Capítulo 10 Renovación y mantenimiento

10.1 Conceptos

Las decisiones de renovación o substitución de equipos o elementos constitutivos del sistema productivo de una empresa forman parte del conjunto de aspectos que en el tomo I calificamos como *decisiones de diseño*. En algunos casos son decisiones muy importantes, tanto por la trascendencia económica que revisten como por las consecuencias posibles de un error de apreciación. En otras situaciones, sobre todo cuando es necesario tomar en cuenta los efectos de incidencias o averías aleatorias, pueden exigir para su modelización adecuada la utilización de técnicas cuantitativas. Vamos a efectuar en lo que sigue una presentación introductoria y esencialmente intuitiva. Básicamente analizaremos tres tipos de problemas de renovación:

- Renovación de equipos importantes (representando en general un inmovilizado apreciable) que, aun pudiendo utilizarse indefinidamente, su eficiencia de funcionamiento se degrada progresivamente con la edad.
- Renovación preventiva de equipos cuya fiabilidad disminuye con la edad, procurando que la renovación se anticipe a la avería y por tanto evite sus consecuencias, que pueden ser cuantiosas.
- Renovación preventiva de equipos, en fechas preestablecidas, para aprovechar la ventaja de las substituciones colectivas respecto a las individuales.

El mantenimiento, llamado también en ocasiones entretenimiento, tiene por objetivo conservar los equipos industriales en las condiciones de suministrar las prestaciones deseadas de los mismos. Incluye, por tanto, no sólo la reparación posterior a una avería, sino también todas aquellas actividades que se realizan sobre el equipo operativo para evitar o alejar la aparición de la misma. Tanto las averías como el mantenimiento reducen la disponibilidad del equipos para las operaciones productivas, lo que exige un adecuado dimensionamiento del mantenimiento tanto en el aspecto económico como temporal.

Parte de la problemática de estructuración y programación del mantenimiento preventivo tiene muchos puntos de contacto con aspectos descritos anteriormente con referencia a la renovación, específicamente los dos últimos casos enumerados. A dicha renovación se suman las consideraciones organizativas, informativas y operativas habituales de una actividad industrial fundamental para la buena marcha del sistema productivo.

10.1.1 Renovación de equipos importantes

Consideremos la siguiente situación: un equipo puede utilizarse casi indefinidamente, pero su rendimiento productivo disminuye con la edad (tal vez debido a que el coste de mantenimiento aumenta con la misma). Deseamos determinar a qué edad es conveniente, económicamente, substituir el equipo (vida económica del equipo) por otro nuevo idéntico (no tendremos en cuenta los posibles avances tecnológicos que permitirán que los nuevos equipos sean más eficientes que los antiguos). Utilizaremos la siguiente nomenclatura:

C coste de adquisición del equipo (precio de compra)

S_t valor residual del equipo de edad t, que se recuperará al adquirir un nuevo equipo

r_t rendimiento obtenido con el equipo (teniendo en cuenta los costes de funcionamiento y el mantenimiento) en el período comprendido entre la edad $t-1$ y t (supuesto referido al final del período, es decir, al instante t)

α coeficiente de actualización, igual a $(1 + i)^{-1}$

k edad del equipo en la que se procede a la substitución por otro nuevo.

El problema planteado es de la misma categoría que los estudiados referentes a la rentabilidad de inversiones (ver el **capítulo 2** del volumen I). La utilización de α en lugar del tipo de interés i permite simplificar las expresiones.

Si imaginamos una serie de equipos indefinida en el tiempo, cada uno de ellos substituido por el siguiente a la edad k, el rendimiento de uno de ellos actualizado al instante de su adquisición será:

$$-C + \alpha^k \cdot S_k + \sum_{t=1}^{k} \alpha^t \cdot r_t$$

Para evaluar la rentabilidad de esta inversión al variar el valor de k aplicaremos el procedimiento de la anualidad equivalente, igualando la expresión anterior al valor actualizado de k valores idénticos imputados al principio de cada uno de los k períodos:

$$a + \alpha \cdot a + \alpha^2 \cdot a + \dots + \alpha^{k-1} \cdot a = a \cdot \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha}$$

Obtenemos:

$$R(k) = \frac{a(k)}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha^k}\cdot\left[-C + \alpha^k\cdot S_k + \sum_{t=1}^{k}\alpha^t\cdot r_t\right]$$

La maximización de $a(k)$ se obtiene maximizando $R(k)$, que de hecho es el valor actualizado del rendimiento neto de la sucesión indefinida de equipos. En el caso en que $\alpha = 1$, $R(k)$ adopta coherentemente un valor impropio; pero ahora el valor de las k anualidades idénticas es $k\cdot a$, lo que nos conduce a:

$$a(k) = \frac{1}{k}\cdot\left[-C + S_k + \sum_{t=1}^{k} r_t\right]$$

La mejor forma de calcular el valor de k óptimo en el contexto discreto es tabular $R(k)$ o $a(k)$.

Ejemplo R_1: El coste de un equipo nuevo es 5.000 *um*, y su rendimiento y valor de recuperación en función de su edad (en años) los siguientes:

edad t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_t	4.000	3.600	3.250	2.900	2.600	2.350	2.150	1.900	1.700	1.550
r_t	3.000	2.850	2.710	2.570	2.440	2.320	2.210	2.010	1.990	1.890

(1) k	(2) $\sum_{t=1}^{k} r_t$	(3) $-C + S_k$	(4) rendimiento por ciclo (2) + (3)	(5) $a(k)$ (4) / (1)	
1	3.000	-1.000	2.000	2.000	
2	5.850	-1.400	4.450	2.225	
3	8.560	-1.750	6.810	2.270	*
4	11.130	-2.100	9.030	2.257,5	
5	13.570	-2.400	11.170	2.234	
6	15.890	-2.650	13.240	2.206,7	
7	18.100	-2.850	15.250	2.178,6	
8	20.110	-3.100	17.010	2.126,2	
9	22.100	-3.300	18.800	2.088,9	
10	23.990	-3.450	20.540	2.054	

Fig. 10.1.1.1 Cálculo de la anualidad equivalente

Empezaremos considerando $\alpha = 1$, es decir, sin actualización. Los diferentes valores de $a(k)$ los hemos tabulado en la *figura 10.1.1.1*, de la que se deduce que la edad óptima de substitución es $k = 3$ años, con un rendimiento anual equivalente de 2.270 *um*.

Consideremos ahora una tasa de actualización del 12% anual, con lo que el coeficiente de actualización será: $\alpha = \frac{1}{1{,}12} = 0{,}8929$. Los cálculos se resumen en la *figura 10.1.1.2*. La política óptima ahora consiste en substituir a los 5 años, siendo la anualidad equivalente $(1 - \alpha)\cdot R(5) = 1.577{,}68$ *um*. La comparación de este valor con el anterior debe tener en cuenta que hemos tomado como instante inicial el de la adquisición de uno de los equipos, momento en que se produce un fuerte desembolso. El valor $R(5) = 14.730{,}9$ *um* corresponde al rendimiento neto actualizado obtenido con la sucesión de los infinitos equipos, utilizado cada uno de ellos durante un ciclo de 5 años.

(1) $t\backslash k$	(2) α^t	(3) $\alpha^t \cdot r_k$	(4) $\sum_{t=1}^{k} \alpha^t \cdot r^t$	(5) $\alpha^k \cdot S_k$	(6) $-C + \alpha^k \cdot S_k$	(7) (4) + (6)	(8) $R(k)$
1	0,8929	2.678,6	2.678,6	3.571,4	-1.428,6	1.250,0	11.666,7
2	0,7972	2.272,0	4.950,6	2.869,9	-2.130,1	2.820,5	13.907,8
3	0,7118	1.928,9	6.879,5	2.313,3	-2.686,7	4.192,8	14.548,2
4	0,6355	1.633,3	8.512,8	1.843,0	-3.157,0	5.355,8	14.693,6
5	0,5674	1.384,5	9.897,3	1.475,3	-3.524,7	6.372,6	14.730,9 *
6	0,5066	1.175,4	11.072,7	1.190,6	-3.809,4	7.263,3	14.720,9
7	0,4523	999,7	12.072,4	972,6	-4.027,4	8.045,0	14.688,7
8	0,4039	811,8	12.884,2	767,4	-4.232,6	8.651,6	14.513,7
9	0,3606	717,6	13.601,8	613,0	-4.387,0	9.214,8	14.411,6
10	0,3220	608,5	14.210,3	499,1	-4.500,9	9.709,4	14.320,6

Fig. 10.1.1.2 Cálculo del valor actualizado

Una variante del caso estudiado consiste en considerar solamente costes. En dicho caso, el rendimiento bruto del equipo se supone idéntico en todos los períodos, pero su coste de funcionamiento, c_t (incluido el mantenimiento) crece con la edad. Las expresiones anteriores se transforman (escribiendo $\Gamma(k)$ en lugar de $R(k)$ ya que se trata del valor actualizado de un coste) en:

$$\Gamma(k) = \frac{a(k)}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha^k} \cdot \left[C - \alpha^k \cdot S_k + \sum_{t=1}^{k} \alpha^t \cdot c_t \right]$$

cuando $\alpha < 1$, y, cuando $\alpha = 1$, en:

$$a(k) = \frac{1}{k} \cdot \left[C - S_k + \sum_{t=1}^{k} c_t \right]$$

Naturalmente ahora debemos minimizar el coste actualizado o el coste equivalente (actualizado o no) por período.

Ejemplo R_2: Una camioneta nueva cuesta 5.000 *um* y sus costes de funcionamiento y el valor residual en función de la edad (en años) son los siguientes:

edad t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_t	4.000	3.600	3.250	2.900	2.600	2.350	2.150	1.900	1.700	1.550
c_t	800	920	1.060	1.220	1.400	1.610	1.850	2.130	2.450	2.810

Para $\alpha = 1$ tendremos los valores de la *figura 10.1.1.3* de los que se deduce que la edad óptima de substitución es 3 años, a la que corresponde un coste anual equivalente de 1.510 *um*.

(1) k	(2) $\sum_{t=1}^{k} c_t$	(3) $C - S_k$	(4) coste por ciclo (2) + (3)	(5) $a(k)$ (4) / (1)	
1	800	1.000	1.800	1.800	
2	1.720	1.400	3.120	1.560	
3	2.780	1.750	4.530	1.510	*
4	4.000	2.100	6.100	1.525	
5	5.400	2.400	7.800	1.560	
6	7.010	2.650	9.660	1.610	
7	8.860	2.850	11.710	1.672,9	
8	10.990	3.100	14.090	1.761,3	
9	13.440	3.300	16.740	1.860	
10	16.250	3.450	19.700	1.970	

Fig. 10.1.1.3 Cálculo de la anualidad equivalente

Considerando la tasa de interés del 12% anual, los cálculos serían los de la *figura 10.1.1.4*. La política óptima consiste ahora en substituir a los 4 años, siendo ahora la anualidad equivalente $(1-\alpha)\cdot\Gamma(4) = 1.803{,}3$ *um*. De nuevo la comparación de este valor con el anterior debe tener en cuenta que hemos tomado como instante inicial el de la

(1) $t \backslash k$	(2) α^t	(3) $\alpha^t \cdot c_t$	(4) $\sum_{t=1}^{k} \alpha^t \cdot c^t$	(5) $\alpha^k \cdot S_k$	(6) $C - \alpha^k \cdot S_k$	(7) (4) + (6)	(8) $\Gamma(k)$
1	0,8929	714,3	714,3	3.571,4	1.428,6	2.142,9	20.000,4
2	0,7972	733,4	1.447,7	2.869,9	2.130,1	3.577,8	17.641,5
3	0,7118	754,5	2.202,2	2.313,3	2.686,7	4.888,9	16.962,4
4	0,6355	775,3	2.977,5	1.843,0	3.157,0	6.134,5	16.830,7 *
5	0,5674	794,4	3.771,9	1.475,3	3.524,7	7.296,6	16.867,9
6	0,5066	815,7	4.587,6	1.190,6	3.809,4	8.397,0	17.019,7
7	0,4523	836,8	5.424,4	972,6	4.027,4	9.451,8	17.258,8
8	0,4039	860,3	6.284,7	767,4	4.232,6	10.517,3	17.643,0
9	0,3606	883,5	7.168,2	613,0	4.387,0	11.555,2	18.072,2
10	0,3220	904,7	8.072,9	499,1	4.500,9	12.573,8	18.544,7

Fig. 10.1.1.4 Cálculo del coste actualizado

Los desarrollos anteriores presuponen, como ya se ha indicado, que el equipo objeto del estudio será necesario indefinidamente en el futuro y por ello consideramos una cadena también indefinida de ciclos de substitución. En el caso de que no fuese así, es decir, que considerásemos un horizonte finito de utilización del equipo, la problemática es sorprendentemente más compleja y los procedimientos de resolución utilizarían la denominada ecuación de los tres tiempos o bien la programación dinámica. No obstante, algunas situaciones simples pueden resolverse mediante procedimientos elementales, como vamos a mostrar a continuación.

Ejemplo R_3: Supongamos que actualmente disponemos de una camioneta de edad 1 y precisamos disponer de ella únicamente 5 años más. Los datos son los indicados en el ejemplo anterior (supondremos que al deshacernos de la camioneta dentro de 5 años recuperaremos el valor residual S_t aunque no adquiramos una nueva) y tomaremos $\alpha = 1$. Sólo cabe considerar dos tipos de solución: en el primero no se substituye la camioneta actual durante los 5 años (última fila de la tabla de la *figura 10.1.1.5*), en el segundo se substituye por una segunda camioneta, en cuyo caso cabe buscar la edad más adecuada para proceder a ello. Los cálculos se han resumido en la *figura 10.1.1.5*, donde en la primera columna k es la edad de la primera camioneta cuando se substituye. El coste de la 1ª camioneta se indica en la columna (5) restando del coste de mantenimiento total el valor residual. El coste de la 2ª camioneta, columna (6) proviene directamente de la columna (4) de la *figura 10.1.1.3*, teniendo en cuenta que la utilización de la misma se extiende a $6 - k$ años. El coste total resulta de sumar los valores de las columnas (5) y (6). La fila correspondiente a $k = 6$ tiene un coste nulo de la 2ª camioneta, ya que en dicho caso se utiliza la 1ª durante los 5 años.

(1) $t \backslash k$	(2) c_k	(3) $\sum_{t=2}^{k} c_t$	(4) S_k	(5) (3) - (4)	(6) coste 2ª camioneta	(7) coste total
1	800	0	4.000	-4.000	7.800	3.800
2	920	920	3.600	-2.680	6.100	3.420
3	1.060	1.980	3.250	-1.270	4.530	3.260 *
4	1.220	3.200	2.900	300	3.120	3.420
5	1.400	4.600	2.600	2.000	1.800	3.800
6	1.610	6.210	2.350	3.860	——	3.860

Fig. 10.1.1.5 Cálculo del coste total

La solución óptima corresponde a substituir la 1ª camioneta a la edad 3 lo que lleva a utilizar la 2ª hasta que alcanza también la edad 3; el coste total es 3.260 *um*, es decir, en promedio 652 *um*/año. El que dicho valor sea notablemente menor de 1.510 *um*/año correspondiente a la solución óptima del caso de horizonte infinito es debido a los costes "hundidos" (adquisición de la primera camioneta y mantenimiento de la misma durante el primer año) que no intervienen en la determinación de la decisión en el presente caso y por tanto no han sido tomados en consideración.

Una manera alternativa de formalizar el procedimiento anterior es la que se ha representado en la *figura 10.1.1.6*, en la que la disponibilidad de la camioneta, en sus diversas variantes, queda representada por un camino del grafo entre el vértice P y el vértice F. Cada camino corresponde a una edad diferente de substitución de la primera camioneta. Asociado a cada uno de los arcos figura el coste correspondiente a adoptar la solución que corresponde al mismo. Por tanto, la solución óptima corresponderá al camino entre P y F de coste total mínimo.

Si $\alpha < 1$ el esquema de cálculo es semejante (*fig. 10.1.1.7*). La columna (7) se obtiene multiplicando α^{k-1} por el valor de la columna (7) de la *figura 10.1.1.4* (fila 5-k). La solución óptima consiste en substituir la camioneta cuando alcance los 3 años de edad, el coste total actualizado es 2.973,0 *um*, y el coste anual equivalente es 736,1 *um*.

Para comprobar la estabilidad de la solución determinada a largo plazo, supongamos que disponemos de una camioneta de edad 1 y analizamos cuándo la deberemos substituir con α = 0,8929 y horizonte infinito: es decir, una vez substituida la primera camioneta entraremos en una sucesión de camionetas con ciclo de 4 años. Como en el caso precedente distinguiremos entre el coste de la primera camioneta y el de todas las demás.

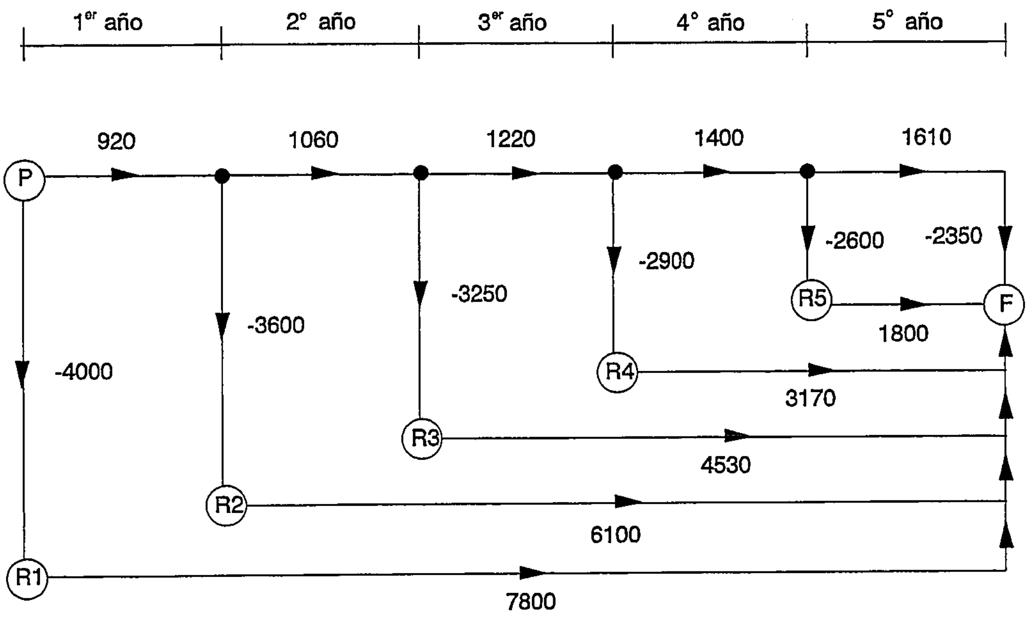


Fig. 10.1.1.6 Representación del proceso de renovación mediante un grafo

(1) $t \backslash k$	(2) α^{t-1}	(3) $\alpha^{t-1} \cdot c_t$	(4) $\sum_{t=2}^{k} \alpha^{t-1} \cdot c_t$	(5) $\alpha^{k-1} \cdot S_k$	(6) (4) - (5)	(7) coste 2ª camioneta actualizado	(8) coste actualizado total
1	1	800	0	4.000	-4.000	7.296,6	3.296,6
2	0,8929	821,5	821,5	3.214,4	-2.392,9	5.477,5	3.084,6
3	0,7972	845,0	1.666,5	2.590,9	-924,4	3.897,4	2.973,0 *
4	0,7118	868,4	2.534,9	2.064,2	470,7	2.546,7	3.017,4
5	0,6355	889,7	3.424,6	1.652,3	1.772,3	1.361,8	3.134,1
6	0,5674	913,5	4.338,1	1.333,4	3.004,7	——	3.004,7

Fig. 10.1.1.7 Cálculo del coste total actualizado

Los cálculos se resumen en la *figura 10.1.1.8*; el valor k corresponde a la edad en la que se substituye la primera camioneta y en la columna (6) aparece el coste actualizado correspondiente a la misma (que es idéntico al indicado en la columna (6) de la *figura 10.1.1.7*). En la columna (7) tenemos el coste actualizado del resto de camionetas (el valor $\Gamma(4) = 16.830{,}7$ proviene de la *figura 10.1.1.4*). El coste actualizado total, 12.450,5 *um*, corresponde a la substitución de la primera camioneta cuando alcanza la edad 4 (como era de prever). La anualidad equivalente en este caso es $(1 - \alpha)\cdot 12.450{,}5 = 1.333{,}4$ *um*/año inferior a la correspondiente a la tabla de la *figura 10.1.1.4* a causa de que el origen temporal está referido a un instante en que hay menores desembolsos.

(1) $t \backslash k$	(2) α^{t-1}	(3) $\alpha^{t-1}\cdot c_t$	(4) $\sum_{t=2}^{k} \alpha^t \cdot c_t$	(5) $\alpha^{k-1}\cdot S_k$	(6) (4) - (5)	(7) $\alpha^{k-1}\cdot\Gamma(4)$	(8) coste actualizado total
1	1,0000	800,0	0	4.000	-4.000	16.830,7	12.830,7
2	0,8929	821,5	821,5	3.214,4	-2.392,2	15.027,4	12.635,2
3	0,7972	845,0	1.666,5	2.590,9	-924,4	13.417,3	12.492,9
4	0,7118	868,4	2.534,9	2.064,2	470,7	11.979,8	12.450,5 *
5	0,6355	889,7	3.424,6	1.652,3	1.772,3	10.696,2	12.468,5
6	0,5674	913,5	4.338,1	1.333,4	3.004,7	9.550,2	12.554,9

Fig. 10.1.1.8 Cálculo del coste total actualizado

Determinación del instante óptimo de substitución de un equipo en horizonte finito mediante la ecuación de recurrencia

Una forma de determinar en horizonte finito el instante óptimo de substitución de un equipo consiste en establecer una expresión recurrente. Sea:

F_N el valor actualizado del coste de renovación y funcionamiento de los equipos siguiendo la política óptima de renovación cuando el horizonte es de N períodos (años) e inicialmente debemos adquirir un equipo.

q_u el valor actualizado del coste de adquisición y funcionamiento (incluyendo el valor de recuperación) de un equipo cuando se mantiene en funcionamiento u períodos (años); en el ejemplo R_3, con la tasa de actualización del 12% anual, q_u corresponde a los valores de la columna (7) de la *figura 10.1.1.4*, que repetimos en la *figura 10.1.1.9 (b)*, y sin actualizar a los de la columna (4) de la *10.1.1.3*, que reproducimos en la *figura 10.1.1.9 (a)*.

sin actualización

u	q_u
1	1.800
2	3.120
3	4.530
4	6.100
5	7.800
6	9.660
7	11.710
8	14.090
9	16.740
10	19.700

(a)

con actualización, 12% anual

u	q_u
1	2.142,9
2	3.577,8
3	4.888,9
4	6.134,5
5	7.296,6
6	8.397,1
7	9.451,9
8	10.517,4
9	11.555,3
10	12.573,9

(b)

Fig. 10.1.1.9 Valores de q_u

Deseamos establecer la política óptima de substituciones de equipos durante N períodos, en particular inicialmente nos interesará saber cuánto tiempo mantendremos el equipo que vamos a adquirir en primer lugar. Este equipo debe entrar en funcionamiento en el instante actual, que denominaremos instante 0, y su coste de adquisición quedará referido a dicho instante. Supongamos que dicho primer equipo de los que vamos a utilizar en los N períodos lo mantenemos k períodos, es decir, su coste actualizado será q_k. En el resto de períodos, $N\text{-}k$, también deseamos minimizar el coste de funcionamiento y renovación; por tanto, en el instante k nos enfrentaremos a un problema idéntico al que tenemos ahora pero con menos períodos. Ello nos permitirá escribir:

$$F_N = q_k + \alpha^k \cdot F_{N-k}$$

Sin embargo, no conocemos el valor de k, pero en cambio sabemos que F_N debe ser mínimo. Por consiguiente podemos establecer la expresión recurrente:

$$F_N = \underset{0<u\leq N}{MIN} \left\{ q_u + \alpha^u \cdot F_{N-u} \right\}$$

que nos permitirá determinar F_N para cualquier N teniendo en cuenta que obviamente $F_0 = 0$. Si no actualizamos, $\alpha = 1$ y la ecuación recurrente se reduce a:

$$F_N = \underset{0<u\leq N}{MIN} \{q_u + F_{N-u}\}$$

	u											
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	F_N	u^*
0											0	—
1	1.800										1.800	1
2	3.600	3.120									3.120	2
3	4.920	4.920	4.530								4.530	3
4	6.330	6.240	6.330	6.100							6.100	4
5	7.900	7.650	7.650	7.900	7.800						7.650	1,2
6	9.450	9.220	9.060	9.220	9.600	9.660					9.060	3
7	10.860	10.770	10.630	10.630	10.920	11.460	11.710				10.630	3,4
8	12.430	12.180	12.180	12.200	12.330	12.780	13.510	14.090			12.180	2,3
9	13.980	13.750	13.590	13.750	13.900	14.190	14.830	15.890	16.740		13.590	3
10	15.390	15.300	15.160	15.160	15.450	15.760	16.240	17.210	18.540	19.700	15.160	3,4

Fig. 10.1.1.10 Cálculo de la ecuación recurrente con $\alpha = 1$

En la *figura 10.1.1.10* hemos efectuado el cálculo de la ecuación recurrente; para cada valor de N hemos determinado cada valor de u posible:

$$q_u + F_{N-u}$$

y hemos elegido como F_N el menor de dichos valores. En la columna u^* hemos escrito el valor (o valores) de u que proporciona dicho mínimo.

Para $N = 10$ el primer equipo, en la política óptima de substitución, puede durar 3 o 4 años. Si dura 4, el segundo equipo se adquirirá con un horizonte de 6 años, al que corresponde, según la *figura 10.1.1.10*, una duración de 3 años. El tercer equipo, que tiene un horizonte de 3 años, se mantendrá durante los mismos. Analizando el resto de soluciones posibles (haciendo durar el primer equipo 3 años) comprobaremos que la política óptima con horizonte 10 años es la de utilizar 3 equipos, de los cuales 2 se mantendrán 3 años y el tercero 4 años.

Podemos utilizar el mismo procedimiento en el caso de tasa de actualización del 12% anual. Los resultados se resumen en la *figura 10.1.1.11*.

N	F_N	u^*
0	0	—
1	2.142,9	1
2	3.577,8	2
3	4.888,9	3
4	6.134,5	4
5	7.296,6	5
6	8.368,7	3
7	9.241,5	4
8	10.033,1	4
9	10.771,7	4
10	11.436,9	5

Fig. 10.1.1.11 Política de substitución óptima en horizonte finito con tasa de actualización del 12% anual

Para $N = 10$ la política óptima consiste en utilizar dos equipos, durante 5 años cada uno de ellos. Si el horizonte no supera los 5 años, un solo equipo es suficiente.

Substitución de un equipo por otro diferente

Consideremos ahora la posible substitución de un equipo instalado, posiblemente obsoleto, por otro que puede realizar sus mismas funciones de forma más eficiente. En esta situación suelen utilizarse nombres habituales en el mundo del boxeo como *defensor* (*defender*) y *aspirante* (*challenger*). El defensor es el equipo existente y el aspirante es el mejor equipo sustitutivo disponible. Como cualquier equipo más tarde o más temprano será substituido, la cuestión importante no es si será substituido o no, sino *cuándo*. Uno de los datos más importantes respecto al defensor es su valor de recuperación, que debe coincidir con la cantidad que el mercado está dispuesto a pagar por él (deducidos los costes correspondientes a la desinstalación), si se procede a substituirlo. Este valor puede diferir del que consta en la contabilidad de la empresa, y ser inferior a aquél en que valoraría el equipo el fabricante del mismo si le adquiriéramos el equipo substitutorio a él (el valor que asigna un vendedor de coches a un coche usado en caso de comprarle uno nuevo no será probablemente el mismo en el caso de no realizar la nueva compra).

Como la decisión de substituir o no el equipo no puede modificar los hechos pasados, todos los *costes hundidos* del defensor son irrelevantes para la toma de la decisión.

El análisis económico de la decisión puede fundarse en el valor actual de las dos situaciones comparadas: mantener el defensor o bien substituirlo por el aspirante.

Ejemplo R_4: Una empresa compró hace 3 años un equipo por 20.000 *um*, cuyo coste de funcionamiento es de 8.000 *um*/año y su valor de recuperación actualmente es de 10.000 *um*. Necesita disponer de este equipo u otro semejante durante 3 años más; dentro de 3 años estima que el valor de recuperación será 2.000 *um*. Tiene la posibilidad de adquirir un nuevo equipo por 15.000 *um*, cuyo coste de funcionamiento es de 6.000 *um*/año y cuyo valor residual, dentro de 3 años, estima que será de 6.000 *um*. La empresa necesita un sólo equipo. Considerando una tasa de interés del 12% anual, ¿debe proceder a la substitución o no?

En la *figura 10.1.1.12* se analiza el movimiento de fondos de ambas alternativas, con los cuales se ha determinado el VAN correspondiente. Es conveniente proceder a la substitución inmediatamente dado que el VAN correspondiente al aspirante es superior al del defensor.

DEFENSOR	año 0	1	2	3
coste de funcionamiento		8.000	8.000	8.000
valor de recuperación				2.000
movimiento de fondos		-8.000	-8.000	-6.000
VAN	-17.791,1			
ASPIRANTE	**año 0**	**1**	**2**	**3**
inversión	15.000			
recuper.defensor	10.000			
coste de funcionamiento		6.000	6.000	
valor de recuperación				6.000
movimiento de fondos	-5.000	-6.000	-6.000	0
VAN	-15.140,3			

Fig. 10.1.1.12 Movimiento de fondos y VAN de las dos alternativas

En el caso de horizonte infinito, los cálculos pueden ser algo más complejos, puesto que no procede comparar una cadena infinita formada por ciclos de utilización del equipo viejo con una cadena infinita con ciclos del equipo nuevo más eficiente. En el ejemplo R_5 veremos la forma de actuar.

Ejemplo R_5: Una empresa dispone de una máquina cuyo rendimiento anual y valor de recuperación los próximos 5 años se indican en la *figura 10.1.1.13 (a)*. Estudia la posibilidad de substituirla por una máquina más eficiente, cuyo coste es 12.000 *um*, y cuyo rendimiento anual y valor de recuperación en sus siete primeros años de vida se indican en la *figura 10.1.1.13 (b)*. Considerando una tasa de interés del 12% anual, ¿debe proceder inmediatamente a la substitución?

año	r	S
0		2.000
1	5.800	1.000
2	4.800	500
3	3.800	0
4	2.800	0
5	1.800	0

(a)

año	r	S
1	7.500	8.000
2	7.000	6.500
3	6.500	5.000
4	6.000	3.500
5	5.500	2.000
6	4.500	1.000
7	3.500	500

(b)

Fig. 10.1.1.13 Datos del ejemplo R_5

En primer lugar determinaremos la vida económica del aspirante, siguiendo el procedimiento indicado anteriormente. Los cálculos se resumen en la *figura 10.1.1.14*, y la vida económica óptima es de 4 años, con una anualidad actualizada equivalente de 3.216,1 *um*.

(1) $t\backslash k$	(2) α^t	(3) $\alpha^t \cdot r_k$	(4) $\sum_{t=1}^{k} \alpha^t \cdot r_t$	(5) $\alpha^k \cdot S_k$	(6) $-C + \alpha^k \cdot S_k$	(7) (4)+(6)	(8) R(k)
1	0,8929	6.696,4	6.696,4	7.142,9	-4.857,1	1.839,3	17.166,7
2	0,7972	5.580,4	12.276,8	5.181,8	-6.818,2	5.458,6	26.915,1
3	0,7118	4.626,6	16.903,4	3.558,9	-8.441,1	8.462,3	29.360,4
4	0,6355	3.813,1	20.716,5	2.224,3	-9.775,7	10.940,8	30.017,3
5	0,5674	3.120,8	23.837,3	1.134,9	-10.865,1	12.972,2	29.988,4
6	0,5066	2.279,8	26.117,1	506,6	-11.493,4	14.623,7	29.640,7
7	0,4523	1.583,2	27.700,3	226,3	-11.773,7	15.926,6	29.081,6

Fig. 10.1.1.14 Cálculo de la vida económica del aspirante

Si substituimos ahora el defensor por el aspirante, y consideramos una cadena infinita de ciclos con máquinas idénticas al aspirante, el valor actual será:

$$2.000 + 30.017{,}3 = 32.017{,}3 \; um$$

pero debemos analizar que sucedería si substituyéramos el defensor por el aspirante dentro de 1 año, dentro de 2, etc. Para ello debemos buscar el rendimiento actualizado del defensor en los años adicionales de utilización del mismo, cálculos que se han realizado en la *figura 10.1.1.15.*

(1) $t \backslash k$	(2) α^t	(3) $\alpha^t \cdot r_k$	(4) $\sum_{t=1}^{k} \alpha^t \cdot r_t$	(5) $\alpha^k \cdot S_k$	(6) rendimiento neto actual (4) + (5)
1	0,8929	5.178,6	5.178,6	892,9	6.071,5
2	0,7972	3.826,5	9.005,1	398,6	9.403,7
3	0,7118	2.704,8	11.709,9	0	11.709,9
4	0,6355	1.779,5	13.489,4	0	13.489,4
5	0,5674	1.021,4	14.510,8	0	14.510,8

Fig. 10.1.1.15 Cálculo del rendimiento neto actualizado del defensor prolongando su vida k años

Por tanto, si diferimos la substitución por la cadena infinita de ciclos del aspirante k = 1, 2 o 3 años, el rendimiento total actualizado será:

$$k=1 \qquad 6.071{,}5 + \alpha \cdot 30.017{,}3 = 32.872{,}7 \; um$$

$$k=2 \qquad 9.403{,}7 + \alpha^2 \cdot 30.017{,}3 = 33.333{,}3 \; um$$

$$k=3 \qquad 11.709{,}9 + \alpha^3 \cdot 30.017{,}3 = 33.075{,}6 \; um$$

en consecuencia, no conviene substituir ahora el defensor por el aspirante. Si no varían las condiciones (por ejemplo, aparece un aspirante más eficiente) la substitución debería producirse dentro de 2 años.

10.1.2 Renovación antes de la avería

Consideremos un elemento cuya ley de supervivencia es $v(t)$, que forma parte de un sistema y que es necesario para su funcionamiento. Cuando el elemento se avería en pleno funcionamiento se incurre en un coste c_a que puede asociarse a indisponibilidad del sistema, producción y materiales estropeados, etc., y el elemento debe reemplazarse por otro nuevo a un coste c_s (que incluye el coste del elemento nuevo, el trabajo de substitución, etc.). Sin embargo, el elemento puede substituirse también cuando alcanza una edad θ antes de que se haya producido la avería, en cuyo caso el único coste en que se incurre es c_s. La cuestión que nos formulamos es si es conveniente o no substituir el elemento antes de la avería, y en caso afirmativo cuál es el valor idóneo de θ. Para un valor cualquiera de θ, el coste medio de la renovación por unidad de tiempo será:

$$\Gamma(\theta) = \frac{c_s + [1 - v(\theta)]\cdot c_a}{\int_0^\theta v(t)\cdot dt}$$

donde el numerador es igual al coste esperado en un ciclo:

$$c_s \cdot v(\theta) + (c_s + c_a)\cdot(1 - v(\theta))$$

y el denominador igual a la duración esperada del ciclo. En particular:

$$\Gamma(\infty) = \frac{c_s + c_a}{\int_0^\infty v(t)\cdot dt}$$

Téngase presente que hemos considerado despreciable el tiempo necesario para llevar a cabo la substitución; en lo que sigue denominaremos:

$$\bar{t} = \int_0^\infty v(t)\cdot dt \quad ; \quad \bar{t}(\theta) = \int_0^\theta v(t)\cdot dt$$

Sólo interesará la substitución preventiva si para algún valor de θ se cumple $\Gamma(\theta) < \Gamma(\infty)$, en cuyo caso el valor más adecuado de θ es aquel que minimiza $\Gamma(\theta)$; derivando $\Gamma(\theta)$ respecto a θ e igualando a 0 obtenemos:

$$\bar{t}(\theta)\cdot c_a \cdot \frac{dv(\theta)}{d\theta} - [c_s + (1 - v(\theta))\cdot c_a]\cdot \frac{d\bar{t}(\theta)}{d\theta} = 0$$

y recordando que:

$$v'(\theta) = \frac{dv(\theta)}{d\theta} \quad ; \quad \lambda(\theta) = -\frac{v'(\theta)}{v(\theta)} \quad ; \quad v(\theta) = \frac{d\bar{t}(\theta)}{d\theta}$$

obtenemos:

$$\frac{c_s + c_a}{c_a} = v(\theta) + \bar{t}(\theta)\cdot\lambda(\theta)$$

El primer miembro de esta expresión es mayor que 1, mientras que el segundo es igual a 1 cuando $\theta = 0$. Consideremos la función:

$$\phi(t) = v(t) + \bar{t}(t)\cdot\lambda(t) \quad ; \quad \phi(0) = 1$$

cuando t tiende a ∞ tenemos (ya que si el elemento no es eterno $v(\infty) = 0$)

$$\phi(\infty) = \bar{t}\cdot\lambda(\infty)$$

La derivada de ϕ es:

$$\phi'(t) = v'(t) + v(t)\cdot\lambda(t) + \bar{t}(t)\cdot\frac{d\lambda(t)}{dt} = \bar{t}(t)\cdot\frac{d\lambda(t)}{dt}$$

Por consiguiente, ϕ es creciente si para todo t:

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} > 0$$

es decir, si $\lambda(t)$ es creciente; en estas condiciones existe un único valor de θ que anula la primera derivada de $\Gamma(\theta)$. Si además:

$$\bar{t}\cdot\lambda(\infty) > \frac{c_s + c_a}{c_a}$$

dicho valor corresponde a un mínimo de $\Gamma(\theta)$ (primera derivada creciente, segunda derivada positiva). Por consiguiente, si $\lambda(t)$ es creciente pueden presentarse dos casos:

- caso 1: existe un valor finito θ^* que minimiza $\Gamma(\theta)$ y que satisface (*fig. 10.1.2.1.(a)*):

$$v(\theta^*) + \bar{t}(\theta^*)\cdot\lambda(\theta^*) = \frac{c_s + c_a}{c_a} < \bar{t}\cdot\lambda(\infty)$$

$$\Gamma(\theta^*) = c_a\cdot\lambda(\theta^*) < \frac{c_s + c_a}{\bar{t}} < c_a\cdot\lambda(\infty)$$

- caso 2: el mínimo de $\Gamma(\theta)$ se alcanza en el límite; no es conveniente la substitución del elemento antes de la avería (*fig. 10.1.2.1.(b)*):

$$\text{a todo } \theta \geq 0 \text{ se tiene } \Gamma(\theta) > \frac{c_s + c_a}{\bar{t}}$$

Coherentemente si la tasa de avería es constante $v(t) = e^{-\lambda\cdot t}; \phi(t) = 1$ y estamos en una situación análoga al caso 2. Dado que el elemento no envejece, no es sorprendente que no convenga reemplazarlo hasta que se averíe. Una situación análoga se produciría si $\lambda(t)$ fuese decreciente (caso poco verosímil en la práctica). Si $\lambda(t)$ no fuese una función monótona, el análisis sería más complejo.

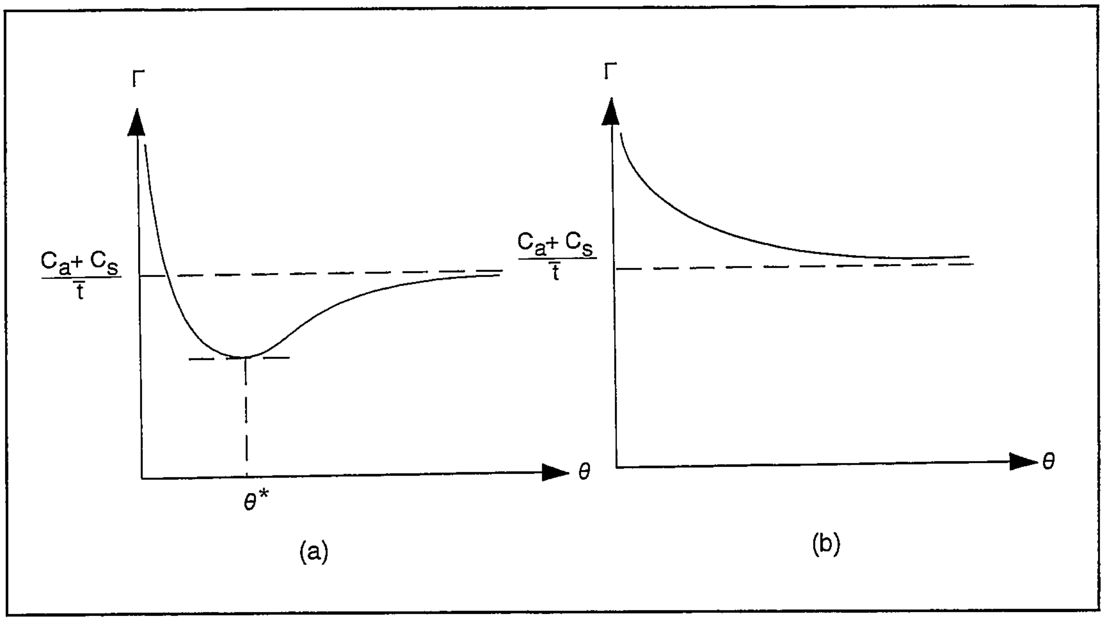


Fig. 10.1.2.1 Evolución de γ(θ) cuando la tasa de avería es creciente (a) mínimo para θ finito; (b) mínimo para θ impropio

Caso discreto

Consideremos que el sistema funciona en forma discreta y tomemos como unidad de tiempo un cierto período de funcionamiento. La implicación de este hecho es que la substitución del elemento, tanto la preventiva como la debida a avería, se realizará entre períodos. El esquema a seguir será idéntico al anterior una vez hayamos definido el valor que utilizaremos en lugar del $t(\theta)$ precedente. Supongamos que la substitución preventiva se realiza en el instante k contado a partir de la substitución anterior (instante 0); son posibles tres interpretaciones para el valor t_k correspondientes, a su vez, a tres situaciones diferentes:

1) el período t en el que tiene lugar la avería no se considera como período productivo (no lo contabilizamos dentro de la duración del ciclo), entonces:

$$t_k^{(1)} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \ldots + (k-1) \cdot p_{k-1} + k \cdot (p_k + p_{k+1} + \ldots) = \sum_{t=0}^{k-1} v_t - v_0$$

2) el período t en el que tiene lugar la avería se considera como período productivo, entonces:

$$t_k^{(2)} = 1 \cdot p_0 + 2 \cdot p_1 + 3 \cdot p_3 + \ldots + k \cdot (p_{k-1} + p_k + \ldots) = v_0 + v_1 + \ldots + v_{k-1} = \sum_{t=0}^{k-1} v_t$$

3) el período t en el que tiene lugar la avería se considera productivo en la proporción correspondiente al funcionamiento correcto del elemento; entonces suponiendo, a falta de mejor información, que esta proporción es del 50%:

$$t_k^{(3)} = \frac{t_k^{(1)} + t_k^{(2)}}{2} = \sum_{t=0}^{k} v_t - \frac{v_0 + v_k}{2}$$

Los tres valores son, de hecho, cálculos aproximados del valor:

$$\int_0^k v_t \cdot dt$$

mediante rectángulos inscritos, exinscritos y trapecios (*fig. 10.1.2.2*). Si el elemento se substituye, como se ha dicho, al final del período durante el cual se ha averiado, el valor medio del tiempo que transcurre desde que el elemento se instala en el sistema hasta que se substituye por otro corresponde a $t_k^{(2)}$, por lo que dicho valor será el que convendrá utilizar en muchos casos. El valor medio del tiempo durante el cual el sistema funciona adecuadamente corresponde aproximadamente a $t_k^{(3)}$.

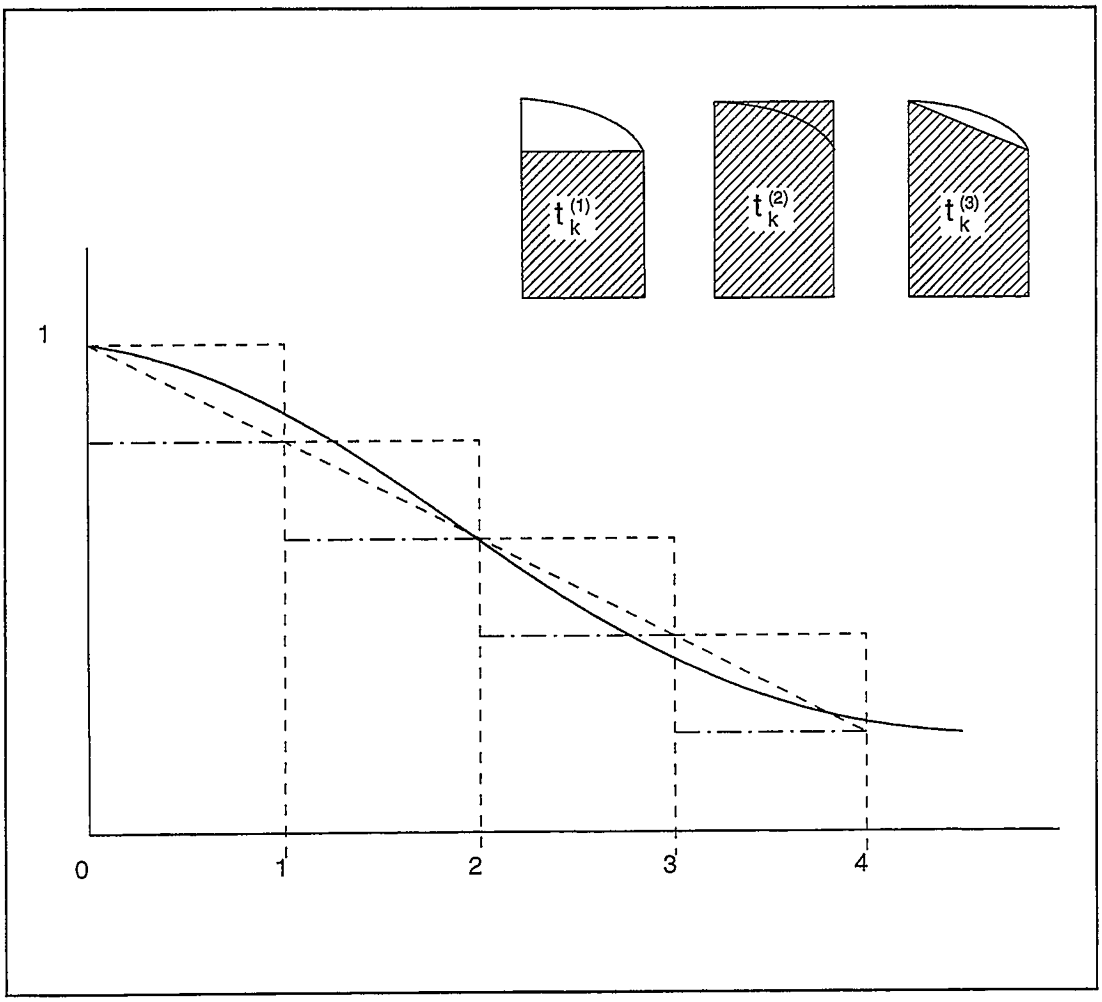


Fig. 10.1.2.2 Formas de aproximación de t

Por tanto el coste medio por período (productivo) será:

$$\Gamma_k = \frac{c_s + (1 - v_k)\cdot c_a}{\bar{t}_k}$$

cuyo mínimo podremos buscar por enumeración.

Ejemplo R_6: Un sistema automático de lavado de mineral consta de un tubo de material plástico que sufre averías de acuerdo con la siguiente ley:

- turnos transcurridos desde la última substitución t

8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23

- probabilidad de avería si no la hubo antes λ_t(%)

0 2 5 8 12 17 23 30 38 47 57 68 70 80 90 100

La sustitución del tubo tiene un coste de 100 *um*; pero si avería tiene lugar durante un turno de producción, debe utilizarse durante el resto del turno un procedimiento manual de lavado con un coste adicional de 120 *um*/turno.

Dado que las probabilidades de avería nos han sido proporcionadas en forma relativa, recurriremos a las expresiones habituales:

$$v_{t+1} = v_t - p_t \quad ; \quad p_t = v_t \cdot \lambda_t$$

Para la duración media de un tubo utilizaremos el valor $t_k(2)$, puesto que, en caso de avería, el tubo no se substituye hasta que termina el turno. El cálculo lo realizaremos mediante la expresión recurrente:

$$t_t^{(2)} = t_{t-1}^{(2)} + v_{t-1}$$

Como valor c_a tomaremos 60 *um*, dado que si en un turno se produce avería, ésta puede tener lugar en cualquier instante y, a falta de mayor información, asumiremos que en promedio deberá utilizarse el procedimiento manual durante medio turno.

(1) $t \backslash k$	(2) v_t	(3) λ_t	(4) p_t	(5) $t_k^{(2)}$	(6) $160 - 60 \cdot v_k$	(7) Γ_k
8	1	0	0	8	100	12,5
9	1	0,02	0,02	9	100	11,11
10	0,98	0,05	0,049	10	101,2	10,12
11	0,931	0,08	0,0745	10,98	104,14	9,48
12	0,8565	0,12	0,1028	11,911	108,61	9,12
13	0,7537	0,17	0,1281	12,7675	114,778	8,99 *
14	0,6256	0,23	0,1439	13,5212	122,464	9,06
15	0,4817	0,30	0,1445	14,1468	131,098	9,27
16	0,3372	0,38	0,1281	14,6285	139,768	9,55
17	0,2091	0,47	0,0983	14,9657	147,454	9,85
18	0,1108	0,57	0,0632	15,1748	153,352	10,11
19	0,0476	0,68	0,0324	15,2856	157,144	10,28
20	0,0152	0,70	0,0106	15,3332	159,088	10,38
21	0,0046	0,80	0,0037	15,3484	159,724	10,41
22	0,0009	0,90	0,0008	15,3530	159,946	10,42
23	0,0001	1,00	0,0001	15,3539	159,994	10,42
24	0	—	—	15,3540	160	10,42

Fig. 10.1.2.3 Cálculo del coste medio por período productivo

Los cálculos se han resumido en la *figura 10.1.2.3*, de los que se deduce que el tubo deberá cambiarse una vez haya soportado 13 turnos (si los alcanza, ya que existe una probabilidad del 24,63% de que se produzca avería antes). El coste equivalente por turno, con esta política, es de 8,99 *um*; si se siguiera la política de cambiar el tubo solamente cuando se produce la avería el coste equivalente por turno sería 10,42 *um*.

Si llamamos $\Gamma(k)$ a la expresión:

$$\Gamma(k) = \frac{(c_a + c_s) - c_a \cdot v_k}{\sum_{t=0}^{k-1} v_t}$$

el valor buscado de k es aquel tal que:

$$\Gamma(k-1) \leq \Gamma(k) \quad \text{y} \quad \Gamma(k) \geq \Gamma(k+1)$$

que, efectuando las oportunas operaciones algébricas, conduce a:

$$v_{k-1} + t_{k-1}^{(2)} \cdot \lambda_{k-1} < \frac{c_a + c_s}{c_a} \leq v_k + t_k^{(2)} \cdot \lambda_k$$

expresión muy similar a la hallada en el caso continuo. En la *figura 10.1.2.4* hemos tabulado los valores $v_k + t_k^{(2)} \cdot \lambda_k$ correspondientes al ejemplo R_6 y, dado que $\frac{c_a + c_s}{c_a} = 2{,}6667$, deducimos de nuevo que el valor óptimo de k es 13.

(1) $t \backslash k$	(2) v_t	(3) λ_t	(4) p_t	(5) $t_k^{(2)}$	(6) $v_k + t_k^{(2)} \cdot \lambda_k$
8	1	0	0	8	1
9	1	0,02	0,02	9	1,18
10	0,98	0,05	0,049	10	1,48
11	0,931	0,08	0,0745	10,98	1,8094
12	0,8565	0,12	0,1028	11,911	2,2858
13	0,7537	0,17	0,1281	12,7675	2,9242
14	0,6256	0,23	0,1439	13,5212	3,7355
15	0,4817	0,30	0,1445	14,1468	4,7257
16	0,3372	0,38	0,1281	14,6285	5,8960
17	0,2091	0,47	0,0983	14,9657	7,2430
18	0,1108	0,57	0,0632	15,1748	8,7604
19	0,0476	0,68	0,0324	15,2856	10,4418
20	0,0152	0,70	0,0106	15,3332	10,7484
21	0,0046	0,80	0,0037	15,3484	12,2833
22	0,0009	0,90	0,0008	15,3530	13,8186
23	0,0001	1,00	0,0001	15,3539	15,3540
24	0	—	—	15,3540	—

Fig. 10.1.2.4 Cálculo de $v_k + t_k^{(2)} \cdot \lambda_k$

10.1.3 Substitución en grupo

Si existen muchos elementos idénticos, N, funcionando simultáneamente puede ser conveniente considerar la substitución preventiva de todos ellos (substitución en grupo) siempre que resulte más económica que la substitución individual a medida que sufren averías. Las hipótesis que consideraremos son las siguientes:

- Nos limitaremos al caso discreto, es decir, las substituciones se efectuarán para valores discretos de t: 1, 2, 3, ...

- En el instante 0 se instalan N elementos nuevos con ley de supervivencia v_t.

- En los instantes 1, 2, ..., $k-1$ se substituirán los elementos averiados.

- En el instante k se substituirán todos los elementos, incluidos aquéllos que han sido substituidos recientemente (por ejemplo en $k-1$).

- El coste de una substitución individual es c_i *um*/unidad; el coste de la substitución en grupo es c_g *um*/unidad con $c_i > c_g$ (es decir, la substitución en grupo de todos los elementos cuesta $N \cdot c_g$ *um*).

Llamemos s_t al número de elementos substituidos individualmente en el instante t; el valor medio de s_t podemos determinarlo mediante las ecuaciones recurrentes:

$$s_0 = N$$

$$s_1 = p_0 \cdot s_0$$

$$s_2 = p_0 \cdot s_1 + p_1 \cdot s_0$$

$$s_3 = p_0 \cdot s_2 + p_1 \cdot s_1 + p_2 \cdot s_0$$

....

$$s_k = \sum_{t=0}^{k-1} p_t \cdot s_{k-t-1}$$

Por consiguiente, el coste por período cuando se efectúa la substitución en grupo con el intervalo k será:

$$\Gamma_k = \frac{1}{k} \cdot \left[s_0 \cdot c_g + c_i \cdot \sum_{t=1}^{k-1} s_t \right]$$

Dando a k los valores 1, 2, 3, ... determinaremos la posición del primer mínimo relativo de Γ_k. De hecho, pueden producirse dos casos que se ilustran en las *figuras 10.1.3.1 (a)* y *(b)*. En el primero dicho mínimo relativo es el mínimo absoluto; en cambio en el segundo el mínimo absoluto, Γ_∞, se obtiene para un valor impropio de k. Para distinguir entre ambos casos bastará determinar Γ_∞ y compararlo con el coste correspondiente a dicho primer mínimo relativo.

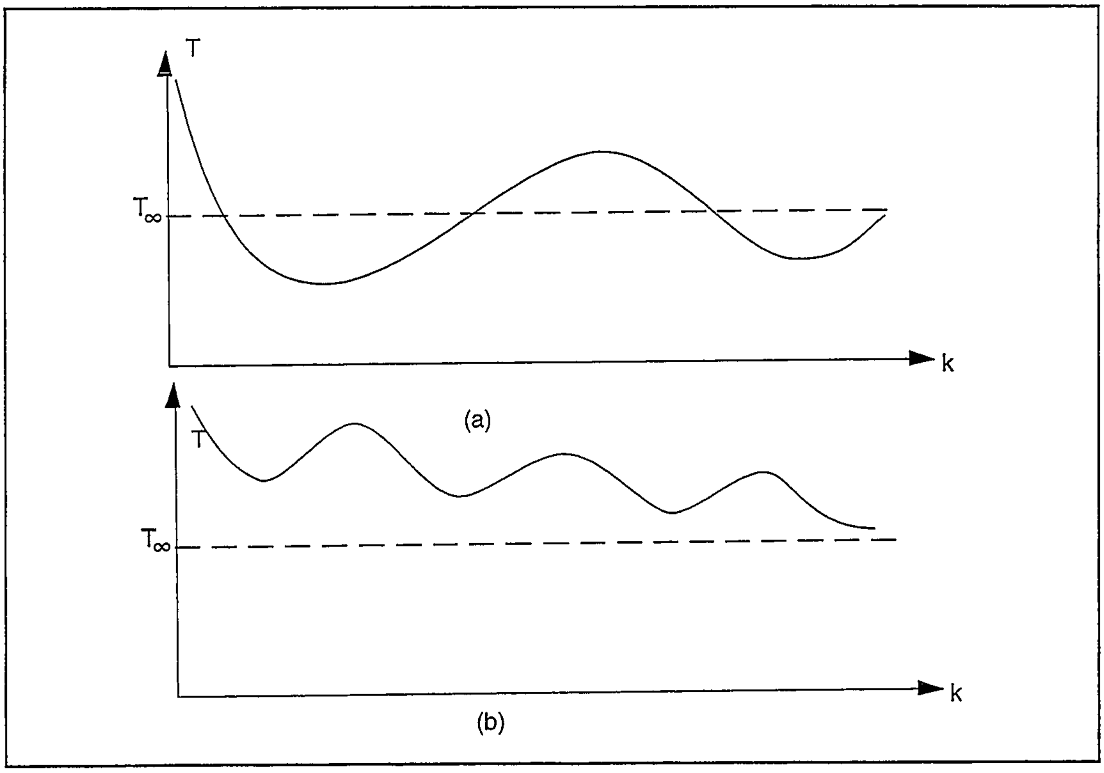


Fig. 10.1.3.1 Evolución de Γ_k

El cálculo de Γ_∞ puede obtenerse directamente (sin prolongar la expresión recurrente anterior) considerando que cuando el fenómeno se estabilice el número de elementos substituidos individualmente tendrá el mismo valor medio, s, en todos los períodos y por tanto:

$$N = s\cdot(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots) = s\cdot\bar{t} \qquad s = \frac{N}{\bar{t}} \qquad \Gamma_\infty = s\cdot c_i$$

(El valor medio $\bar{t}$ debe interpretarse que ha sido obtenido considerando la discretización inducida por la periodificación.)

Ejemplo R_7: Aplicar las expresiones anteriores al caso $N = 1000$; $c_i = 1$; $c_g = 0{,}8$; con la siguiente ley de supervivencia:

$t =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v_t =$	1	0,98	0,93	0,87	0,77	0,66	0,44	0,23	0,11	0,04	0

En la *figura 10.1.3.2* hemos realizado el cálculo de s_t en una forma recurrente alternativa. Para cada instante t determinamos los elementos supervivientes de los substituidos en cada instante k mediante la expresión $s_k \cdot v_{t-k}$ para $k < t$. Sumando los supervivientes así obtenidos tenemos el total de elementos todavía en funcionamiento y su diferencia hasta 1000 nos proporciona los averiados durante el último período y por tanto los que debemos substituir en el instante t. Los valores se han representado en la *figura 10.1.3.3*. Por otra parte:

$$\bar{t} = 1 + 0{,}98 + 0{,}93 + \ldots + 0{,}11 + 0{,}04 = 6{,}03$$

por consiguiente en el estado permanente el número medio de elementos que se substituirán individualmente será:

$$s = \frac{1.000}{6{,}03} = 165{,}8$$

lo que proporciona

$$\Gamma_\infty = 1 \times 165{,}8 = 165{,}8 \ \textit{um}/\text{período}$$

El cálculo de Γ_k se ha resumido en la *figura 10.1.3.4.*

El primer mínimo local se obtiene para $k=6$, y su valor $\Gamma_6 = 192{,}9$ es mayor que $\Gamma_\infty = 165{,}8$; por tanto, no procede utilizar la substitución en grupo y es preferible la individual a medida que se van produciendo averías. Obsérvese, sin embargo, que si $c_g = 0{,}5$ habríamos obtenido $\Gamma_6 = = \frac{500 + 357{,}6}{6} = 142{,}9$ y la conclusión habría sido distinta.

Es fácil comprobar que el valor óptimo de k es independiente de N y que es función de la relación c_g/c_i y no de los costes c_g y c_i individualmente.

t	s_t	supervivienteen el instante 1	2	3	4	5	6	7
0	1.000	980	930	870	770	660	440	230
1	20		19,6	18,6	17,4	15,4	13,2	8,8
2	50,4			49,4	46,9	43,8	38,8	33,3
3	62,0				60,8	57,7	53,9	47,7
4	104,9					102,8	97,6	91,3
5	120,3						117,9	111,9
6	238,6							233,8
7	243,2							
8	176,6							
9	150,2							
10	147,1							
11	131,9							
12	160,0							
total superviv.		980	949,6	938,0	985,1	879,7	761,4	756,8
averiados		20	50,4	62,0	104,9	120,3	238,6	243,2

t	s_t	8	9	10	11	12	13	14
0	1.000	110	40	0	0	0	0	0
1	20	4,6	2,2	0,8	0	0	0	0
2	50,4	22,2	11,6	5,5	2,0	0	0	0
3	62,0	40,9	27,3	14,3	6,8	2,5	0	0
4	104,9	80,8	69,2	46,2	24,1	11,5	4,2	0
5	120,3	104,7	92,6	79,4	52,9	27,7	13,2	4,8
6	238,6	221,9	207,6	183,7	157,5	105,0	54,9	26,2
7	243,2	238,3	226,2	211,6	187,3	160,5	107,0	55,9
8	176,6		173,1	164,2	153,6	136,0	116,6	77,7
9	150,2			147,2	139,7	130,7	115,7	99,1
10	147,1				144,2	136,8	128,0	113,3
11	131,9					129,3	122,7	114,8
12	160,0						156,8	148,8
total superviv.		823,4	849,8	852,9	868,1	840,0	819,1	
averiados		176,6	150,2	147,1	131,9	160,0	180,9	

Fig. 10.1.3.2 Cálculo de s_t

$t \backslash k$	s_t	$\sum_{t=1}^{k-1} s_t$	coste total	Γ_k
1	20	0	800	800
2	50,4	20	820	410
3	62,0	70,4	870,4	290,1
4	104,9	132,4	932,4	233,1
5	120,3	237,3	1037,3	207,5
6	238,6	357,6	1157,6	192,9
7	243,2	596,2	1396,2	199,5
8	176,6	839,4	1639,4	204,9

Fig. 10.1.3.4 Cálculo de Γ_k

10.1.4 Proceso general de renovación

Muchos procesos de substitución y mantenimiento tienen la siguiente estructura:

En el instante 0 se instala un elemento nuevo en el sistema, siendo $f(t)$ la densidad de probabilidad de que el sistema precise la substitución de dicho elemento (por avería o por mantenimiento preventivo) por otro nuevo en el instante t. La substitución puede consistir en instalar físicamente un nuevo elemento o mediante un procedimiento de inspección, mantenimiento y reparación dejar el elemento antiguo *tan bueno como nuevo*. Sea t_0 el instante variable en que se realiza la substitución del elemento (por avería o por mantenimiento preventivo). El intervalo de 0 a t_0 se llama *ciclo* y durante el mismo pueden devengarse diversos costes cuya distribución de probabilidad se conoce.

En estas condiciones el coste medio por unidad de tiempo a largo plazo es:

$$\frac{\text{coste esperado en un ciclo}}{\text{duración esperada de un ciclo}}$$

Un esquema de demostración válido (sin recurrir a los procesos semi-markovianos) es el siguiente. Sea C el coste esperado en un ciclo y g el coste medio por unidad de tiempo a largo plazo. En un intervalo de 0 a T suficientemente largo como para incluir un número elevado de ciclos el coste total será aproximadamente $g \cdot T$, y, suponiendo que en el instante 0 se ha iniciado un ciclo, podremos igualar dicho valor al coste de este primer ciclo más el coste de todos los demás, que volveremos a definir mediante el coste medio:

$$g \cdot T = C + g \cdot \int_0^T (T-u) \cdot f(u) \cdot du$$

Téngase en cuenta que, siendo u el instante de la primera substitución,

$$\int_0^T (T-u)\cdot f(u)\cdot du$$

es la duración esperada del resto de ciclos.

Dado que T es suficientemente grande para que la primera substitución ocurra antes de T:

$$\int_0^T f(u)\cdot du = 1$$

de donde:

$$g\cdot T = C + g\cdot T - g\cdot\int_0^T u\cdot f(u)\cdot du$$

de donde:

$$g = \frac{C}{\int_0^\infty u\cdot f(u)\cdot du} = \frac{C}{\bar{u}} \qquad \text{c.q.d.}$$

Téngase presente que *f(t)* no es la densidad de probabilidad de avería, ya que, en su definición, además de ésta se ha incluido la política de renovación o mantenimiento.

Otra forma de llegar a idéntico resultado consiste en definir como $\Gamma(T)$ el coste actualizado medio en el intervalo de 0 a T, en el supuesto de que en 0 se inicia un ciclo. Análogamente a lo indicado anteriormente, podemos escribir:

$$\Gamma(T) = C + \int_0^T \Gamma(T-u)\cdot e^{-\beta\cdot u}\cdot f(u)\cdot du$$

donde C es el coste actualizado medio de un ciclo, y $e^{-\beta u}$ el factor de actualización al instante 0 de una cantidad monetaria situada en el instante u. Se cumple:

$$e^{-\beta} = \alpha = (1+i)^{-1}$$

donde i es la tasa anual de actualización (hemos preferido utilizar $e^{-\beta u}$ a α^t, de acuerdo con lo acostumbrado en la bibliografía referente a la actualización continua).

Si T tiende a infinito, $\Gamma(T)$ (y $\Gamma(T-u)$) tenderán a un valor límite finito que denominaremos Γ; las condiciones suficientes para que esto ocurra son que $0 \leq e^{-\beta} < 1$ y que el proceso sea tal que el coste en cualquier intervalo de amplitud t esté acotado por un valor $M \cdot t$, siendo M una constante finita, lo cual está garantizado en todos los casos razonables.

Por tanto la expresión anterior podrá escribirse, cuando T tiende a infinito:

$$\Gamma = C + \int_0^\infty \Gamma \cdot e^{-\beta \cdot u} \cdot f(u) \cdot du$$

y por tanto:

$$\Gamma = \frac{C}{1 - \int_0^\infty e^{-\beta \cdot u} \cdot f(u) \cdot du} = \frac{C}{\int_0^\infty (1 - e^{-\beta \cdot u}) \cdot f(u) \cdot du}$$

Sin actualización, con $e^{-\beta} = 1$, o sea $\beta = 0$, $\Gamma(T)$ tenderá a infinito y tendrá la forma equivalente $g \cdot T$. Intentemos deducir el valor de g de la expresión anterior. Para ello definiremos g como coste medio actualizado por unidad de tiempo mediante la expresión:

$$\Gamma = \int_0^\infty g \cdot e^{-\beta \cdot u} \cdot du = \frac{g}{\beta}$$

y por tanto:

$$g = \frac{\beta \cdot C}{\int_0^\infty (1 - e^{-\beta \cdot u}) \cdot f(u) \cdot du}$$

Si ahora hacemos tender β a cero, es decir, consideramos el caso sin actualización obtenemos la expresión anterior:

$$g = \frac{C}{\int_0^\infty u \cdot f(u) \cdot du}$$

El mismo razonamiento es aplicable al cálculo de rendimientos medios por unidad de tiempo a largo plazo, substituyendo C por el rendimiento medio en un ciclo.

Ejemplo R_8

edad (10^3 km)	probabilidad de quedar lisa (cub. nueva)	probabilidad de posible recauchutado	probabilidad de quedar lisa (cub. recauch.)
12			0
13			0,4
14			0,3
15			0,2
16			0,1
17	0		0
18	0,1	0,9	
19	0,2	0,8	
20	0,3	0,7	
21	0,2	0,6	
22	0,1	0,5	
23	0,1	0,4	
24	0		

Fig. 10.1.4.1 Datos del ejemplo R_8

Un cubierta de neumático tiene una duración, antes de volverse lisa, comprendida entre 18.000 y 24.000 km, aunque en ciertos casos puede recauchutarse y es posible utilizarla entre 13.000 y 17.000 km más. Nos interesa saber si es conveniente o no proceder a recauchutar las cubiertas, sabiendo que una cubierta nueva cuesta 100 *um* y que recauchutar una cubierta lisa, cuando ello es posible, cuesta 50 *um*, con los datos sobre probabilidades de la *figura 10.1.4.1* (aunque el parámetro que indica la duración de la cubierta se mide en km hemos mantenido la denominación *edad*). Una cubierta sólo puede recauchutarse una vez.

La duración media de una cubierta (nueva) es:

$$18{,}5 \times 0{,}1 \; + \; 19{,}5 \times 0{,}2 \; + \; ... \; + \; 23{,}5 \times 0{,}1 \; = \; 20{,}8 \times 10^3 \text{ km}$$

y el coste medio por 10^3 km de la cubierta (nueva), en consecuencia:

$$\frac{100}{20{,}8} = 4{,}8077 \; \frac{um}{10^3} \text{ km}$$

La duración media de una cubierta recauchutada es:

$$13{,}5 \times 0{,}4 + 14{,}5 \times 0{,}4 + 15{,}5 \times 0{,}2 + 16{,}5 \times 0{,}1 = 14{,}5 \times 10^3 \text{ km}$$

y el coste por 10^3 km de la cubierta recauchutada (considerando únicamente el coste de la operación de recauchutado):

$$\frac{50}{14{,}5} = 3{,}4483 \frac{um}{10^3} \text{ km}$$

Dado que 3,4483 < 4,8077, será interesante recauchutar siempre que se pueda. La probabilidad de que una cubierta lisa sea recauchutable es:

$$0{,}1 \times 0{,}9 + 0{,}2 \times 0{,}8 + \ldots + 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}67$$

Y ahora podemos determinar los valores correspondientes a la política de recauchutar las cubiertas (si ello es posible). La duración media de una cubierta (nueva + recauchutada) es:

$$20{,}8 + 0{,}67 \times 14{,}5 = 30{,}515 \times 10^3 \text{ km}$$

y el coste esperado de la cubierta (nueva + recauchutada):

$$100 + 0{,}67 \times 50 = 133{,}5 \; um$$

Por tanto, el coste medio por 10^3 km de la cubierta (nueva + recauchutada) es:

$$\frac{133{,}5}{30{,}515} = 4{,}3749 \frac{um}{10^3} \text{ km.}$$

Por tanto es conveniente proceder al recauchutado (si es posible), lo que reduce el coste medio por 10^3 km en 0,4328 *um*.

Ejemplo R_9

La ley de supervivencia de un elemento esencial para el funcionamiento de un sistema que funciona intermitente tiene la siguiente forma:

$0 \le t \le 2$	$2 \le t \le 4$	$4 \le t \le 6$	$6 \le t$
$v(t) = 1 - 0{,}1 \cdot t$	$v(t) = 1{,}3 - 0{,}25 \cdot t$	$v(t) = 0{,}9 - 0{,}15 \cdot t$	$v(t) = 0$

donde t está medido en períodos de funcionamiento. El rendimiento del sistema cuando el elemento funciona correctamente es de 100 *um*/período. Si el elemento se avería durante el funcionamiento del sistema sólo se detecta tal circunstancia al final del período y el rendimiento obtenido durante el mismo es únicamente la parte proporcional de las 100 *um* correspondientes al funcionamiento correcto del elemento. Un elemento averiado debe substituirse por otro nuevo, lo que representa un coste de 10 *um* y un consumo de tiempo equivalente a dos períodos de producción durante los cuales el sistema está inoperante. También puede substituirse un elemento apto para funcionar por otro nuevo, en cuyo caso el coste es 5 *um* y el consumo de tiempo un período. Determinar la política óptima de substitución del elemento a la que corresponde el máximo rendimiento neto medio por período (teniendo en cuenta el rendimiento productivo y los costes de de substitución).

Supongamos que denominamos k la edad de substitución preventiva del elemento. En un ciclo el tiempo medio productivo (antes de la avería) será:

$$\bar{t}_k = \int_0^k v(t) \cdot dt$$

aunque el tiempo aparente de funcionamiento del sistema (hasta que se detecta la avería) será:

$$t_k^{(2)} = \sum_{t=0}^{k-1} v(t)$$

Por tanto el rendimiento neto medio por ciclo tomará el valor:

$$R_k = 100 \cdot \bar{t}_k - 5 \cdot v(k) - 10 \cdot (1 - v(k))$$

La duración del ciclo, incluyendo el tiempo de substitución del elemento, será:

$$u_k = t_k^{(2)} + 1 \cdot v(k) + 2 \cdot (1 - v(k))$$

y fácilmente determinaremos $g_k = \dfrac{R_k}{u_k}$. Los cálculos se han resumido en la *figura 10.1.4.2*, de la que se deduce que el máximo rendimiento neto medio por período (57,892 *um*), se obtiene cuando $k = 3$.

$t \backslash k$	$v(t)$	$\bar{t}_k$	$t_k^{(2)}$	R_k	u_k	g_k
1	0,9	0,95	1	89,5	2,1	42,619
2	0,8	1,8	1,9	174	3,1	56,129
3	0,55	2,475	2,7	240,25	4,15	57,892
4	0,3	2,9	3,25	281,5	4,95	56,869
5	0,15	3,125	3,55	303,25	5,4	56,157
∞	0	3,2	3,7	310	5,7	54,386

Fig. 10.1.4.2 Cálculo de g_k

10.1.5 Disponibilidad de un equipo

Siguiendo en la misma línea que el párrafo anterior,podemos analizar la disponibilidad de un equipo que sólo se utiliza en una emergencia (extintor, proyectil, etc.). Adoptaremos las siguientes hipótesis:

- El equipo que se almacena en buen estado en el instante 0 tiene en el instante x (sin que haya funcionado) la probabilidad $v(x)$ de estar operativo, y por tanto la $1 - v(x)$ de haberse estropeado en el almacén y en consecuencia de no funcionar cuando se precise.

- Las inspecciones duran un tiempo t_1 y si hay avería la detectan; si no hay avería la inspección no detecta ninguna; la inspección incluye mantenimiento.

- Si se encuentra avería el equipo sufre una reparación de duración t_2; un equipo reparado es tan bueno como nuevo.

- Se efectúa una inspección cuando ha transcurrido un tiempo t desde la última inspección o reparación.

- Después de una inspección sin reparación o de una reparación el equipo se comporta como si fuera nuevo.

El problema que se presenta es el de elegir t de forma que se maximice en promedio el tiempo durante el cual el equipo se halla dispuesto para funcionar correctamente, teniendo en cuenta que durante la inspección (y la reparación) el equipo no está disponible.

$$\text{duración media del ciclo} = t + t_1 + (1 - v(t))\cdot t_2$$

$$\text{disponibilidad media por ciclo} = \int_0^t v(x) \cdot dx$$

proporción del tiempo en que el equipo está disponible:

$$r(t) = \frac{\int_0^t v(x) \cdot dx}{t + t_1 + (1 - v(t)) \cdot t_2}$$

Puesto que $r(0) = r(\infty) = 0$ y por otra parte $r(t) \geq 0$ para $t \geq 0$, $r(t)$ debe tomar un máximo para $t \geq 0$. Derivando e igualando a 0 llegamos a la expresión:

$$[t + t_1 + (1 - v(t)) \cdot t_2] \cdot v(t) = (1 - t_2 \cdot v'(t)) \cdot \int_0^t v(x) \cdot dx$$

que permite determinar el valor buscado de t.

Ejemplo: Consideremos que $v(x)$ se adapta a una ley exponencial:

$$v(x) = e^{-\lambda \cdot x} \quad ; \quad v'(x) = -\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

substituyendo obtendremos:

$$\left(t + t_1 + \frac{1}{\lambda}\right) \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \frac{1}{\lambda}$$

ecuación trascendente cuya resolución nos da el valor de t.

Supongamos los siguientes valores numéricos:

$$\lambda = 0{,}002 \quad ; \quad t_1 = 2 \quad ; \quad t_2 = 10$$

deberemos resolver la ecuación:

$$e^{\lambda \cdot t} = \lambda \cdot t + 1{,}004$$

y, haciendo $\lambda \cdot t = z$, obtenemos $z = 0{,}088129$ de donde $t = 44{,}065$. La disponibilidad máxima que puede obtenerse es $r = 0{,}899166$.

Una política alternativa consiste en eliminar la inspección, procediendo directamente cada t unidades de tiempo a la reparación de duración t_2. En este caso la proporción del tiempo que estará disponible el equipo será:

$$r(t) = \frac{\int_0^t v(x) \cdot dx}{t + t_2}$$

cuyo máximo se obtiene para el valor de t solución de la ecuación:

$$e^{\lambda \cdot t} = \lambda \cdot t + \lambda \cdot t_2 + 1$$

en nuestro caso $t = 96{,}7745$ y $r = 0{,}824029$. La disponibilidad máxima sin inspección es, en este caso, menor que con la misma, pero ello depende de la relación entre t_1 y t_2; por ejemplo, si mantenemos $t_1 = 2$ pero hacemos $t_2 = 2$ las disponibilidades máximas con y sin inspección serán 0,91229 y 0,915643 respectivamente.

Podemos considerar costes, sean:

$c_1 =$ 1 *um* coste de la inspección

$c_2 =$ 10 *um* coste de la reparación

el coste esperado por unidad de tiempo de la política con inspección será:

$$\frac{c_1 + c_2 \cdot (1 - v(t))}{t + t_1 + t_2 \cdot (1 - v(t))}$$

y sin inspección:

$$\frac{c_2}{t + t_2}$$

Con los datos iniciales y los períodos óptimos hallados estos costes serán 0,039301 y 0,093655. El hecho de que sea superior el coste por unidad de tiempo de la política sin inspección depende de la relación entre c_1 y c_2. Si c_2/c_1 fuese menor que 2,817167 la política sin inspección tendría un coste esperado por unidad de tiempo menor que la política con inspección.

10.1.6 Mantenimiento

El mantenimiento (o entretenimiento) tiene por objeto conservar el equipo e instalaciones productivas en el estado de sus prestaciones iniciales, y en caso de incidente lograr que se recupere dicho estado de la forma más eficiente posible. Habitualmente se distinguen dos formas de mantenimiento:

mantenimiento correctivo: que se aplica después de la avería,

mantenimiento preventivo: que se aplica en forma programada y que tiene por objeto disminuir la probabilidad de avería del sistema; puede adoptar dos formas, no incompatibles:

> *Mantenimiento sistemático*: que consiste en cambiar de acuerdo con un calendario establecido los elementos que se consideran demasiado desgastados, y en realizar determinados reglajes.
>
> *Mantenimiento condicional*: que consiste en efectuar unos controles y establecer un diagnóstico antes de proceder a la substitución de los elementos.

Aunque el mantenimiento correctivo no está programado en cuanto al momento en que deberá aplicarse, ya que su necesidad proviene de la aparición de una avería, ello no significa que no pueda existir una cuidadosa y detallada programación de su realización. Habitualmente lo que se detecta en el caso de una avería es un síntoma de que existe una desviación entre el funcionamiento correcto y el real; hacer desaparecer el síntoma no garantiza que la avería no vuelva a reproducirse. Para ello es necesario establecer un encadenamiento de las causas, hasta identificar la causa primera y proceder a actuar sobre ella.

El mantenimiento preventivo debe actuar sobre los elementos importantes que pueden sufrir averías con repercusiones costosas. La identificación de estos elementos puede realizarse de diferentes formas: mediante un análisis *a priori*, mediante un análisis ABC, etc.

En el análisis *a priori* se establece un equipo de trabajo que enumera los diferentes incidentes que pueden dar lugar a fallos y averías en los subsistemas y elementos del sistema productivo. Para cada incidente se establece su probabilidad de ocurrencia y su nivel de criticidad. En los métodos AMDEC (*analyse des modes de défaillance, de leurs effets et de leur criticité*) y AMFE (*análisis modal de fallos y efectos*) la probabilidad de ocurrencia y el nivel de criticidad se definen mediante una clasificación en categorías.

Una forma de establecer categorías en la probabilidad de ocurrencia puede ser la siguiente:

A	casi imposible	probabilidad $\leq 10^{-6}$
B	muy improbable	$10^{-6} <$ probabilidad $\leq 10^{-5}$
C	improbable	$10^{-5} <$ probabilidad $\leq 10^{-3}$
D	posible	$10^{-3} <$ probabilidad $\leq 10^{-2}$
E	muy probable	$10^{-2} <$ probabilidad

y en el nivel de criticidad para el sistema productivo:

1	muy crítico
2	bastante crítico
3	moderadamente crítico
4	sin influencia
5	muy probable

Esto permite enfocar la atención en los puntos importantes. Por ejemplo, es inútil gastar esfuerzos en la combinación A-5; en cambio, es importante analizar detenidamente el caso E-1.

El análisis ABC se realiza *a posteriori*, cuando se dispone de información estadística respecto al número de averías que se han producido. Supongamos que disponemos de los datos de la *figura 10.1.6.1*, correspondientes a las intervenciones de mantenimiento sobre 15 máquinas durante un intervalo significativo, por ejemplo un año.

Máquina	Número de horas perdidas por avería	número de intervenciones
M-01	90	4
M-02	75	5
M-03	120	6
M-04	50	23
M-05	12	16
M-06	25	10
M-07	60	22
M-08	180	4
M-09	150	6
M-10	5	4
M-11	35	16
M-12	10	7
M-13	20	19
M-14	30	12
M-15	42	13

Fig. 10.1.6.1 Datos estadísticos de las averías de 15 máquinas

Asumiendo que el factor importante que define el coste es el número de horas de producción perdidas, ordenaremos los datos en sentido decreciente del número de dichas horas (*fig. 10.1.6.2*). El resultado obtenido nos permitirá clasificar las máquinas en diferentes categorías, por ejemplo:

clase A: máquinas M-08, M-09, M-03, M-01, M-02, M-07
clase B: máquinas M-04, M-15, M-11, M-14
clase C: máquinas M-06, M-13, M-05, M-12, M-10

Una atención especial de mantenimiento a las máquinas que componen la clase A actuará sobre el 75% aproximadamente del total de horas.

Máquina	coste (h)	coste acum.	% c. acum.	n° av.	n° av. acum.	% n° av. acum.
M-08	180	180	19,9	4	4	2,3
M-09	150	330	36,5	6	10	6,0
M-03	120	450	49,8	6	16	9,6
M-01	90	540	59,7	4	20	12,0
M-02	75	615	68,0	5	25	15,0
M-07	60	675	74,7	22	47	28,1
M-04	50	725	80,2	23	70	41,9
M-15	42	767	84,8	13	83	49,7
M-11	35	802	88,7	16	99	59,3
M-14	30	832	92,0	12	111	66,5
M-06	25	857	94,8	10	121	72,5
M-13	20	877	97,0	19	140	83,8
M-05	12	889	98,3	16	156	93,4
M-12	10	899	99,4	7	163	97,6
M-10	5	904	100,0	4	167	100,0

Fig. 10.1.6.2 Clasificación ABC

Las intervenciones de mantenimiento preventivo sobre los diferentes elementos del mismo subsistema (máquina o instalación) deberán estar coordinadas. En principio, el intervalo óptimo entre dos intervenciones sucesivas resulta del conocimiento de la ley de supervivencia de cada elemento y de los costes asociados a las substituciones y averías, tal como se ha explicado en los apartados anteriores, pero en la práctica resulta muy útil establecer dichos intervalos siguiendo una progresión geométrica de razón 2 (podría utilizarse como razón cualquier otro entero superior a 1, pero ello repercutiría en una mayor complejidad de la programación). Concretamente las tareas *a, b, c, d*, ... de mantenimiento preventivo se asociarán a unos intervalos t, $2 \cdot t$, $4 \cdot t$, $8 \cdot t$, ... De esta forma la programación de las tareas podrá adoptar la forma siguiente:

instante T	se ejecutan las tareas	*a, b, c* y *d*
instante T + t	se ejecuta la tarea	*a*
instante T + 2·t	se ejecutan las tareas	*a* y *b*
instante T + 3·t	se ejecuta la tarea	*a*
instante T + 4·t	se ejecutan las tareas	*a, b* y *c*
instante T + 5·t	se ejecuta la tarea	*a*
instante T + 6·t	se ejecutan las tareas	*a* y *b*
instante T + 7·t	se ejecuta la tarea	*a*
instante T + 8·t	se ejecutan las tareas	*a, b, c,* y *d*
etc.		

lo que simplificará considerablemente su realización.

Un aspecto importante del mantenimiento es la constitución y actualización de una base de datos donde, al nivel más detallado posible (máquinas, elementos de máquina, etc.), se conserve la información sobre las averías, reparaciones y condiciones de funcionamiento. Esta base de datos será la que nos suministrará los elementos para la determinación de los parámetros de las políticas de renovación y mantenimiento.

10.2 Bibliografía

[01] ACKOFF, R. L; SASIENI, M. W. *Fundamentos de investigación de operaciones*. México, Limusa-Wiley, 1971.

[02] GABRIEL, M; PIMOR, Y. *Mantenimiento industrial por ordenador*. Barcelona, Masson, 1989.

[03] LYONNET, P. *La maintenance: mathématiques et méthodes*. Paris, Techniques et Documentation (Lavoisier), 1986.

[04] MONCHY, F. *Teoría y práctica del mantenimiento industrial*. Barcelona, Masson, 1990.

[05] PARK, C.S. *Contemporary engineering economics*. Reading, Addison Wesley, 1993.

Comentarios

[01] contiene una descripción de los procedimientos analíticos elementales de renovación que ha inspirado notablemente nuestra exposición.

[05] estudia en el capítulo 12 las decisiones de renovación de equipo importantes desde el punto de vista de la rentabilidad de inversiones, tratando aspectos no incluidos en el presente texto como la consideración de la amortización contable y de los impuestos.

[02], [03] y [04] estudian diferentes aspectos del mantenimiento, aunque también incluyen capítulos sobre fiabilidad y renovación.

10.2 Problemas resueltos

10.2.1 Una compañía de sistemas de alarma domésticos ha conseguido un contrato para instalar en una urbanización 10.200 alarmas, que incluyen una batería eléctrica de seguridad.

De los 10.200 clientes, 8.400 suscriben un contrato de asistencia y mantenimiento por 6.000 PTA/año, que garantiza la reparación o substitución de los elementos averiados; en la práctica ello se reduce a la substitución de la batería, el único elemento que se estropea.

La compañía tiene la posibilidad de instalar uno de los dos tipos de batería, *A* y *B*, cuyas leyes de supervivencia se recogen en la tabla.

El coste de una batería *A* es de 4.000 PTA; el de una batería *B*, 4.200. La duración del cambio de batería, incluido el desplazamiento, es de 2 horas y el coste de la mano de obra es de 850 PTA/hora.

Se trata de elegir el tipo de batería más adecuado y de estudiar los problemas que presenta el dimensionamiento de la plantilla necesaria para atender los contratos de asistencia y mantenimiento.

Leyes de supervivencia de las baterías A y B

Mes	Baterías A	Baterías B	Mes	Baterías A	Baterías B
0	1,00	1,00	18	0,88	0,91
1	0,99	0,99	19	0,87	0,90
2	0,99	0,99	20	0,85	0,89
3	0,98	0,98	21	0,83	0,87
4	0,98	0,98	22	0,81	0,85
5	0,98	0,98	23	0,75	0,82
6	0,97	0,97	24	0,70	0,79
7	0,97	0,97	25	0,65	0,74
8	0,96	0,96	26	0,56	0,68
9	0,96	0,96	27	0,48	0,61
10	0,96	0,96	28	0,40	0,54
11	0,94	0,94	29	0,31	0,47
12	0,93	0,94	30	0,21	0,40
13	0,93	0,93	31	0,10	0,32
14	0,92	0,93	32	0,05	0,22
15	0,91	0,92	33	0,02	0,15
16	0,90	0,92	34		0,05
17	0,89	0,91	35		0,02

Se supondrá que el tipo de las baterías que se instalan es el mismo de las empleadas en las sustituciones de las baterías averiadas.

Una forma *aparentemente* correcta de abordar la cuestión es la siguiente:

La duración media de una batería, contando como medio mes aquél en que se produce la avería, es:

$$MTBF = \sum_{t=0}^{\infty} v_t - 0{,}5$$

De donde $MTBF_A = 25{,}13$ y $MTBF_B = 26{,}96$

El coste de cambiar una batería A es de:

$$4.000 + 2 \times 850 = 5.700 \text{ PTA}$$

y el de cambiar una batería B, de 5.900 PTA

Por lo cual el coste medio mensual por renovación, por cada batería con contrato de asistencia y mantenimiento es:

Para el tipo A: $\dfrac{5.700}{25{,}13} = 226{,}82 \dfrac{\text{PTA}}{bat.\ mes}$

Para el tipo B: $\dfrac{5.900}{27{,}16} = 218{,}84 \dfrac{\text{PTA}}{bat.\ mes}$

y el coste medio de renovación anual:

Para el tipo A: $226{,}82 \times 8.400 \times 12 = 22.863.456 \dfrac{\text{PTA}}{año}$

Para el tipo B: $217{,}23 \times 8.400 \times 12 = 22.059.072 \dfrac{\text{PTA}}{año}$

El ahorro anual si se elige B en lugar de A es, por consiguiente:

$$22.863.456 - 22.059.072 = 804.384 \frac{\text{PTA}}{año}$$

Frente a una inversión inicial superior:

$$10.200 \times (4.200 - 4.000) = 2.040.000$$

Y, en definitiva, para cualquier tasa de actualización razonable, la opción a elegir es B.

Se ha dicho anteriormente que lo expuesto hasta aquí era una forma *aparentemente* correcta de abordar la cuestión.

El error consiste en adoptar un coste anual de renovación constante cuando en realidad hasta que no transcurre un tiempo suficiente, que puede llegar a ser muy largo, el coste de un período es distinto e incluso muy distinto al de otro.

En efecto, los primeros meses hay pocas averías; éstas se concentran en un intervalo posterior, seguido de otro en que, de nuevo, las averías son escasas. Las substituciones van estabilizando el funcionamiento del conjunto, pero, en general dicha estabilización no se alcanza sino después de sucesivas oscilaciones amortiguadas.

El número medio de baterías a sustituir el mes t, f_t, se puede calcular mediante la expresión:

$$f_t = N - \left(f_0 \cdot v_t + f_1 \cdot v_{t-1} + \dots + f_{t-1} \cdot v_1\right)$$

partiendo de $f_0 = N$ y determinando, sucesivamente f_1, f_2...

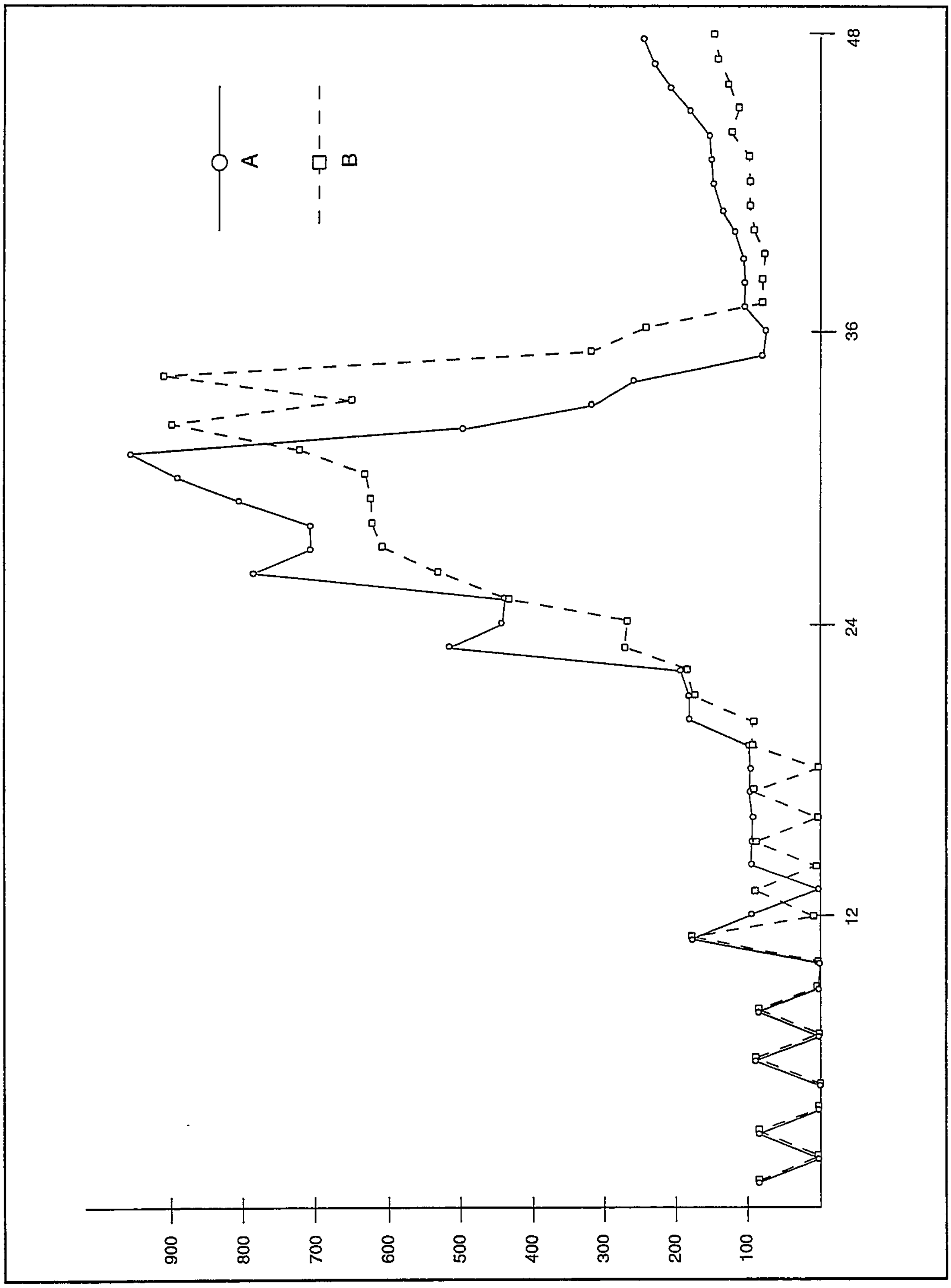
El resultado de estos cálculos para A y B, en lo que respecta a los primeros meses, se ha recogido en dos tablas. La representación gráfica permite una mejor comprensión del funcionamiento del sistema. Prolongando el gráfico aparecerían ondas progresivamente amortiguadas que tienden a los valores medios calculados a principio del ejercicio.

La elección (A o B) se puede hacer ahora con mayor rigor mediante las técnicas de selección de inversiones.

Por lo que respecta a la plantilla, las grandes oscilaciones hacen difícil su dimensionamiento. En la práctica la solución dependería de las condiciones del mercado de trabajo, de si la empresa tiene otros trabajos, etc.

MES	*A*	*B*	MES	*A*	*B*	MES	*A*	*B*
1	84,0	84,0	17	90,9	87,6	33	317,3	647,3
2	0,8	0,8	18	89,3	3,5	34	254,7	905,6
3	84,0	84,0	19	90,9	89,2	35	81,9	327,3
4	1,7	1,7	20	175,1	87,6	36	77,7	238,8
5	0,0	0,0	21	175,0	173,1	37	103,1	79,6
6	84,8	84,8	22	180,1	176,7	38	103,3	79,4
7	1,7	1,7	23	517,9	260,7	39	107,8	77,4
8	84,0	84,0	24	438,1	264,1	40	116,2	92,2
9	3,4	3,4	25	439,2	432,3	41	128,6	80,6
10	0,1	0,1	26	785,3	523,7	42	146,7	97,4
11	169,7	169,7	27	706,6	608,9	43	148,6	97,2
12	88,3	4,3	28	707,7	619,0	44	154,5	99,1
13	1,8	84,1	29	806,2	619,3	45	173,5	122,2
14	89,1	6,7	30	889,8	627,0	46	200,5	114,3
15	87,5	84,2	31	986,6	713,8	47	220,9	139,0
16	86,6	4,2	32	494,2	892,1	48	245,1	143,9

Número medio de baterías de cada tipo a substituir los primeros 48 meses.


A
B
100
200
300
400
500
600
700
800
900
12
24
36
48

10.3.2 Un sistema productivo, que trabaja como proceso continuo, contiene entre sus elementos uno cuyo funcionamiento es especialmente delicado y del que se ha determinado la ley de supervivencia.

Aunque dicho elemento se averíe, el sistema puede seguir funcionando hasta 60 horas. Se ha adoptado la decisión de comprobar el elemento cada 50 horas, lo cual puede hacerse sin interrumpir el proceso. Si en la revisión se detecta que está averiado, se substituye. La avería entre dos revisiones sucesivas comporta una disminución del rendimiento, cuyo coste, por menor producción, se estima en 100.000 PTA. El coste de adquisición del elemento es de 200.000 PTA; el de la mano de obra y materiales empleados en la substitución cuando el elemento se encuentra en correcto estado de funcionamiento es de 70.000 PTA, pero si está averiado este coste se incrementa en un 60% debido a la necesidad de introducir reajustes en el proceso.

Ley de supervivencia	
t(horas)	v(t)
50	0,990
100	0,875
150	0,730
200	0,570
250	0,380
300	0,190
350	0,015
400	0,000

Se trata de determinar:

a) Tiempo medio de duración del elemento entre dos averías consecutivas.

b) Coste horario de mantenimiento si se substituye el elemento sólo en caso de avería.

c) Política óptima de renovación y coste horario de la misma.

a) El número medio de intervalos de 50 horas que estaría montado cada elemento se si se substituyera sólo en caso de avería es:

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k = 4{,}75$$

equivalentes a $50 \times 4{,}75 = 237{,}5$ horas.

El tiempo *entre averías* será menor, pero con los datos disponibles no puede calcularse con precisión. Una estimación es:

$$237{,}5 - \frac{50}{2} = 212{,}5$$

b) El coste de un ciclo es en este caso:

$$100.000 + 200.000 + 1{,}6 \times 70.000 = 412.000$$

Y el coste horario medio:

$$\Gamma_\omega = \frac{412.000}{237{,}5} = 1.734{,}7 \frac{\text{PTA}}{hora}$$

c) La política consistiría en renovar el elemento después de k intervalos de funcionamiento, de 50 horas o, por supuesto, antes, si se avería.

El coste de cada ciclo (por ejemplo: desde inmediatamente después de una renovación hasta inmediatamente después de la siguiente) es:

$$C_s + C_a \times (1 - v_k)$$

con:

$$C_s = 200.000 + \quad 70.000 = 270.000$$

y

$$C_a = 100.000 + 0{,}6 \times 70.000 = 142.000$$

El tiempo medio entre substituciones:

$$\bar{t}_k = \sum_{k=0}^{k-1} v_k$$

(puesto que el intervalo en que se produce la avería se incluye por entero en el ciclo).

El coste horario medio es:

$$\Gamma_k = \frac{270.000 + 142.000 \times (1 - v_k)}{50 \times \bar{t}_k}$$

k	$270.000 + 142.000 \times (1 - v_k)$	$50 \times \bar{t}_k$	Γ_k
1	271.420	50,00	5.428,4
2	287.750	99,50	2.892,0
3	308.340	143,25	2.152,5
4	331.060	179,75	1.841,8
5	358.040	208,25	1.719,3
6	385.020	227,25	1.694,3 *
7	409.870	236,75	1.731,2

Luego la política óptima consiste en renovar el elemento cada 6 intervalos de 50 horas (cada 300 horas), o antes si se avería, con un coste horario medio de 1.694,3 PTA/hora.

10.3.3 Una máquina tiene dos elementos delicados indispensables para su funcionamiento y cuyas leyes de supervivencia son:

$$v_A(t) = 1 - 10^{-2} \cdot t \qquad 0 \leq t \leq 100 \text{ horas}$$

$$v_B(t) = 1 - 2{,}5 \times 10^{-3} \cdot t \qquad 0 \leq t \leq 400 \text{ horas}$$

Los datos económicos son:

Coste de un elemento A: 30.000 PTA

Coste de un elemento B: 50.000 PTA

Coste de la producción perdida en una avería: 20.000 PTA

Coste de realizar la substitución de un elemento o los dos (averiados o no) por elementos nuevos (paro de máquina, mano de obra, etc.): 5.000 PTA

Se trata de determinar:

a) Política óptima de substitución del elemento A considerado aisladamente.

b) Íd. del elemento B.

c) Íd. de ambos elementos considerados como un conjunto.

Puesto que $v_A(t)$ y $v_B(t)$ y son de la forma:

$$v(t) = 1 - \alpha \cdot t$$

se puede desarrollar expresiones válidas para los dos elementos y substituir en ellas los valores numéricos correspondientes.

$$\Gamma(\theta) = \frac{C_s + C_a \cdot [1 - v(\theta)]}{\bar{t}_\theta} = \frac{C_s + C_a - C_a \cdot v(\theta)}{\int_0^\theta v(t) \cdot d(t)}$$

es la expresión general en la que $\Gamma(\theta)$ es el coste medio por unidad de tiempo si el elemento se substituye después de θ unidades de tiempo funcionando (o antes si hay avería), C_s es el coste de substitución sin avería, C_a el sobrecoste en caso de avería y $\bar{t}_\theta$ el tiempo medio de duración de un ciclo, igual a $\int_0^\theta v(t) \cdot dt$ si el tiempo necesario para llevar a cabo la substitución es despreciable.

En el caso de los elementos *A* y *B*:

$$\Gamma(\theta) = \frac{C_s + C_a - C_a \cdot (1 - \alpha \cdot \theta)}{\int_0^\theta (1 - \alpha \cdot t) \cdot dt} = \frac{C_s + \alpha \cdot C_a \cdot \theta}{\theta \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2} \cdot \theta\right)}$$

$$\frac{d\Gamma(\theta)}{d\theta} = \frac{\alpha \cdot C_a \cdot \theta \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2} \cdot \theta\right) - (1 - \alpha \cdot \theta) \cdot (C_s + \alpha \cdot C_a \cdot \theta)}{\theta^2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2} \cdot \theta\right)^2}$$

que se anula cuando lo hace el numerador, es decir, cuando:

$$\frac{\alpha^2}{2} \cdot C_a \cdot \theta^2 + \alpha \cdot C_s \cdot \theta - C_s = 0$$

es decir, para los valores:

$$\theta^* = \frac{-\alpha \cdot C_s \pm \sqrt{\alpha^2 \cdot C_s^2 + 2 \cdot \alpha^2 \cdot C_a \cdot C_s}}{\alpha^2 \cdot C_a}$$

de los cuales el positivo corresponde a un mínimo (como se puede comprobar calculando la segunda derivada):

$$\theta^* = \frac{-C_s + \sqrt{C_s^2 + 2 \cdot C_a \cdot C_s}}{\alpha \cdot C_a}$$

y si se llama β a la relación $\frac{C_s}{C_a}$:

$$\theta^* = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 2 \cdot \beta}}{\alpha}$$

a) Para A:

$$\alpha = 0{,}01 \ , \ \beta = \frac{35.000}{20.000} = 1{,}75, \quad \text{por lo qual} \ \theta_A^* = 81{,}17 \text{ horas} \ \text{ y } \ \Gamma(\theta_A^*) = 1.062 \ \frac{\text{PTA}}{\text{hora}}$$

b) Para B:

$$\alpha = 0{,}0025 \ , \ \beta = \frac{55.000}{20.000} = 2{,}75, \ \text{por lo qual} \ \theta_B^* = 345{,}68 \text{ horas} \ \text{ y } \ \Gamma(\theta_B^*) = 368 \ \frac{\text{PTA}}{\text{hora}}.$$

Desde luego no siempre existe un valor finito de θ^* para el que se anule la derivada de $\Gamma(\theta)$. Para elementos cuya tasa de avería es creciente con el tiempo se puede demostrar que existe un valor θ^*, finito, que anula la derivada siempre que:

$$\frac{C_s + C_a}{C_a} < \bar{t}(\infty)$$

Ahora bien:

$$\lambda(\theta) = -\frac{v'(\theta)}{v(\theta)}$$

y, por lo tanto, las tasas de avería de A y de B tienden a ∞ cuando θ tiende a los respectivos valores máximos de t (100 y 400), por lo que la existencia de θ^* finito era evidente en este caso.

Obsérvese que el coste horario medio para toda la máquina si se adopta la política de substituir los elementos A y B en θ_A^* y θ_B^* es:

$$1.062 + 368 = 1.430 \ \frac{\text{PTA}}{\text{hora}}$$

c) La ley de supervivencia del conjunto es el producto de las leyes de supervivencia de los elementos:

$$V(t) = v_A(t)\cdot v_B(t) = 1 - 0{,}0125\cdot t + 0{,}000025\cdot t^2 \qquad 0 \le t \le 100$$

$$\bar{t}_\theta = \int_0^\infty V(t)\cdot dt = \theta - 0{,}00625\cdot\theta^2 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}000025\cdot\theta^3$$

$$\Gamma(\theta) = \frac{C_s + C_a - C_a\cdot V(\theta)}{\theta - 0{,}00625\cdot\theta^2 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}000025\cdot\theta^3};$$

con $C_a = 20.000$ y $C_s = 85.000$.

Derivando e igualando a cero la derivada se obtiene:

$$\theta^4 - 10^3\cdot\theta^3 - 2{,}55\cdot 10^5\cdot\theta^2 + 2{,}55\cdot 10^8\cdot\theta - 2{,}04\cdot 10^{10} = 0$$

De donde $\theta^* = 90{,}955$, con $\Gamma(\theta) = 2.275 \ \frac{\text{PTA}}{\text{hora}}$

10.3.4 Un cojinete tiene la siguiente ley de supervivencia:

Período	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v(t)	1	0,98	0,98	0,95	0,90	0,80	0,65	0,40	0,20	0,05	0

El coste de compra de la pieza es de 400.000 PTA.

El cambio de la pieza cuando se inutiliza en funcionamiento supone un tiempo de paro de 2 períodos, mientras que si se realiza el cambio antes de inutilizarse este tiempo es de 0,5 períodos; en ambos casos realiza las operaciones correspondientes un operario.

La pérdida de producción por período de paro se evalúa en 1.150.000 PTA y el coste de la mano de obra en 23.000 PTA/período.operario.

Se trata de determinar la política óptima de renovación del cojinete.

El coste medio de un ciclo es:

$$C_s + C_a \cdot (1 - v_k)$$

con:

$$C_s = 400.000 + 0{,}5 \times (1.150.00 + 23.000) = 986.500$$

$$C_a = (2 - 0{,}5) \times (1.150.000 + 23.000) = 1.759.500$$

Y su duración media (contando como medio período aquél en que se produce la avería):

$$\bar{t}_k = 2{,}5 \cdot p_0 + 3{,}5 \cdot p_1 + 4{,}5 \cdot p_2 + \dots + (2{,}5 + k-1) \cdot p_{k-1} + (k+0{,}5) \cdot (p_k + p_{k+1} + \dots)$$

donde p_n es la probabilidad de que la avería se produzca en el período $n+1$.

Luego:

$$\bar{t}_k = 1{,}5 + \sum_{t=0}^{k-1} v_t - v_k$$

y:

$$\bar{t}_n - \bar{t}_{n-1} = v_{n-1} - v_n + v_{n-1} = 2 \cdot v_{n-1} - v_n$$

de donde:

$$\bar{t}_n = t_{n-1} + 2 \cdot v_{n-1} - v_n$$

Y se puede calcular:

$$\Gamma_k = \frac{2.746.000 - 1.759.500 \cdot v_k}{\bar{t}_k}$$

k	$2.746.000 - 1.759.500 \cdot v_k$	t_k	Γ_k
1	1.021.690	1,52	672.164
2	1.021.690	2,50	408.676
3	1.074.475	3,51	306.118
4	1.162.450	4,51	257.749
5	1.338.400	5,51	242.904 *
6	1.602.325	6,46	248.038

Luego $k^* = 5$ períodos

$$\Gamma_k = 242.904 \ \frac{\text{PTA}}{\text{período}}$$

10.3.5 Las lámparas de los reflectores de iluminación de un estadio de fútbol siguen, cada una de ellas, la siguiente ley de supervivencia:

Partidos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probab.	1	0,98	0,95	0,91	0,86	0,80	0,73	0,65	0,56	0,46	0,37
Partidos	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Probab.	0,29	0,22	0,16	0,12	0,08	0,05	0,03	0,02	0,01	0	

Cambiar la lámpara entre dos partidos tiene un coste de 5.000 PTA, si la lámpara se encuentra en correcto estado de funcionamiento. En el caso de que la lámpara se haya estropeado durante su uso, en cambio, el coste se incrementa en 40.000 PTA ya que entonces se tiene que cambiar todo el reflector.

¿Cuál es el coste por partido, debido al cambio de lámparas si el club sigue la política de cambiar cada lámpara inmediatamente después del partido en que se ha estropeado o, como máximo, después de 10 partidos de utilización?

¿Es ésta la política óptima de substitución preventiva para cada lámpara considerada individualmente? En caso negativo, ¿cuál es la política óptima?

¿Cuál es la vida media de estas lámparas?

El club se plantea la posibilidad de realizar una substitución en grupo para cada torre de 10 reflectores. Para ello ha estudiado con más detalle los costes, y ha llegado a establecer que las 40.000 PTA citadas anteriormente corresponden exclusivamente a coste de material, mientras que de las 5.000 PTA de substitución de una lámpara corresponden 3.000 PTA a material y las 2.000 PTA restantes a mano de obra (para el caso de una sola lámpara). En el caso de substituir más de una lámpara en la misma operación, el coste de la mano de obra es igual a $2.000 \cdot \sqrt{L}$ PTA, siendo L el número de lámparas substituidas.

¿Cuál es el coste por punto de luz si cada lámpara se substituye después del partido en que se estropea? ¿Y si se hace una substitución en grupo, es decir, todas las lámparas de una misma torre, cada vez que se estropee una lámpara? ¿Cuál es la política óptima de substitución en grupo?

El coste medio por lámpara y partido es un cociente cuyo numerador es el coste medio entre substituciones y cuyo denominador es el número medio de partidos igualmente entre substituciones, teniendo en cuenta que el partido en que se produce la avería se debe incluir íntegramente en el cómputo ya que el cambio de lámpara y reflector no se puede llevar a cabo hasta que no ha finalizado el partido.

Por consiguiente, si la política es cambiar la lámpara inmediatamente después del partido en que se ha estropeado o, como máximo, después de k partidos de utilización, el coste medio por lámpara y partido es:

$$\Gamma_k = \frac{5.000 + 40.000 \times (1 - v_k)}{\sum_{t=0}^{k-1} v_t}$$

Con

$$\Gamma_{10} = \frac{5.000 + 40.000 \times (1 - 0{,}37)}{1 + 0{,}98 + ... + 0{,}46} = 3.822{,}8 \ \frac{\text{PTA}}{\text{lámp.partido}}$$

Para determinar la política óptima se debe calcular Γ_k para k valores sucesivos de k (ver tabla).

La política óptima, por tanto, consiste en substituir cada 4 partidos o antes si hay avería.

La vida media de las lámparas es:

$$\sum_{t=0}^{\infty} v_t = 9{,}25$$

Y, por consiguiente, el coste medio por lámpara y partido para la política de cambiar lámparas sólo si se estropean es:

$$\Gamma_\infty = \frac{5.000 + 40.000}{9{,}25} = 4.864{,}86$$

Es decir, 48.648,6 por cada torre de 10 reflectores.

k	t_k	Γ_k
1	1	5.800,00
2	1,98	3.535,35
3	2,93	2.935,15
4	3,84	2.760,42 *
5	4,70	2.765,96
6	5,50	2.872,73
7	6,23	3.049,76

En el caso de substitución en grupo después de k partidos (substituyendo después de cada uno de los partidos 1 a k-1 sólo las lámparas averiadas, el coste medio por cada torre de 10 reflectores sería:

$$\Gamma_k = \frac{\sum_{t=1}^{k-1} c_t + 3.000 \cdot f_k + 43.000 \cdot a_k + 2.000 \cdot \sqrt{10}}{k}$$

Donde c_t es el coste medio correspondiente a las substituciones individuales después del partido t y f_k y a_k, respectivamente, el número medio de lámparas en funcionamiento y el de lámparas averiadas cuando se procede a la substitución en grupo.

Es fácil calcular (ver tabla) el número medio de lámparas averiadas al final de cada uno de los partidos 1 a k. Pero ello no basta para el cálculo de las c_t puesto que una parte de los costes no es proporcional a dicho número sino a su raíz cuadrada, lo que exigiría el cálculo de la probabilidad correspondiente a cada posible número de lámparas averiadas, el cual es factible pero largo y pesado; en definitiva, y teniendo en cuenta que el número de lámparas averiadas después de cada partido es un valor entero y la mayoría de las veces igual a 0 o 1, se ha adoptado la siguiente expresión para el cálculo de c:

$$c_t = 45.000 \cdot a_t$$

siendo a_t el número medio de lámparas averiadas después del partido t. Por consiguiente:

$$\Gamma_k = \frac{45.000 \cdot \sum_{t=1}^{k-1} a_t + 3.000 \cdot f_k + 43.000 \cdot a_k + 6.324,6}{k}$$

La tabla siguiente corresponde al cálculo de las a_t (valores sombreados):

t =	0	1	2	3	4	5	6	...
	10	9,80	9,50	9,10	8,60	8,00	7,30	...
		0,20	0,20	0,19	0,18	0,17	0,16	...
			0,30	0,29	0,28	0,27	0,26	...
				0,42	0,41	0,40	0,38	...
					0,53	0,52	0,50	...
						0,64	0,63	...
							0,77	...

De donde:

k	$\Gamma_k \;_k$
1	44.324,6
2	28.662,3
3	25.208,2
4	24.731,2 *
5	25.434,9
6	26.862,4

Es decir, la política más favorable es la renovación en grupo cada 4 partidos.

10.3.6 *Alumbrado público (Luci Minici)*

Los Servicios Técnicos Municipales diseñan la iluminación del futuro Paseo del Deportista Luci Minici Natal Quadroni Ver (*), la cual constará de 200 farolas.

El modelo de bombilla que ha sido elegido tiene una duración que sigue una ley normal de media 2.000 horas y desviación tipo 100 horas. La instalación deberá funcionar 3.500 horas año.

Las alternativas consideradas son las siguientes:

I) Una bombilla por farola que será substituida cuando se estropee con un coste de 5.000 *um*/bombilla (más el coste de la inspección: 200.000 *um*/año).

II) Una bombilla por farola con una inspección cada 100 horas de funcionamiento (coste anual: 50.000 *um*) en el curso de la cual serán substituidas las bombillas averiadas (a 5.000 *um*/bombilla) o todas (las 200) con un coste total de 800.000 *um*.

III) Dos bombillas por farola, conectadas de forma que la segunda empiece a funcionar cuando la primera falle, con una renovación global a las 3.700 horas (coste: 1.500.000 *um*) sin ninguna inspección. La instalación, en este caso, tiene un sobrecoste de 3.500.000 *um*.

Se desea saber el coste anual de renovación y el número de bombillas medio por año que será necesario adquirir en los casos siguientes:

a) Alternativa I.

b) Alternativa II en el supuesto de que se siga la política óptima.

c) Alternativa III.

También se desea saber:

d) ¿Qué alternativa sería recomendable si la tasa de interés fuese del 4%? ¿Y si fuese del 8%? ¿Cuál es la tasa interna de rentabilidad de la inversión adicional correspondiente a III?

e) En relación a III; inmediatamente antes de la renovación:

¿Cuál es el número medio de farolas en funcionamiento?

¿Cuál es la probabilidad de que funcionen todas las farolas?

¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 3 farolas no funcione ninguna?

f) ¿Cuál es la ley de supervivencia de las bombillas substituidas en el caso II, cuando aún funcionan, si es que las hay? ¿Y, análogamente, para el caso III?

(*) Luci Minici (*Lucius Minicius Natalis Quadronis Verus*). Militar y político barcelonés, propietario del carro que ganó una carrera de cuádrigas en los Juegos de la Olimpíada 227 (129 d. C.).

a) A largo plazo (el número de bombillas substituidas y los costes sufrirían oscilaciones acusadas durante los primeros años):

Nº medio de bombillas/año:

$$200 \times \frac{3.500}{2.000} = 350$$

Coste medio anual:

$$350 \times 5.000 + 200.000 = 1.950.000\ um$$

b) Si no hay renovación en grupo el número medio de bombillas/año es sensiblemente igual al calculado en el apartado anterior y los costes ascienden a 150.000 um menos (200.000 - 50.000), pero el nivel de servicio es inferior. El coste por hora de funcionamiento es: $\frac{1.800.000}{3.500} = 514{,}29\ \frac{um}{h}$ (de los cuales corresponden 500 a la renovación y el resto a la inspección).

Con ayuda de una tabla para la ley normal, se puede obtener la siguiente que corresponde a la ley de supervivencia de las bombillas en instantes separados por 100 horas de funcionamiento (ver tabla siguiente).

El hecho de que la probabilidad de avería de una bombilla sea despreciable hasta transcurridas por lo menos 1.600 horas de funcionamiento facilita los cálculos correspondientes a la renovación en grupo:

t	*v(t)*
...	
1.600	1
1.700	0,9987
1.800	0,9772
1.900	0,8413
2.000	0,5000
2.100	0,1587
2.200	0,0228
2.300	0,0013
2.400	0

$$\Gamma_{1.700} = \frac{800.000}{1.700} = 470{,}59\ \frac{um}{h}$$

$$\Gamma_{1.800} = \frac{800.000 + (200 \times 5.000 \times 0{,}0013)}{1.800} = 445{,}17\ \frac{um}{h}$$

$$\Gamma_{1.900} = \frac{800.000 + 10^6 \times (0{,}0013 + 0{,}0215)}{1.900} = 433{,}05\ \frac{um}{h}$$

$$\Gamma_{2.000} = \frac{800.000 + 10^6 \times (0{,}0013 + 0{,}0215 + 0{,}1359)}{2.000} = 479{,}35\ \frac{um}{h}$$

La renovación en grupo de menor coste es la que corresponde a una substitución global cada 1.900 horas de funcionamiento, la cual es más económica que, la substitución individual ya que, como se ha visto anteriormente, Γ_∞ es aproximadamente 500 *um*/h (debido al efecto de la discretización las bombillas se cambian, en promedio, cada 2.050 horas, por lo que $\Gamma_\infty = 10^6/2.050 = 487{,}80$ *um*/h). En el momento de proceder a la renovación en grupo, no obstante, un 13,59% de las bombillas, en promedio, están averiadas, lo cual, ciertamente, puede ser inaceptable.

El número medio de substituciones al año es:

$$\frac{3.500}{1.900} \times [200 \times (1 + 0{,}0013 + 0{,}0215)] = 376{,}82$$

Y el coste medio anual:

$$3.500 \cdot \Gamma_{1.900} + 50.000 = 1.565.675$$

c) Nº medio de bombillas/año:

$$200 \times 2 \times \frac{3.500}{3.700} = 378{,}38$$

Coste medio anual:

$$1.500.000 \times \frac{3.500}{3.700} = 1.418.919 \ \frac{um}{\text{año}}$$

d) II es preferible a I porque la inversión es la misma y el coste anual medio menor.

Por lo que respecta al coste anual medio, III es preferible a II; la diferencia es de:

$$1.565.675 - 1.418.919 = 146.756 \ \frac{um}{\text{año}}$$

Pero la inversión es mayor en la alternativa III y para tomar una decisión debería recurrirse a las técnicas de evaluación de inversiones, para cuya aplicación no bastaría con los valores medios a largo plazo, sino que debería procederse al cálculo de los valores medios año a año.

e) La duración del conjunto formado por las dos bombillas sigue una ley normal de media:

$$2 \times 2.000 = 4.000 \text{ horas}$$

y desviación tipo:

$$\sqrt{2 \times 100^2} = 141{,}42 \text{ horas}$$

La probabilidad de que una farola esté averiada a las 3.700 horas de funcionamiento se puede obtener en las tablas de la ley normal con:

$$t = \frac{3.700 - 4.000}{141{,}42} = -2{,}12$$

de donde $v(3.700) = 0{,}983$ y $1 - v(3.700) = 0{,}017$

De donde:

Nº medio de farolas en funcionamiento:

$$200 \times 0{,}983 = 196{,}6$$

Probabilidad de que funcionen todas:

$$0{,}983^{200} = 0{,}0324$$

Probabilidad de que en un grupo cualquiera de tres farolas no funcione ninguna:

$$0{,}017^{3} = 0{,}000005$$

f) Tanto en la alternativa II como en la III hay bombillas que son substituidas cuando todavía funcionan.

Por lo que respecta a II, cuando se procede a la renovación en grupo a las 1.900 horas, un 0,13% de las bombillas (las que han sido instaladas a las 1.700 horas) tiene una edad de 200 horas; un 2,15%, de 100 horas; un 13,59% están averiadas y el resto (84,13%) tienen una edad de 1.900 horas.

Mediante la expresión:

$$\hat{v}(t - t_0) = \frac{v(t)}{1 - v(t_0)}$$

puede calcularse la ley de supervivencia de las unidades que han alcanzado la edad t_o (ver tabla siguiente).

El cálculo correspondiente a la alternativa III es más simple, puesto que las dos bombillas del conjunto a las 3.700 horas sólo sobrevivirá una; la ley de supervivencia de estas bombillas coincide, por consiguiente, con la del conjunto de dos bombillas, Por lo cual:

$$t_0 = 3.700, \quad v(t_0) = 0{,}9826$$

y los valores de

$$\hat{v}(t - t_0)$$

son los de la última tabla.

t-t_0	t_0 = 1.900 84,13%	t_0 = 200 2,15%	t_0 = 100 0,13%	conjuntas
0	1	1	1	1
100	0,5943	1	1	0,6050
200	0,1886	1	1	0,2100
300	0,0271	1	1	0,0528
400	0,0015	1	1	0,0278
500	0	1	1	0,0264
600	0	1	1	0,0264
700	0	1	1	0,0264
800	0	1	1	0,0264
900	0	1	1	0,0264
1.000	0	1	1	0,0264
1.100	0	1	1	0,0264
1.200	0	1	1	0,0264
1.300	0	1	1	0,0264
1.400	0	1	1	0,0264
1.500	0	0,9987	1	0,0264
1.600	0	0,9772	0,9987	0,0258
1.700	0	0,8413	0,9772	0,0224
1.800	0	0,5000	0,8413	0,0137
1.900	0	0,1587	0,5000	0,0047
2.000	0	0,0228	0,1587	0,0008
2.100	0	0,0013	0,0228	0,0001
2.200	0	0	0,0013	0,0000

$t - t_0$	$\hat{v}(t - t_0)$
0	$\frac{0,9826}{0,9826} = 1,0000$
100	$\frac{0,9213}{0,9826} = 0,9376$
200	$\frac{0,7602}{0,9826} = 0,7737$
300	$\frac{0,5000}{0,9826} = 0,5089$
400	$\frac{0,2398}{0,9826} = 0,2440$
500	$\frac{0,0787}{0,9826} = 0,0801$
600	$\frac{0,0170}{0,9826} = 0,0173$
700	$\frac{0,0024}{0,9826} = 0,0024$
800	$\frac{0,0000}{0,9826} = 0,0000$

10.3.7 El crecimiento, en volumen de madera utilizable, de los ejemplares de cierta especie arbórea responde aproximadamente a la fórmula $V_t = V_m \cdot \left(1 - e^{-\mu \cdot t}\right)$ donde V_m y μ son constantes y t corresponde a la edad del árbol, en años. El precio de venta de la madera es p *um*/m^3.

El coste de plantar el árbol es C. Los gastos anuales de mantenimiento del árbol (podas, fumigaciones, etc.) son proporcionales al volumen de madera utilizable (a unidades monetarias por m^3 de madera utilizable). El coste de cortar el árbol y preparar la madera para ser comercializada es $K + k \cdot V_t$.

Los árboles se plantan hacia primeros de enero y se cortan hacia finales de año; los gastos de mantenimiento se pagan también hacia el final del año.

a) Plantear, en el supuesto de horizonte ilimitado, las expresiones para determinar la edad óptima para cortar el árbol, con y sin actualización. Determinar estas edades óptimas para la siguiente aplicación numérica:

$$V_m = 10\,\text{m}^3, \quad \mu = 0{,}2\,\text{años}^{-1}, \quad p = 11.000\,\frac{\text{um}}{m^3}, \quad C = 10.000\,um$$

$$a = 400\,\frac{um}{m^3}, \quad K = 5.000\,um, \quad k = 2.000\,\frac{um}{m^3}$$

y con una tasa de interés del 10% para la actualización.

b) En una plantación situada en una comarca fría la probabilidad de que en un año cualquiera haya helada es 0,1, independientemente de lo que haya ocurrido los años anteriores. Cuando hiela, los árboles mueren y se tienen que cortar, con un coste unitario de 5.000 *um*; la madera se vende a 1.000 *um*/m^3. En este caso ¿cuál es la diferencia de valor entre una parcela de extensión adecuada para plantar un árbol situada en una zona templada y de otra de la misma extensión en esta comarca fría?

a) Se trata de determinar la edad óptima para la renovación del árbol.

Si se considera una tasa de interés, i, nula, el beneficio anual cuando la renovación se realiza a la edad τ es:

$$\Gamma_\tau = \frac{-\left(C + a \cdot \sum_{t=1}^{\tau} V_t + K + k \cdot V_\tau\right) + p \cdot V_\tau}{\tau}$$

con

$$V_t = V_m \cdot (1 - e^{-\mu \cdot t}).$$

Esta expresión permite calcular Γ_T para valores sucesivos de T y determinar la edad óptima para la renovación, T^*:

T	Γ_T
1	589,15
2	6.313,70
3	7.252,80 *
4	7.127,29
5	6.662,23
6	6.086,26
...	...

Por consiguiente: $T^* = 3$ años y $\Gamma^* = 7.252,80$ *um*/año

Si $i > 0$, se trata de hallar el valor de T para el cual es máxima la anualidad, que se designará por A:

$$A \cdot \sum_{t=1}^{\tau} \frac{1}{(1+i)^t} = A \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{\tau}}{i} = -C - a \cdot \sum_{t=1}^{\tau} \frac{V_t}{(1+i)^t} - \frac{K + k \cdot V_\tau}{(1+i)^\tau} + \frac{p \cdot V_\tau}{(1+i)^\tau}$$

de donde:

T	A
1	-410,85
2	4.978,52
3	5.487,69 *
4	4.992,62
5	4.231,51
...	...

$T^* = 3$ años
$A^* = 5.487,69$ *um*/año

b) Se trata de definir la edad T a que se talará el árbol si antes no ha habido helada (se supone, a falta de otra información que el crecimiento del árbol es el mismo en ambas zonas).

Sin considerar actualización (i = 0), y en el supuesto que las heladas se producen a fin de año (justo antes de talar los árboles), el beneficio medio por períodod será:

$$\Gamma_\tau = \frac{N}{\bar{t}_\tau}$$

con

$$\bar{t}_\tau = \sum_{t=0}^{\tau-1} v_t$$

y

$$N = \left(p \cdot V_\tau - C - a \cdot \sum_{t=1}^{\tau} V_t - K - k \cdot V_\tau\right) \cdot v_\tau + \sum_{t=1}^{\tau}\left[1.000 \cdot V_t - C - a \cdot \sum_{l=1}^{\tau} V_l - 5.000\right] \cdot (v_{t-1} - v_t) =$$

$$= -C + \left(p \cdot V_\tau - a \cdot \sum_{t=1}^{\tau} V_t - K - k \cdot V_\tau\right) \cdot v_\tau - 5.000 \cdot (1 - v_\tau) + \sum_{t=1}^{\tau}\left[1.000 \cdot V_t - a \cdot \sum_{l=1}^{t} V_l\right] \cdot (v_{t-1} - v_t)$$

donde v_t es la probabilidad de supervivencia en t:

$$v_t = 0{,}9^t$$

(por lo cual $v_{t-1} - v_t$ es la probabilidad de que el árbol muera justamente a la edad t).

T	A
1	-861,00
2	3.994,13
3	4.442,88
4	3.991,17
5	3.306,49
6	2.589,08
...	...

T^* = 3 años
A^* = 4.442,88 *um*/año

La diferencia de valor de la parcela es la diferencia entre el beneficio por año en la zona templada y el beneficio por año en la zona fría, capitalizada a horizonte ilimitado (es decir, dividida por la tasa de interés, i). Dichos beneficios son los correspondientes a la política óptima para una tasa de interés i, que para la zona templada se ha calculado en *a*; el cálculo correspondiente a la política óptima con $i > 0$ para la zona fría resulta más complejo y no se aborda aquí. Con la política de renovar cada 3 años, la diferencia de valor de las parcelas es:

$$\frac{7.252{,}80 - 4.442{,}88}{0{,}1} = 28.099{,}2 \; um$$

10.4 Enunciados

10.4.1 *Entretenimiento preventivo*

Preparar un programa en PC para tratar los casos de entretenimiento preventivo:

a) Substitución antes de la avería

b) Substitución en grupo

La entrada consiste esencialmente en los datos de la curva de supervivencia y unos costes. Se considerarán las versiones continua y discreta.

10.4.2 *Gestión de una flota*

El propietario de una flota de taxis se pregunta cómo gestionar óptimamente su parque de vehículos, ya que no puede utilizarlos de forma indefinida.

El tipo de vehículo de que dota a su flota lo adquiere a un precio, que podemos considerar constante, de 2 MPTA. El valor de reventa de los vehículos usados es igual a su valor de adquisición dividido por $t + 1$, siendo t el número de años de utilización del vehículo. Los costes anuales que le supone la utilización de cada vehículo dependen de la edad del mismo y puede evaluarse en $500.000 \times \frac{t+1}{2}$ PTA siendo t la edad al final del año al que corresponden dichos costes.

Con dicha información determina el número de años de utilización de un vehículo. ¿Cuál es este número?

Comentando el tema con un vecino que trabaja en una entidad financiera, éste sugiere que debería haber tenido en cuenta, para hacer sus cálculos, la tasa de interés, que en estos momentos puede establecerse en un 15%, a fin de trabajar con valores actualizados.

¿Cuál debería ser, teniendo en cuenta este último dato, la política a seguir por el dueño de la flota de taxis?

A la vista de lo difícil que resulta la correcta gestión de la flota, el taxista ha decidido cesar en su actividad dentro de cinco años. ¿Qué renovaciones deberá hacer a lo largo de estos años si los vehículos de que dispone actualmente tienen, algunos de ellos, una antigüedad de 1 año, y el resto de 2 años?

10.4.3 *Plan REMEX*

La empresa consultora LCG (Lavinia Consulting Group) quiere aplicar el plan REMEX (renovación maximizante de ejecutivos) y debe determinar el número óptimo de años en ejercicio de sus ingenieros principales; con este fin, el consejo de administración ha recogido los siguientes datos:

Cada vez que se nombra un nuevo ingeniero principal hay unos gastos de 500.000 PTA por realizar la selección, más una indemnización equivalente a dos años de sueldo para el ingeniero principal que sale; el sueldo inicial de un IP es de 3.000.000 de PTA/año por cada uno de los tres primeros años. de 3.500.000 PTA/año por el 4°, 5° y 6°, y así sucesivamente, con un aumento de 500.000 PTA cada tres años; por lo que respecta a los ingresos obtenidos por la gestión del IP, son de 8.000.000 PTA el primer año y de 11, 12, 13, 13, 13, 12, 11, 10, 9, 8, ... en los siguientes.

Se pide:

a) Período óptimo de renovación sin actualización

b) Período óptimo de renovación con una tasa de interés del 10%

c) El consejo de administración profundiza un poco más en el estudio y observa que, a causa del estrés, hay una cierta probabilidad de que el IP tenga que ser retirado precipitadamente. Esta circunstancia implica un sobrecoste de 5.000.000 PTA y su probabilidad es de 0,10, 0,15, 0,20, 0,25, 0,30, 0,35... el 1er, 2°, 3er,... año. ¿Cuál es el período óptimo de renovación si se tienen en cuenta estos nuevos datos, sin actualización?

10.4.4 En una industria química se obtiene cierto producto en un horno, recubierto de un material refractario, con un proceso en el que interviene un catalizador.

Cada ciclo del proceso dura una jornada laboral y se puede, entre el final de una jornada y el inicio de la siguiente, cambiar el catalizador y el refractario.

Este último tiene una probabilidad de estropearse en cada ciclo que depende del número de ciclos en que haya intervenido previamente sin estropearse, según la tabla siguiente:

Ciclos anteriores	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probabilidad estropearse en el ciclo	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1

Cuando el refractario se estropea se pierde la producción (200 unidades monetarias) y se tiene que poner un nuevo refractario (100 *um*).

a) ¿Qué política de renovación del refractario es la más conveniente?

El catalizador tiene un coste de 50 *um*; después de cada ciclo pierde efectividad, lo que obliga a un consumo de energía complementario:

Ciclos anteriores	0	1	2	3	4	5	6
Consumo compl. (*um*)	0	5	10	15	25	35	50

b) ¿Qué política de renovación del catalizador es la más conveniente?

c) ¿Y si el catalizador es nuevo y se tiene que hacer únicamente 6 ciclos de producción?

Supóngase que la materia prima contiene, a veces, cierta impureza cuya presencia produce un recalentamiento que destruye el refractario (probabilidad 0,1 en cada ciclo, con independencia de la edad del refractario):

d) ¿Cómo afecta este hecho a la política de renovación del refractario?

10.4.5 La ley de supervivencia de un elemento es:

$$v_t = 1 - 0{,}1 \cdot t \qquad (t = 0, 1, \ldots, 10)$$

donde t es el número de períodos productivos en los que ha intervenido.

La avería se produce al final del período productivo y puede ser de dos tipos (con probabilidad 0,6 y 0,4, respectivamente). Si es del primer tipo, la substitución requiere un período productivo pero, si es del segundo, hacen falta dos. La substitución preventiva se puede hacer al final de cada período productivo y es prácticamente instantánea.

El coste del elemento es de 1.000 unidades monetarias y la disminución de beneficios a causa de una interrupción de la producción es de 20.000 *um*/período (ambos valores incorporan los costes de mano de obra asociados a la substitución).

¿Cuál es la política óptima de renovación del elemento?

10.4.6 Los vendedores de cierta empresa están provistos de un maletín ligero con un microordenador personal accionado por baterías y un acoplador acústico para la transmisión de datos por teléfono al ordenador central. La flexibilidad de este sistema de tratar los pedidos repercute en un aumento de las ventas. El servicio técnico de la empresa se preocupa por los repuestos necesarios para la operación y, en un primer estudio, ha llegado a la conclusión de que para el funcionamiento del sistema es necesario el funcionamiento del microordenador, de la batería y del acoplador, cuyas leyes de supervivencia (en función de las horas de utilización) son las que figuran en la tabla.

Se ha establecido que cuando un maletín se estropea, el vendedor lo remite al servicio técnico, el cual le envía un maletín de recambio para que pueda proseguir su labor. Se ha establecido también que si a las 1.000 horas de funcionamiento no se ha producido ninguna avería, el vendedor, a su paso por una delegación, lo cambiará por uno nuevo, y el usado será enviado al servicio técnico, que procederá a su inspección y entretenimiento dejando todos los elementos tan buenos como si fuesen nuevos. La revisión preventiva de los maletines a las 1.000 horas tiene un coste de 55.000 PTA/maletín, mientras que las reparaciones de maletines averiados, dados los perjuicios causados, los gastos de envío tanto del maletín averiado como de su substituto, etc. tienen un coste de 175.000 PTA/maletín.

a) ¿Qué coste medio por maletín y 100 horas tiene esta política?

b) Dado que la batería es el primer elemento que suele fallar, se estudia la posibilidad de añadir a cada maletín una batería de repuesto y las instrucciones para cambiarla. Teniendo en cuenta que la batería de repuesto, aun sin ser utilizada, se degrada, siguiendo la misma ley de supervivencia indicada, y que su coste es de 2.000 PTA, ¿es conveniente esta nueva política?

horas / 100	microord.	batería	acoplador
0	1,00	1	1
1	1,00	1	1
2	1,00	1	1
3	1,00	0,9	1
4	1,00	0,8	0,95
5	1,00	0,7	0,90
6	0,95	0,6	0,85
7	0,90	0,5	0,80
8	0,85	0,4	0,75
9	0,80	0,3	0,60
10	0,75	0,2	0,50
11	0,65	0,1	0,35
12	0,50	0,0	0,20

10.4.7 La empresa 6As (Servicios y sistemas de Alarma y seguridad) fabrica y distribuye un aparato de alarma dotado de una fuente de energía autónoma y se ha planteado, por lo que respecta a esta fuente de energía, dos opciones que desea comparar.

Las características significativas de las dos opciones son las siguientes:

1. Una batería que cuesta 100 *um* y que dura entre 2.000 y 3.000 horas, de tal manera que la probabilidad de que la batería se agote entre estos dos valores del tiempo de funcionamiento es constante.

2. Dos baterías, con un coste de 75 *um*/batería, de una duración comprendida entre 1.500 y 2.500 horas, de tal manera que la probabilidad de que la batería se agote entre estos dos valores de tiempo de funcionamiento es constante. En esta opción el aparato se construiría de tal modo que empezaría a funcionar con una de las baterías y la segunda (que no sufre una degradación apreciable antes de entrar en servicio) entraría en servicio una vez agotada la primera; las dos baterías constituyen un bloque y sólo pueden substituirse conjuntamente.

El coste de desplazamiento y mano de obra por la renovación programada de la fuente de energía es, en las dos opciones, de 50 *um*. Si la renovación es obligada (por agotamiento de la fuente de energía), el coste es de 80 *um*; en este caso el aparato queda fuera de servicio un tiempo que es, en media, de 4 horas.

Se pide:

a) La ley de supervivencia y la tasa de avería de las baterías correspondientes a la opción 1 y la ley de supervivencia de la fuente de energía de la opción 2.

b) La MTBF de las baterías de la opción 1 y su tiempo medio de funcionamiento en el supuesto de que se siga la política de renovarlas a las 2.500 horas de funcionamiento o cuando se agoten.

c) ¿Qué política de renovación se debe seguir, en la opción 1, para hacer mínimo el coste horario?

d) Establecer un criterio para comparar políticas de renovación y aplicarlo a la política anterior y a la que consiste, en la opción 2, en substituir la fuente de energía cuando se agota o a las 3.500 horas de funcionamiento.

10.4.8 En la empresa TEcnologías REnovadas S.A. (TERESA) se utiliza una máquina que consume un lubricante. La máquina tiene un depósito, con una capacidad de 10 litros de lubricante, que se llena cada día antes del inicio de la jornada de trabajo, la cual tiene una duración de 8 horas. El consumo de lubricante depende del tiempo de utilización de la máquina, según la expresión:

$$c(t) = t + \theta$$

donde θ sigue una ley normal de media nula y desviación tipo igual a $0{,}5 \cdot \sqrt{t}$.

Cuando el lubricante se agota diremos que la alimentación del lubricante *falla*.

a) Determinar, en forma tabular, la ley de supervivencia del sistema de alimentación de lubricante de la máquina.

b) Cuando la alimentación falla, se tiene que rellenar el depósito, lo que supone una interrupción de la producción cuyo coste es de 100 *um*. ¿Cuál es el coste medio, por jornada laborable, debido a este hecho?

c) En el supuesto de que hubiera dos máquinas idénticas e independientes, comparar el coste medio por jornada laborable en los dos casos siguientes:

c_1. Cada máquina tiene su propio depósito de lubricante.

c_2. Las dos máquinas tienen un depósito común, con una capacidad de 20 litros. El coste por fallo es, en este caso, de 200 *um*.

d) En el caso c_1, calcular los valores de una tabla que, en función del tiempo, dé:

d_1. La probabilidad de que no se haya producido fallo alguno en ninguna de las dos máquinas.

d_2. La probabilidad de que se haya producido fallo en las dos máquinas.

e) En la situación actual, con una sola máquina, se estudia la posibilidad de rellenar el depósito de lubricante, en un momento dado de la jornada de trabajo, sea cual sea su contenido (siempre y cuando no se vacíe completamente, en cuyo caso se procederá a rellenarlo, con el coste mencionado de 100 *um*). El coste de esta operación se estima en 5 *um*. ¿Cuál es el momento o intervalo más adecuado para llevarla a cabo? ¿cuál es el coste medio por jornada de trabajo en este caso?

10.4.9 La empresa PROTRES (PROyecto y PROducción de PRÓtesis) se sirve, en su proceso productivo para el corte de metales duros, de una sierra circular de aleación especial.

Las sierras pueden adquirirse de una en una (a un precio de 100 unidades monetarias) o en paquetes de dos (que cuestan 180 *um*).

A medida que la sierra envejece se hace necesario llevar a cabo ciertas operaciones de mantenimiento y retoques en las piezas obtenidas, de modo que los costes por período según la edad de la sierra (expresada ésta en períodos de funcionamiento) al inicio del período son:

Edad	0	1	2	3	4	...	t	...
Coste	0	10	20	30	40	...	$10 \cdot t$	...

a) ¿Cuál es la política óptima de adquisición y renovación de las sierras circulares, sin actualización?

b) ¿Y con un coeficiente de actualización $(1+i)^{-1} = \alpha = 0{,}9$?

c) Hasta aquí no se ha considerado la posibilidad de que las sierras se averíen irreparablemente. Suponiendo que las tasas de avería sean las siguientes:

Edad	0	1	2	3	...	$t <= 20$
Probabilidad de avería en el siguiente período	0,01	0,05	0,10	0,15	...	$0{,}05 \cdot t$

¿Cuál es, entonces, la política óptima de adquisición y renovación de las sierras, sin actualización?

10.4.10 Un motor que interviene en un proceso productivo lleva cuatro válvulas idénticas. La avería de cualquiera de ellas obliga a parar el proceso una media de 4 horas en horario productivo.

Tanto si se cambia una válvula como más de una, hay que hacer unas operaciones de desmontaje (1 hora) y de montaje (2 horas); además se requiere 1/4 *h* para cada válvula que se cambia y, si ha habido avería, 1 hora y media para operaciones adicionales de limpieza y otras.

Si se cambia una válvula sin que previamente haya habido avería, las operaciones pueden realizarse en horas no productivas.

Por cada hora de paro del proceso, la disminución de beneficios es de 10.000 *um*. El servicio de mantenimiento del motor corre a cargo de una empresa especializada, que lo factura a 2.000 *um/h* más 1.000 *um* en concepto de desplazamiento. Las válvulas cuestan 3.000 *um* cada una.

Se trata de plantear y comparar políticas de mantenimiento del motor.

Las probabilidades de que una válvula esté en buenas condiciones después de 100, 2.100 y 3.080 horas de funcionamiento son, respectivamente, 0,99, 0,98 y 0. Entre estos puntos, la variación se considera prácticamente lineal.