T} x_t \quad ; \quad Q = \sum_{t=1}^{T} t \cdot x_t$$

las fórmulas serán:

$$\hat{a} = \frac{2 \cdot (2 \cdot T + 1)}{T \cdot (T - 1)} \cdot P - \frac{6}{T \cdot (T - 1)} \cdot Q$$

$$\hat{b} = \frac{12}{T \cdot (T^2 - 1)} \cdot Q - \frac{6}{T \cdot (T - 1)} \cdot P$$

y llamando *E(T), F(T)* y *G(T)* a:

$$E(T) = \frac{2 \cdot (2 \cdot T + 1)}{T \cdot (T - 1)}$$

$$F(T) = \frac{6}{T \cdot (T - 1)}$$

$$G(T) = \frac{12}{T \cdot (T^2 - 1)}$$

tendremos:

$$\hat{a} = E(T) \cdot P - F(T) \cdot Q$$

$$\hat{b} = G(T) \cdot Q - F(T) \cdot P$$

habiendo tabulado los valores de los coeficientes *E(T), F(T)* y *G(T)* en la tabla de la *figura*

*2.1.2.1.*

| *T* | *E(T)* | *F(T)* | *G(T)* | *T* | *E(T)* | *F(T)* | *G(T)* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 11 | 0,4182 | 0,05455 | 0,009091 |
| 2 | 5 | 3 | 2 | 12 | 0,3788 | 0,04545 | 0,006993 |
| 3 | 2,3333 | 1 | 0,5000 | 13 | 0,3462 | 0,03846 | 0,005495 |
| 4 | 1,1000 | 0,5000 | 0,2000 | 14 | 0,3187 | 0,03297 | 0,004396 |
| 5 | 1,1000 | 0,3000 | 0,1000 | 15 | 0,2952 | 0,02857 | 0,003571 |
| 6 | 0,8667 | 0,2000 | 0,05714 | 16 | 0,2750 | 0,02500 | 0,002941 |
| 7 | 0,7143 | 0,1429 | 0,03571 | 17 | 0,2574 | 0,02206 | 0,002451 |
| 8 | 0,6071 | 0,1071 | 0,02381 | 18 | 0,2418 | 0,01961 | 0,002064 |
| 9 | 0,5278 | 0,08333 | 0,01667 | 19 | 0,2281 | 0,01754 | 0,001754 |
| 10 | 0,4667 | 0,06667 | 0,01212 | 20 | 0,2158 | 0,01579 | 0,001504 |

*Fig. 2.1.2.1 Valores de los coeficientes para la determinación de* $\hat{a}$ *y* $\hat{b}$*, parámetros de la recta de regresión*

La mejor estimación que podemos hacer del valor futuro, $x_{T+h}$, es su valor esperado o medio haciendo abstracción de la perturbación, para la que adoptamos también su valor medio, cero. Por tanto:

$$\hat{x}_{T+h} = \hat{a} + \hat{b} \cdot (T + h)$$

De hecho esta forma de estimar los valores medios (sin la perturbación) de la serie temporal es válida tanto para los valores futuros como para los pasados; pero como para los pasados ya tenemos un conocimiento más profundo, con perturbación incluida, sólo puede interesarnos el conocer la estimación del valor medio para efectuar comparaciones (como hemos hecho implícitamente al calcular el error cuadrático).

| Semana | Demanda | |
|---|---|---|
| $t$ | $x_t$ | $t \cdot x_t$ |
| 1 | 10 | 10 |
| 2 | 12 | 24 |
| 3 | 15 | 45 |
| 4 | 18 | 72 |
| 5 | 20 | 100 |
| Σ | 75 | 251 |

T = 5

*Fig. 2.1.2.2 Datos de la serie temporal ST01*

Con los datos de la *figura 2.1.2.2* relativos a la serie temporal ST01 obtenemos las siguientes estimaciones de $a$ y $b$:

$$\hat{a} = 1{,}1 \times 75 - 0{,}3 \times 251 = 7{,}2$$

$$\hat{b} = 0{,}1 \times 251 - 0{,}3 \times 75 = 2{,}6$$

$$\hat{x}_{5+h} = 7{,}2 + 2{,}6 \times (5 + h) = 20{,}2 + 2{,}6 \times h$$

de donde:

$$\hat{x}_6 = 22{,}8 \quad ; \quad \hat{x}_7 = 25{,}4 \quad ; \quad \hat{x}_8 = 28{,}0 \quad ; \quad \hat{x}_9 = 30{,}6 \quad ; \quad \text{etc.}$$

En general:

$$\hat{x}_t = 7{,}2 + 2{,}64 \times t$$

| Semana $t$ | Demanda (real) $x_t$ | valor teórico $\hat{x}_t = \hat{a} + \hat{b} \cdot t$ | diferencia $x_t - \hat{x}_t$ | error cuadrático $[x_t - \hat{x}_t]^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 9,8 | 0,2 | 0,04 |
| 2 | 12 | 12,4 | -0,4 | 0,16 |
| 3 | 15 | 15,0 | 0,0 | 0,00 |
| 4 | 18 | 17,6 | 0,4 | 0,16 |
| 5 | 20 | 20,2 | -0,2 | 0,04 |
| Σ | 75 | 75,0 | 0,0 | 0,40 |

*Fig. 2.1.2.3 Error cuadrático del ajuste por mínimos cuadrados de la serie temporal ST01*

### 2.1.2.2 Ajuste por mínimos cuadrados de una combinación lineal de funciones

Vamos a generalizar lo visto en el apartado anterior a expresiones que sean combinación lineal, con coeficientes a estimar, de funciones definidas. Por ejemplo:

$$x_t = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \theta_t$$

$$x_t = a_0 + a_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + a_3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + \theta_t$$

y en general:

$$x_t = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f_i(t) + \theta_t$$

Seguimos suponiendo:

$$E[\theta_t] = 0$$

$$V[\theta_t] = \sigma^2 \qquad \text{independiente de } t$$

$$COV[\theta_t, \theta_{t'}] = 0 \qquad \text{si } t \text{ es diferente de } t'$$

Adoptemos una notación matricial:

*a* es el vector (n,1) de las $a_i$

*f(t)* es el vector (n,1) de las $f_i(t)$

entonces:

$$x_t = a' \cdot f(t) + \theta_t$$

Si $\hat{a}$ es la estimación de *a*, $e_t$ será el residuo t-ésimo:

$$e_t = x_t - \hat{x}_t = \hat{a}' \cdot f(t)$$

y análogamente a lo anterior deseamos hallar el estimador que minimice la suma de los cuadrados de los residuos, aunque en esta ocasión los ponderaremos mediante unos pesos $w_{tt}$:

$$SSE = \sum_{t=1}^{T} w_{tt}^2 \cdot e_t^2$$

Sea:

*x* el vector (1,T) de las observaciones

*e* el vector (1,T) de los residuos

F la matriz (n,T): [*f(1) f(2) ... f(T)*]

θ el vector (1,T): $[\theta_1\ \theta_2\ \ldots\ \theta_T]$

$$W \text{ la matriz diagronal } (T,T) \quad \begin{pmatrix} w_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & w_{TT} \end{pmatrix}$$

Podemos escribir:

$$x = a' \cdot F + \theta$$

$$e = x - \hat{a}' \cdot F$$

$$SSE = (e \cdot W) \cdot (e \cdot W)' = e \cdot W \cdot W' \cdot e' = e \cdot W^2 \cdot e' = (x - \hat{a}' \cdot F) \cdot W^2 \cdot (x - \hat{a}' \cdot F)' =$$

$$= x \cdot W^2 \cdot x' - 2 \cdot \hat{a}' \cdot F \cdot W^2 \cdot x' + \hat{a}' \cdot F \cdot W^2 \cdot F' \cdot \hat{a}$$

Derivando respecto *a* e igualando a cero:

$$\frac{\delta SSE}{\delta \hat{a}} = -2 \cdot F \cdot W^2 \cdot x' + 2 \cdot F \cdot W^2 \cdot F' \cdot \hat{a} = 0$$

de donde:

$$F \cdot W^2 \cdot F' \cdot \hat{a} = F \cdot W^2 \cdot x'$$

y por consiguiente:

$$\hat{a} = (F \cdot W^2 \cdot F')^{-1} \cdot F \cdot W^2 \cdot x'$$

Puede demostrarse que el estimador *a* es insesgado:

$$E[\hat{a}] = (F \cdot W^2 \cdot F')^{-1} \cdot F \cdot W^2 \cdot E[x'] = (F \cdot W^2 \cdot F')^{-1} \cdot F \cdot W^2 \cdot E[F' \cdot a + \theta'] =$$

$$= (F \cdot W^2 \cdot F')^{-1} \cdot F \cdot W^2 \cdot F' \cdot a = a$$

y la matriz de covariancias del estimador mínimo cuadrático es:

$$V = E[(a - \hat{a})' \cdot (a - \hat{a})] = \sigma^2 \cdot (F \cdot W^2 \cdot F')^{-1} \cdot F \cdot W^2 \cdot (F \cdot W^2)' \cdot (F \cdot W^2 \cdot F')^{-1}$$

ya que:

$$E[\theta' \cdot \theta] = \sigma^2 \cdot I$$

Si *W* es la matriz unidad (todos los pesos iguales) entonces:

$$V = \sigma^2 \cdot (F \cdot F')^{-1}$$

La proyección tomará la forma:

$$\hat{x}_{T+h} = \hat{a}' \cdot f(T+h)$$

### 2.1.2.3 Intervalo asociado a la estimación

No podemos, en la mayoría de los casos, esperar que los valores futuros del fenómeno que estudiamos coincidan exactamente con las previsiones establecidas, aun en las circunstancias más favorables, es decir, aunque el comportamiento del fenómeno siga fielmente el esquema lineal adoptado, y ello por dos razones:

- no conocemos los valores exactos de $a_i$, sino solamente unas estimaciones de los mismos, cuyo parecido con los verdaderos dependerá del número de observaciones disponibles en la serie cronológica y del peso que represente en el fenómeno el álea $\theta_t$, ligado con el intervalo de valores o dispersión del mismo,

- el valor concreto que tomará para la observación futura dicho álea, que hemos estimado a través de su valor medio cero.

Ambas razones pueden aportar desviaciones aditivas. Una forma de tener en cuenta estas desviaciones consiste en definir un intervalo alrededor del valor estimado, dentro del cual deba estar el valor futuro con una cierta seguridad (o fuera del cual pueda encontrarse el valor futuro en pocas ocasiones cuya frecuencia mediremos a través de la aceptación de un riesgo).

El intervalo de confianza de $e_t$ será en general función de $t$ (es lógico esperar mayor *precisión*, por tanto menores $e_t$ para los valores futuros próximos, $t$ pequeña, que para los lejanos, $t$ grande).

Adoptando las hipótesis, relativamente fuertes, relativas al álea $\theta_t$, ya indicadas, con la nomenclatura del apartado anterior, tenemos que la variancia de la proyección:

$$V\left[\hat{x}_t\right] = V\left[\hat{a}' \cdot f(t)\right] = f(t)' \cdot V\left[\hat{a}\right] \cdot f(t) = f(t)' \cdot V \cdot f(t)$$

El valor $\sigma$ suele ser desconocido, por lo que deberemos substituirlo en los cálculos efectivos por una estimación, obtenida a partir de los datos históricos de la serie temporal:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{e' \cdot e}{T-n} = \frac{\sum \left(x_t - \hat{x}_t\right)^2}{T-n}$$

Aplicando este desarrollo al caso de función lineal obtenemos:

$$V\left[\hat{x}_t\right] = \hat{\sigma}^2 \cdot \left[ \frac{1}{T} + \frac{12 \cdot \left( t - \frac{T+1}{2} \right)^2}{T \cdot \left( T^2 - 1 \right)} \right]$$

que tiene en cuenta la imprecisión sobre *a* y *b*, y

$$V\left[e_t\right] = \hat{\sigma}^2 + V\left[\hat{x}_t\right] \simeq \hat{\sigma}^2 \cdot \left[ 1 + \frac{1}{T} + \frac{12 \cdot \left( t - \frac{T+1}{2} \right)^2}{T \cdot \left( T^2 - 1 \right)} \right]$$

En el caso de la serie temporal ST01 (en la que el número de datos disponibles es muy reducido) tendremos:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{0{,}40}{5 - 2} = 0{,}13333$$

con lo que se deducen los valores de la tabla de la *figura 2.1.2.4*:

| $t$ | $\hat{x}_t$ | $e_t$ | $VAR\left[\hat{x}_t\right]$ | $VAR\left[e_t\right]$ | $\hat{\sigma}\left[e_t\right]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9,8 | 0,2 | 0,08 | 0,2133 | 0,4618 |
| 2 | 12,4 | -0,4 | 0,04 | 0,1733 | 0,4163 |
| 3 | 15 | 0 | 0,0267 | 0,1600 | 0,4000 |
| 4 | 17,6 | 0,4 | 0,04 | 0,1733 | 0,4163 |
| 5 | 20,2 | 0,2 | 0,08 | 0,2133 | 0,4618 |
| 6 | 22,8 | ? | 0,1467 | 0,2800 | 0,5292 |
| 7 | 25,4 | ? | 0,24 | 0,3733 | 0,6110 |
| 8 | 28,0 | ? | 0,36 | 0,4933 | 0,7024 |
| 9 | 30,6 | ? | 0,5067 | 0,6400 | 0,8000 |

*Fig. 2.1.2.4 Variancia de la estimación por mínimos cuadrados de la serie temporal ST01 ($\hat{\sigma}\left[e_t\right]$ es la raíz cuadrada de $VAR\left[e_t\right]$)*

Hemos representado en la *figura 2.1.2.5* la recta, las observaciones, y la posición de unos límites a:

$$\pm\ 3{,}09 \cdot \hat{\sigma}\left[e_t\right]$$

siendo 3,09 el valor de la abscisa que en la ley normal centrada y reducida deja fuera un uno por mil de probabilidad, lo que nos permite decir si la distribución de $e_t$ es una distribución normal, que los valores futuros estarán en el 998 por mil de los casos en la zona delimitada por ambos límites. Los puntos que corresponden a las observaciones históricas de la serie temporal ya sabemos donde están, por tanto en dicha parte de la figura la situación de los límites sólo sirve para indicarnos, en su caso, la adecuación del modelo adoptado a las circunstancias.

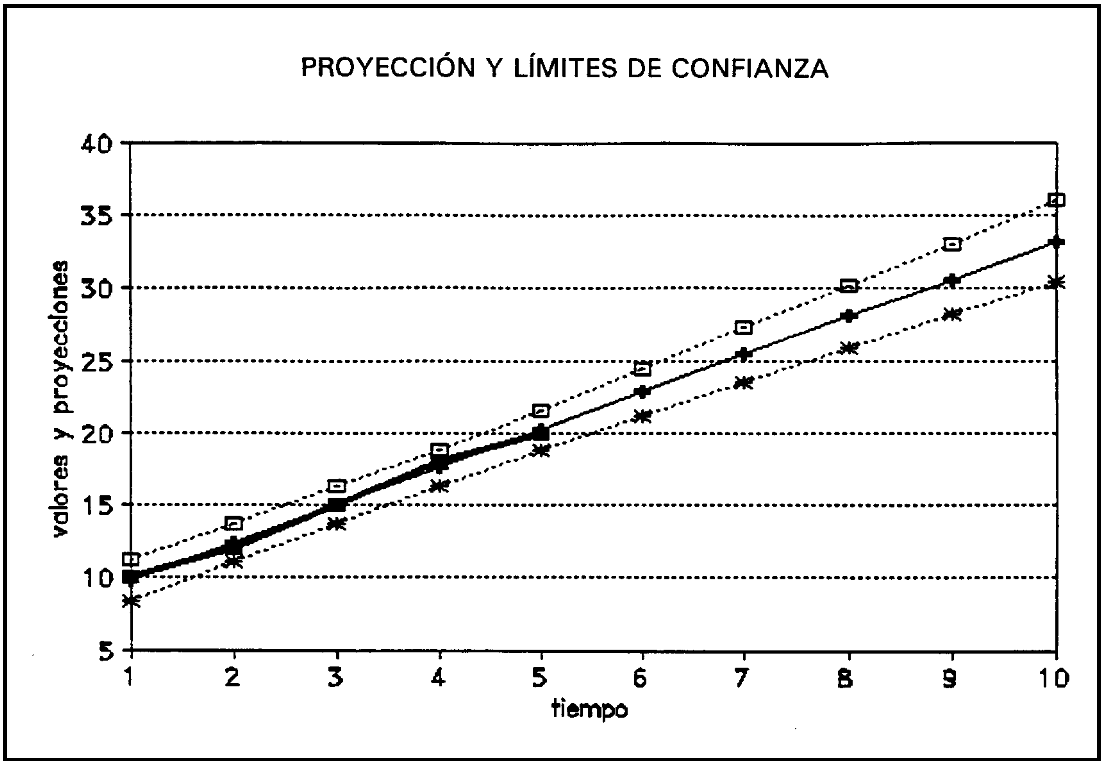


*Fig. 2.1.2.5* Ajuste de ST01: *Se ha ajustado una recta a los cinco valores de ST01, la cual proporciona la base para una proyección. Se han incluido los intervalos de confianza del 998 por mil*

### 2.1.2.4 Revisión de los valores estimados: integración de nueva información

Los valores *a* y *b* hallados son, en cierta forma, función de *T*, considerado como instante actual o último instante del que se disponen datos, y podemos escribir:

$$\hat{a} = \hat{a}(T)$$

$$\hat{b} = \hat{b}(T)$$

y análogamente con los valores de $P$ y $Q$:

$$P = P(T)$$
$$Q = Q(T)$$

Las estimaciones de los valores futuros, asimismo, dependen de las observaciones de que se dispone al hacer la estimación y por consiguiente del momento en que se hace ésta. Para no complicar excesivamente la nomenclatura hemos adoptado la escritura $x_{T+h}$, aunque en ocasiones deberemos hacer aparecer explícitamente el instante a que corresponde la estimación $T+h$, y aquél en que se hace la misma, $T$.

Si una vez realizadas las estimaciones, y transcurrido un período de tiempo disponemos de una nueva observación $x_{T+1}$ de la serie temporal, lo adecuado será incorporar la información aportada por la misma a la realización de las nuevas estimaciones, lo que en esencia conduce a realizar de nuevo los cálculos para la obtención de los valores de $a$ y de $b$. Sintéticamente deberemos efectuar las siguientes operaciones:

$$P(T+1) = P(T) + x_{T+1}$$
$$Q(T+1) = Q(T) + (T+1)\cdot x_{T+1}$$
$$\hat{a}(T+1) = E(T+1)\cdot P(T+1) - F(T+1)\cdot Q(T+1)$$
$$\hat{b}(T+1) = G(T+1)\cdot Q(T+1) - F(T+1)\cdot P(T+1)$$

de donde:

$$\hat{x}_{(T+1)+h} = \hat{a}(T+1) + \left[(T+1)+h\right]\cdot \hat{b}(T+1)$$

En el caso de ST01, si $x_6 = 24$, tendremos:

$$P(6) = 75 + 24 = 99$$
$$Q(6) = 251 + 6 \times 24 = 395$$
$$\hat{a}(6) = 0{,}86667 \times 99 - 0{,}2 \times 395 = 6{,}800$$
$$\hat{b}(6) = 0{,}05714 \times 395 - 0{,}2 \times 99 = 2{,}771$$

de donde:

$$\hat{x}_7 = 26{,}2 \quad ; \quad \hat{x}_8 = 29{,}0 \quad ; \quad \hat{x}_9 = 31{,}7 \quad ; \quad \hat{x}_{10} = 34{,}5 \quad ; \quad \text{etc.}$$