

9 Distribución

9.1 Conceptos

El concepto civil de *logística* aparece en los Estados Unidos a mitad de los años sesenta inspirándose, en parte, en ideas ampliamente extendidas en ambientes militares, donde tenían una larga tradición. En los ejércitos romanos existía la figura del logista, que era el intendente de abastecimientos. En 1837 el general barón Antoine Henri Jomini publica su libro *Précis de l'art de la guerre ou nouveau tableau analytique des principales combinaisons de la strategie, de la grande tactique et de la politique militaire*, entendido en algunos ambientes como una respuesta al tratado de Clausewitz. Jomini define en su libro la logística como el arte práctico de mover los ejércitos.

Con posterioridad cristalizó, en el ámbito militar, la distinción entre la estrategia, que se interesa sobre qué hacer y define planes, la táctica, que se interesa en cómo hacerlo y define métodos y reglas, y la logística, que se interesa por el dónde, cuándo y con qué hacerlo, y define los medios.

La forma que adquiere la logística empresarial en los años sesenta refleja los conocimientos existentes en este momento sobre gestión de stocks (esencialmente la fórmula EOQ o de Wilson) y sobre gestión de los transportes. La concepción logística de estos años se centra en considerar globalmente, integrándolas en un sistema, las actividades destinadas a ordenar el movimiento de los productos acabados desde el final de la línea de producción hasta el punto de utilización o de consumo, integrando las gestiones de stocks, transportes, almacenamiento, acondicionamientos o transformaciones ligeras, etc. La finalidad primordial de este enfoque reside en el hecho de que las medidas aptas para obtener mejoras de eficiencia en cada actividad considerada aisladamente pueden neutralizarse entre sí, con lo que conducen a un resultado global nulo o negativo, mientras que la visión de conjunto puede llevar a medidas que resulten en aumentos reales de eficiencia. En general, en lugar del nombre de logística se preferiría utilizar el de gestión de la distribución física (*physical distribution management*).

Pocos años más tarde se produce, mimética y simétricamente, la era de la *gestión de*

materiales (muchos jefes de compras o de aprovisionamiento pasan a denominarse jefes de materiales), orientada a ordenar el flujo (aprovisionamiento, transportes y almacenes) de materia prima, componentes y materiales de procedencia exterior necesarios para la producción.

Finalmente, y como resultado de la extensión del enfoque global o sistémico al conjunto de los movimientos de materiales, llega la era de la *logística integral*, basada en la idea de servicio al cliente y orientada a ordenar los flujos de materiales desde el proveedor hasta el consumidor.

Existen muchas definiciones de logística en la bibliografía especializada, con sus aciertos y desaciertos. En nuestra concepción la logística se refiere a la gestión global, eficaz y eficiente de las actividades requeridas para crear, mantener y controlar los flujos de materiales (materias primas, piezas de procedencia exterior, piezas semielaboradas, subconjuntos y productos) desde el proveedor hasta el punto de consumo o utilización. El objetivo buscado es alcanzar, al mínimo coste o con la máxima eficiencia, unos niveles de servicio predeterminados. La gestión indicada presupone la consideración adecuada del flujo de información que la permite, el análisis de los procesos de decisión oportunos y el establecimiento de la organización idónea, así como la coordinación con otros niveles, acciones, procesos y aspectos empresariales. La logística es, antes que una disciplina, función, actividad o departamento, un enfoque globalista a compartir por diversas disciplinas, funciones, actividades y departamentos.

A pesar del acuerdo casi universal, salvo matices, sobre el significado de la logística, es fácil comprobar que en muchos ambientes sigue asociándose a su primera concepción: la distribución física de productos.

En los capítulos anteriores hemos tratado minuciosamente del flujo de materiales, desde los proveedores hasta el final de la línea de producción. Para conseguir una visión completa del tema el presente capítulo se centra en la distribución de los productos acabados.

Entre los muchos aspectos que podríamos abordar hemos elegido dos que, por sus características, difieren de los temas tratados anteriormente: la planificación de necesidades de distribución y el diseño de rutas de distribución.

9.1.1 Planificación de necesidades de distribución

Muchas empresas poseen una red de distribución propia y mantienen stocks de productos acabados, en uno o varios escalones, en dicha red. Vamos a describir unas técnicas que permiten conectar eficientemente la gestión de estos stocks distribuidos con la gestión de

la fabricación. En lo que sigue supondremos habitualmente que la red de distribución consta de un solo escalón: unos centros de distribución (CD) están en contacto con los clientes y les suministran los productos; estos centros están abastecidos a partir de un almacén de productos terminados anexo a fabricación, que recibe los productos acabados a la salida del sistema productivo. Este almacén es el encargado de ejecutar, y por tanto de planificar y de programar, los envíos a los centros de distribución.

Las técnicas que vamos a describir se engloban bajo el nombre de planificación de necesidades de distribución (*distribution requirements planning, DRP*), que obviamente está inspirado en el nombre MRP, y, como veremos, poseen una gran similitud con los procedimientos empleados en la planificación de necesidades de materiales.

Para cada centro distribuidor y para cada tipo de producto guardado en stock (*stock-keeping unit, SKU*) se construye un estadillo semejante al de la *figura 9.1.1.1*. La semejanza con el utilizado en el **capítulo 4** para aplicar MRP es flagrante; sin embargo, existen algunas diferencias. Por ejemplo, la primera fila de datos se ha titulado *previsiones* y no *necesidades brutas*, y esta diferencia es importante. Los centros de distribución se encuentran en la frontera entre el mundo de la empresa y su entorno donde están los clientes. Los clientes pueden decidir, dentro de un amplio margen, cuándo realizan un pedido y por qué cantidad; la demanda que recibe el centro de distribución es una demanda *independiente*, y en la mayoría de los casos sólo puede estimarla a través de previsiones. En cambio, al aplicar el MRP, las cantidades del plan maestro que se reflejan en dicha primera fila, están ligadas a las previsiones a través de ciertas transformaciones (por ejemplo, alisados para mejor utilización de la capacidad). Han sido filtradas por un proceso en el que la empresa toma decisiones. Por ello no les damos el nombre de previsiones, sino el de necesidades brutas.

natillas de coco intervalo	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
previsiones		37	46	25	30	66	54	41	51	28	33	73	59
en almacén en tránsito	30	90											
existencias prev.	30	83	37	102	72	96	42	91	40	102	69	86	27
necesidades netas				13		19		24		13		29	
ord. planif. rec.				90		90		90		90		90	
ord. planif. emis.			90		90		90		90		90		

Fig. 9.1.1.1 Planificación de envíos al CD_1, del producto (SKU) natillas de coco (stock de seguridad = 25 un, lote de envío = 90 un, plazo LT = 1 intervalo)

La tercera fila de datos se denomina *en tránsito* en lugar de *pendiente de recibir*. Por ejemplo, en la *figura 9.1.1.1* se ha indicado la llegada programada de 90 unidades para el intervalo 1, y se supone que dichas unidades estarán disponibles en el intervalo 1 para atender a la demanda. Por tanto, en el plazo debe estar incluido el tiempo de descarga y de colocación en las ubicaciones oportunas del almacén del centro distribuidor. Otra diferencia menor estriba en que, además del cuándo y el cuánto, que aparecen en MRP, aquí está definido el dónde, ya que cada estadillo corresponde a un centro de distribución concreto.

No hemos deducido, en este caso, el stock de seguridad de las existencias disponibles. Por consiguiente las fórmulas básicas utilizadas para los cálculos son:

$$H_t = H_{t-1} + E_t + P_t - G_t$$

$$X_t = \max \{ 0, G_t - H_{t-1} - E_t + SS \}$$

$$R_t = P_{t+LT}$$

donde:

G_t es la previsión para el intervalo t ,

H_t es la existencia prevista a final del intervalo t (H_0 es igual al stock inicial),

E_t es la cantidad en tránsito a recibir en el intervalo t ,

P_t es la cantidad de una orden planificada a recibir en el intervalo t ,

SS es el stock de seguridad (en este caso 25 unidades),

X_t es la necesidad neta en el intervalo t ,

LT es el plazo,

R_t es la cantidad de una orden planificada a emitir en el instante t (esta orden será emitida por el almacén central para expedir el producto al centro de distribución).

La determinación de P_t se realiza a partir de las reglas establecidas de reaprovisionamiento del centro de distribución. En el caso de la *figura 9.1.1.1* la regla consiste en:

si $X_t = 0$ entonces $P_t = 0$

si $X_t > 0$ entonces $P_t = 0$ (mejor $P_t = \max \{ X_t, 90 \}$)

aunque podría ser más complicada, teniendo en cuenta, por ejemplo, las previsiones para un cierto número de intervalos a partir del intervalo t , como veremos más adelante.

En la *figura 9.1.1.2* se ha representado el estadillo correspondiente a otro centro de

distribución, cuya demanda es ligeramente inferior al anterior. El stock de seguridad es de 20 unidades, pero el lote de envío y el plazo siguen siendo 90 unidades y 1 intervalo.

natillas de coco intervalo	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
previsiones		23	28	16	19	42	34	26	33	18	22	48	39
en almacén en tránsito	45												
existencias prev.	45	22	84	68	49	97	63	37	94	76	54	96	57
necesidades netas			26			13			16			14	
ord. planif. rec.			90			90			90			90	
ord. planif. emis.		90			90			90			90		

Fig. 9.1.1.2 Planificación de envíos al CD_2 del producto (SKU) natillas de coco (stock de seguridad = 20 un, lote de envío = 90 un, plazo LT = 1 intervalo)

natillas de coco intervalo	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
CD_1			90		90		90		90		90		
CD_2		90			90			90			90		
TOTAL		90	90		180		90	90	90		180		

Fig. 9.1.1.3 Consolidación de las ordenes de expedición a los centros distribuidores planificadas para el producto (SKU) natillas de coco

Supongamos que sólo existen estos dos centros de distribución y analicemos la consolidación de las órdenes en el almacén central. Esta operación, que a veces recibe el nombre de *implosión* consiste en sumar las órdenes para cada SKU originadas en los diferentes centros de distribución, que en nuestro caso se refleja en la figura 9.1.1.3.

Analicemos el estadillo correspondiente al almacén central (figura 9.1.1.4). Ahora la primera fila se denomina *necesidades brutas*; hemos abandonado la frontera con la demanda independiente, la cual ha sido modificada en los centros de distribución transformándola en órdenes, teniendo en cuenta las existencias, stocks de seguridad, reglas de reaprovisionamiento, etc. En esta fila se inscriben las cantidades consolidadas

de la *figura 9.1.1.3* situadas en su mismo intervalo, puesto que el plazo de envío ya ha sido tenido en cuenta.

El almacén central se abastece de producción. Consecuentemente la tercera fila se denomina *pendiente de recibir*, y en ella se inscribirán las cantidades del artículo correspondientes a órdenes lanzadas (abiertas). La finalidad de este estadillo es la preparación del plan maestro (detallado) de producción, por ello se utiliza plazo 0 y el concepto de ordenes planificadas en firme.

natillas de coco intervalo	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
necesidades brutas		90	90		180		90	90	90		180		
en almacén pendiente de recibir	150												
existencias prev.	150	60	195	195	240	240	150	60	195	195	240		
necesidades netas			60		15				60		15		
ord. planif. rec.			225		225				225		225		
ord. planif. emis.					225				225		225		
órdenes en firme			225										

Fig. 9.1.1.4 Planificación de expediciones del almacén central para el producto (SKU) natillas de coco (stock de seguridad = 30 un, lote = 225 un, plazo LT = 0 intervalos, ventana de planificación = 3 intervalos)

El plan maestro establece cuándo y cuánto para los productos finales, es decir, la cantidad que en un instante dado producción debe tener disponible para su envío a los centros de distribución. Estas cantidades y estos instantes se corresponden a los marcados en la consolidación, de ahí que el plazo sea 0. Las órdenes planificadas en firme se crean por indicación y bajo la responsabilidad del planificador; no automáticamente bajo el control del sistema informático. Son órdenes para el plan maestro. Estas órdenes sólo pueden ser modificadas por el planificador; por tanto, no son replanificadas por el sistema informático (como las órdenes planificadas) cuando cambian las condiciones, manteniéndose en las cantidades e intervalos que ha establecido el planificador. Las órdenes planificadas en firme pueden substituir una orden planificada (que es lo que hemos supuesto en la *figura 9.1.1.4*), pero no es preciso que ésta sea su finalidad. No tienen por qué coincidir en intervalo o cantidad con una orden planificada a la que substituyen. Pueden utilizarse, por ejemplo, para constituir un stock para hacer frente a un próximo período de demanda

estacional alta. En la *figura 9.1.1.4* hemos considerado una *ventana de planificación (planning fence)* de tres intervalos; el planificador substituye las órdenes planificadas por órdenes planificadas en firme en los tres primeros intervalos del horizonte (en este caso solo hay una orden planificada en firme, la de 225 unidades en el intervalo 2). La distinción entre órdenes planificadas y órdenes planificadas en firme sólo la realizamos en el intervalo de emisión, no en el de recepción, para simplificar (aunque siendo el plazo 0 esto tiene poca incidencia, ya que podría eliminarse la fila correspondiente a la recepción). Es obvio que la finalidad del concepto de orden planificada en firme es meramente instrumental, y muy ligado a la utilización de un soporte informático.

Supongamos que deseáramos regularizar los envíos, aunque en este caso con los lotes de envío indicados ya lo habíamos logrado, o bien disminuir el stock en los centros distribuidores. Una forma podría ser la de hacer coincidir la demanda con el consumo previsto durante un cierto número de intervalos. En la *figura 9.1.1.5*, correspondiente al CD_1 y con las mismas previsiones que en la *figura 9.1.1.1*, hemos considerado que cada intervalo corresponde a un día, y hacemos coincidir la cantidad de cada orden con el consumo previsto en dos días consecutivos. Hemos alterado la cantidad en tránsito que se recibirá el día 1 para que sea coherente con el supuesto (existe una pequeña diferencia, $80 + 30 - 25 = 85$, mientras que $37 + 46 = 83$, pero debe tenerse en cuenta que la demanda real no tiene por qué coincidir con las previsiones y, además, que éstas van actualizándose progresivamente). Las órdenes se sitúan en los mismos intervalos que en la *figura 9.1.1.1*, pero las cantidades de las mismas son diferentes. Análogamente, en la *figura 9.1.1.6* hemos determinado las órdenes de expedición para CD_2 en el supuesto de que la cantidad corresponde al consumo previsto para tres días. La orden que se debe recibir el día 11 ha considerado un día 13 ficticio, cuya previsión corresponde a la demanda media, en este caso 30 unidades.

natillas de coco	día	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
previsiones			37	46	25	30	66	54	41	51	28	33	73	59
en almacén	30													
en tránsito		80												
existencias prev.	30	73	27	55	25	79	25	76	25	58	25	84	25	
necesidades netas				23		66		41		28		73		
ord. planif. rec.				53		120		92		61		132		
ord. planif. emis.			53		120		92		61		132			

Fig. 9.1.1.5 Planificación de envíos al CD_1, del producto (SKU) natillas de coco (stock de seguridad = 25 un, lote de envío = 2 días de consumo, plazo LT = 1 día)

natillas de coco día	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
previsiones		23	28	16	19	42	34	26	33	18	22	48	39
en almacén en tránsito	45												
existencias prev.	45	22	55	39	20	80	46	20	60	42	20	89	50
necesidades netas			26			42			33			22	
ord. planif. rec.			61			102			73			117	
ord. planif. emis.		61			102			73			117		

Fig. 9.1.1.6 Planificación de envíos al CD_2 del producto (SKU) natillas de coco (stock de seguridad = 20 un, lote de envío = 3 días de consumo, plazo LT = 1 día)

natillas de coco día	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
previsiones		23	28	16	19	42	34	26	33	18	22	48	39
en almacén en tránsito	45												
existencias prev.	45	22	36	20	122	80	46	20	38	20	137	89	50
necesidades netas			26		19				33		22		
ord. planif. rec.			42		121				51		139		
ord. planif. emis.		42		121				51		139			

Fig. 9.1.1.7 Planificación de envíos al CD_2 del producto (SKU) natillas de coco (stock de seguridad = 20 un, lote de envío = 2/4 días de consumo, recepción los martes y jueves, plazo LT = 1 día)

Un objetivo de regularidad puede estar ligado a cuestiones de calendario; supongamos que los días 1 y 7 corresponden a lunes, 2 y 4 a martes, ..., 6 y 12 a sábado. Los centros de distribución operan seis días por semana, aunque la fábrica y el almacén central sólo cinco (aunque el almacén, con un contingente reducido, prepara en sábado las expediciones que deben servirse el lunes, en caso de que no haya podido prepararlas por adelantado el viernes; en todo caso no hay recepción ni expedición de producto en sábado), como ocurre en ciertos sectores. Los envíos se realizan a ciertos centros de distribución (por ejemplo

CD_1) tres días por semana, los lunes, miércoles y viernes, y a otros sólo dos días por semana (por ejemplo CD_2), los martes y jueves. En este caso no tenemos centros de distribución con demanda muy alta, que recibirían producto cinco días por semana, o muy baja, que lo recibirían sólo un día por semana. En la *figura 9.1.1.5* ya hemos escalonado convenientemente los envíos al CD_1, pero no ocurre lo mismo en la *figura 9.1.1.6* respecto a CD_2 (los envíos se reciben en martes y viernes). No es difícil determinar la cuantía de las órdenes para que se reciban en martes y jueves, utilizando el consumo previsto alternativamente en 2 y 4 días, como se ha efectuado en la *figura 9.1.1.7*, donde análogamente se ha considerado la demanda del día 13 igual a la media, 30 unidades.

Veamos en este último supuesto cómo prepara el plan maestro el planificador del almacén central. La consolidación se ha realizado en la *figura 9.1.1.8*.

natillas de coco día	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
CD_1			53		120		92		61		132		
CD_2		42		121				51		139			
TOTAL		42	53	121	120		92	51	61	139	132		

Fig. 9.1.1.8 Consolidación de las ordenes de expedición a los centros distribuidores planificadas para el producto (SKU) natillas de coco (envíos a CD_1 3 días por semana, a CD_2 dos días por semana)

En la *figura 9.1.1.9* hemos efectuado los cálculos del almacén central para establecer el plan maestro en el supuesto de que el lote de producción sea de 225 unidades. Dado que producción no trabaja los sábados, a pesar de que el plazo es 0, hemos trasladado la emisión de la primera orden planificada (la anterior, como está situada antes de la ventana de planificación es una orden planificada en firme) al día 5, por lo que su recepción se debería situar también dicho día (no se ha hecho así en la figura para facilitar su comprensión). Podríamos haber utilizado otros procedimientos, como por ejemplo trasladar la necesidad bruta de cuantía 92 del día 6 al día 5. En la *figura 9.1.1.10* hemos establecido una alternativa utilizando en lugar del lote de producción de 225 unidades las necesidades previstas para tres días. Las órdenes se sitúan en los mismos días (excepto la última) pero su cuantía queda alterada.

Análogamente podríamos introducir otros condicionantes. En un producto del tipo indicado la producción de un lote es muy rápida, inferior en plazo a un día. Producción también puede desear modular la fabricación en función de una clasificación de productos según el volumen de su demanda: productos a fabricar cada día, productos a fabricar tres veces

por semana, dos veces por semana y una sola vez por semana. Estas consideraciones, una vez establecidas, deberán ser tenidas en cuenta por el planificador en el momento de establecer el plan maestro, lo que no resulta difícil a partir del esquema presentado.

natillas de coco día	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
necesidades brutas		42	53	121	120		92	51	61	139	132		
en almacén pendiente de recibir	150												
existencias prev.	150	108	55	159	39	39	172	121	60	146	239		
necesidades netas				96			83			109	16		
ord. planif. rec.				225			225			225	225		
ord. planif. emis.						225				225	225		
órdenes en firme				225									

Fig. 9.1.1.9 Planificación de expediciones del almacén central para el producto (SKU) natillas de coco (stock de seguridad = 30 un, lote = 225 un, plazo LT = 0 intervalos, ventana de planificación = 3 días, no hay producción los sábados)

natillas de coco día	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
necesidades brutas		42	53	121	120		92	51	61	139	132		
en almacén pendiente de recibir	150												
existencias prev.	150	108	55	150	30	30	142	91	30	162	30		
necesidades netas				96			92			139			
ord. planif. rec.				216			204			271			
ord. planif. emis.						204				271			
órdenes en firme				216									

Fig. 9.1.1.10 Planificación de expediciones del almacén central para el producto (SKU) natillas de coco (stock de seguridad = 30 un, lote = 3 días de consumo, plazo LT = 0 intervalos, ventana de planificación = 3 días, no hay producción los sábados)

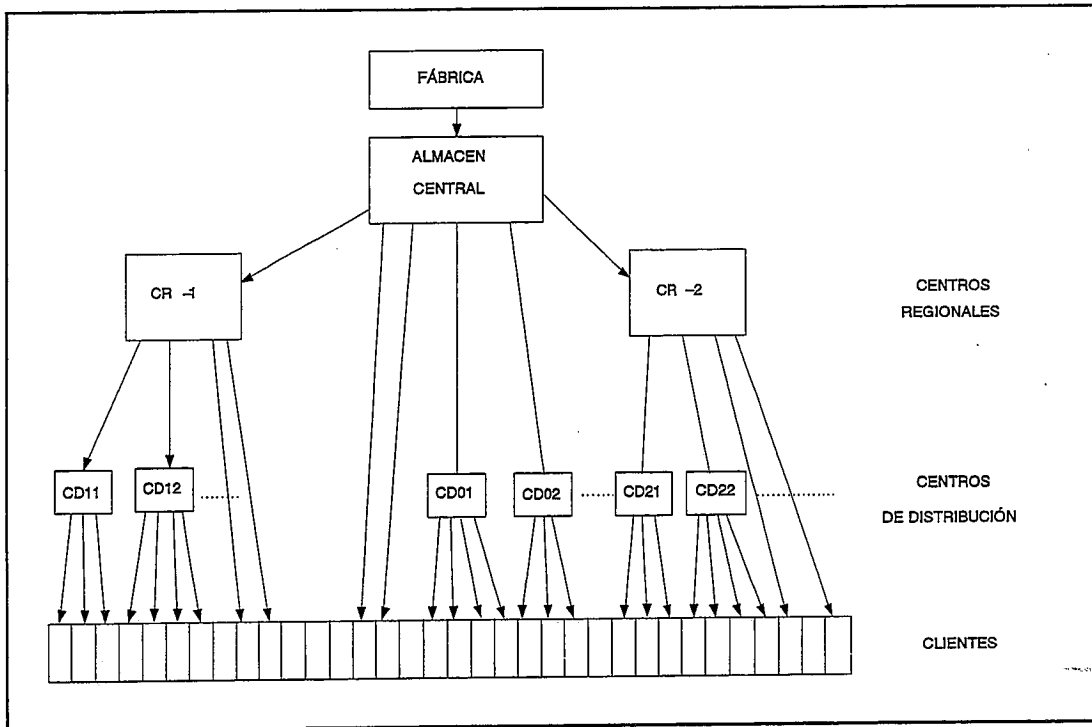


Fig. 9.1.1.11 Estructura de una red de distribución en dos escalones

Si la red de distribución tuviese varios escalones, el procedimiento a seguir sería análogo. Supongamos que la estructura de la red es la de la figura 9.1.1.11; el almacén central abastece dos centros regionales CR_1 y CR_2, los cuales envían el producto a sus centros de distribución satélites, además de atender a algunos clientes cercanos a su ubicación. El almacén central también abastece a sus propios centros de distribución (y en algunos casos a clientes importantes, por ejemplo, grandes cadenas de distribución y venta). Los centros de distribución siguen la pauta indicada, aunque en los que dependen de un centro regional el plazo está referido al tiempo necesario para recibir un envío de éstos. En los centros regionales se realiza una primera consolidación, a partir de las necesidades de sus centros de distribución satélites y de la previsión de la demanda de los clientes que atienden directamente. El plazo está referido al tiempo necesario para recibir un envío desde el almacén central, que puede ser diferente del anterior, especialmente si los vehículos empleados, como sucede habitualmente, son de otras características. Finalmente, el almacén central realiza la última consideración en función de las necesidades de los centros regionales, de sus centros de distribución satélites y de la previsión de la demanda de los clientes propios. En este caso, el almacén central crea los órdenes de plan maestro y el plazo podrá ser, como en el ejemplo, 0.

Hasta ahora hemos supuesto la creación de una línea del plan maestro para cada artículo (SKU), pero esto puede no ser oportuno en ciertos casos, por ejemplo en empresas que montan una gran variedad de productos a partir de módulos comunes o bien las que empaquetan en diversos formatos productos fabricados a granel. Normalmente en estos casos el plan maestro se establece en los módulos o en el producto a granel, mientras que un programa de montaje final (*final assembly schedule*, FAS) define la última operación de montaje o empaquetado.

txocobo_400 gramos día	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
necesidades brutas		50	40	120	70		90	50	60	80	100		
en almacén pendiente de recibir	20	60											
existencias prev.	20	30	20	20	20	20	20	20	20	20	20		
necesidades netas			30	120	70		90	50	60	80	100		
ord. planif. rec.			30	120	70		90	50	60	80	100		
ord. planif. emis.					90	50		60	80	100			
órdenes en firme		30	120	70									

Fig. 9.1.1.12 Planificación de expediciones del almacén central y determinación del programa de empaquetado (FAS) para el producto (SKU) txocobo_400 gramos (stock de seguridad = 20 un, lote = uno a uno, plazo LT = 1 día, ventana de planificación = 3 días, no hay producción los sábados)

En la *figura 9.1.1.12* hemos establecido el programa de empaquetado (FAS) para el producto *txocobo_400 gramos* a partir de las órdenes de expedición consolidadas de los centros de distribución. Se empaquetan diariamente un número de unidades igual a las necesarias para las expediciones del día siguiente (plazo 1 día). Se mantiene un pequeño stock de seguridad de 20 unidades para hacer frente a las incidencias. Producción no opera los sábados, y tampoco hay expediciones este día. Por tanto el producto correspondiente a una orden lanzada en viernes llegará al almacén central el lunes siguiente. Así mismo, el producto que debería, de acuerdo con el plazo, entrar en el almacén en sábado (para, por ejemplo, llegar a los centros distribuidores en lunes) deberá entrar en viernes, y la emisión de su orden correspondiente deberá realizarse en jueves.

Esto explica el desplazamiento de las órdenes planificadas de 90 y 50 unidades de *txocobo_400 gramos*.

txocobo	día	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
400 gramos			30	120	70	90	50		60	80	100			
800 gramos			50	80	40		160		30		50			
1,5 kg			20	30		40	10		20	50	30			
TOTAL (kg)			82	157	60	96	163		78	107	125			

Fig. 9.1.1.13 Consolidación de las órdenes de empaquetado para determinar las necesidades brutas del producto *txocobo a granel*, a fin de poder establecer las ordenes del plan maestro

Para construir el plan maestro, necesitamos conocer las necesidades del producto *txocobo a granel*, las cuales resultarán de tener en cuenta todas las órdenes de empaquetado del FAS correspondientes a artículos que contienen dicho producto. Suponemos que el *txocobo* se empaqueta en tres formatos: 400 gramos, 800 gramos y 1,5 kilogramos. En la figura 9.1.1.13 hemos representado las órdenes de empaquetado y calculado las cantidades, en kilogramos, necesarias.

Si el producto *txocobo a granel* se fabrica en lotes de 250 kilogramos, manteniendo un stock de seguridad de 10 kilogramos, la figura 9.1.1.14 muestra la determinación de las ordenes de plan maestro, habiendo mantenido una ventana de planificación de 3 días (lo que presupone que la fabricación del producto es rápida). Las órdenes planificadas en firme expresan que deben llegar a empaquetado sendos lotes de 250 kilogramos el lunes y el miércoles de la semana considerada.

Vamos a mostrar una posible utilización de las órdenes en firme, la de alisar las cargas, en este caso de empaquetado. Para ello alisamos los valores de las órdenes en firme, considerando la media móvil, cuando es posible, de tres días consecutivos. Hemos ampliado la ventana de planificación a cinco días (una semana) para que el alisado sea más visible. En la figura 9.1.1.15 se detalla el cálculo de las órdenes de empaquetado para el artículo *txocobo_400 gramos*, partiendo de las mismas necesidades de expedición que en la figura 9.1.1.12. Las órdenes planificadas en firme para los cinco primeros días son ahora 75, 75, 70, 90, 65 en lugar de 30, 120, 70, 90, 50 (estas dos últimas eran órdenes planificadas en la figura 9.1.1.12, dado que allí la ventana de planificación era de 3 días).

txocobo_400 gramos día	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
necesidades brutas		82	157	60	96	163		78	107	125			
en almacén pendiente de recibir	10												
existencias prev.	10	178	21	211	115	202	202	124	17	142			
necesidades netas		82		49		58				118			
ord. planif. rec.		250		250		250				250			
ord. planif. emis.						250				250			
órdenes en firme		250		250									

Fig. 9.1.1.14 Determinación de las órdenes del plan maestro para el producto txocobo a granel (stock de seguridad = 10 kg, lote = 250 kg, plazo LT = 0 días, ventana de planificación = 3 días, no hay producción los sábados)

txocobo_400 gramos día	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
necesidades brutas		50	40	120	70		90	50	60	80	100		
en almacén pendiente de recibir	20	60											
existencias prev.	20	30	65	20	20	20	20	35	20	20	20		
necesidades netas			30	65	70		90	50	45	80	100		
ord. planif. rec.			75	75	70		90	65	45	80	100		
ord. planif. emis.								45	80	100			
órdenes en firme		75	75	70	90	65							

Fig. 9.1.1.15 Planificación de expediciones del almacén central y determinación del programa de empaquetado (FAS) para el producto (SKU) txocobo_400 gramos, alisando las órdenes en firme sobre 3 días (stock de seguridad = 20 un, lote = uno a uno, plazo LT = 1 día, ventana de planificación = 5 días, no hay producción los sábados)

En la *figura 9.1.1.16* hemos determinado las necesidades, en kilogramos, de *txocobo* a granel, a partir de las ordenes alisadas. Hemos sometido también al alisamiento los artículos *txocobo_800 gramos* y *txocobo_1,5 kg*, con una ventana de planificación de cinco días. Con dichas necesidades, en la *figura 9.1.1.17* hemos establecido las órdenes de plan maestro de *txocobo a granel*, que coinciden con las determinadas en la *figura 9.1.1.14* aunque ahora hemos mantenido la ventana de planificación en cinco días, por lo que el lote de 250 kilogramos del día 5 corresponde a una orden planificada en firme.

txocobo	día	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
400 gramos			75	75	70	90	65		45	80	100			
800 gramos			55	75	65	55	80		30		50			
1,5 Kg			20	30	20	25	25			50	30			
TOTAL (Kg)			104	135	110	118	127		42	107	125			

Fig. 9.1.1.16 Consolidación de las órdenes alisadas de empaquetado para determinar las necesidades brutas del producto txocobo a granel, a fin de poder establecer las órdenes del plan maestro

txocobo_400 gramos	día	SI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
necesidades brutas			104	135	110	118	127		42	107	125			
en almacén pendiente de recibir	10													
existencias prev.	10	156	21	161	43	166	166	124	17	142				
necesidades netas		104		99		94				118				
ord. planif. rec.		250		250		250				250				
ord. planif. emis.										250				
órdenes en firme		250		250		250								

Fig. 9.1.1.17 Determinación de las órdenes del plan maestro para el producto txocobo a granel, a partir del programa de empaquetado alisado (stock de seguridad = 10 kg, lote = 250 Kg, plazo LT = 0 días, ventana de planificación = 5 días, no hay producción los sábados)

DRP es una parte del módulo gestión de la demanda, que es el que realiza el enlace entre el sistema productivo y las ventas. Los planes que se derivan a partir de la información suministrada por DRP son la base para el proceso de distribución física; permiten planificar las necesidades de vehículos para el conjunto de expediciones futuras, establecer los programas de carga de dichos vehículos, determinar sus rutas y programar las recepciones en los centros de distribución.

Puesto que la demanda real varía respecto a las previsiones, es preciso proceder a una actualización sistemática de la información DRP, que puede conducir a modificaciones en los planes y programas. La inestabilidad resultante en los mismos puede paliarse, en parte, mediante órdenes planificadas en firme, que también pueden utilizarse en las expediciones a un centro de distribución determinado. En el caso de que la cantidad total de producto disponible sea insuficiente para atender todas las necesidades, el conocimiento sobre la situación que proporciona DRP permite determinar qué necesidades conviene atender y qué otras pueden diferirse.

Como ya se ha indicado, DRP comienza con las previsiones de la demanda elaboradas en los centros de distribución, que son los entes de la empresa que están más cerca de los clientes quienes, finalmente, son los que generan dicha demanda. Por tanto es razonable esperar que dichas previsiones sean más fiables que las establecidas por un gabinete central, aunque ello pueda exigir un trabajo de sensibilización y formación de los responsables de los centros de distribución. En algunos casos es posible iniciar la toma de datos del DRP en los clientes importantes, que pueden encontrar ventajas en el servicio recibido a cambio de facilitar la información necesaria.

DRP presupone la disposición centralizada de la información, aunque en parte sea elaborada periféricamente, y la comunicación tempestiva de la misma. En la mayoría de los casos será preciso disponer de un sistema informático de soporte; lo que hemos denominado estadillos se corresponderán, muy probablemente, a pantallas diseñadas adecuadamente.

El formato DRP debe ser compatible con el formato de la información utilizada en gestión de la producción, lo cual será simple si esta se apoya en una estructura MRP o análoga (de hecho la compatibilidad de formatos debe centrarse, sobre todo, entre las órdenes de expedición y las órdenes de plan maestro). La integración de DRP puede alcanzarse extendiendo la lista de materiales, para que el nivel cero corresponda al SKU situado en un almacén de un centro de distribución.

El mejor conocimiento de las expediciones programadas permite a los centros de distribución programar, a su vez, las labores que representan la descarga y entrada en almacén. También les permite informar mejor a los clientes, en caso de ruptura de stock, sobre el instante en que serán reaprovisionados de un artículo determinado.

9.1.2 Diseño de rutas de distribución

Las empresas de distribución, o de producción y distribución, se enfrentan diariamente al problema de diseño de rutas. Desde uno o varios almacenes hay que servir unas demandas de clientes o centros de distribución situados en determinadas posiciones, respetando diversos condicionamientos y optimizando, en la medida de lo posible, un objetivo.

Los sectores o las actividades en que se presenta este problema son numerosos y diversos. En algunos casos no se trata de distribuir uno o varios productos, sino de recoger unos desperdicios, unos materiales o una información (como, por ejemplo, recogida de monedas de cabinas telefónicas o de máquinas automáticas de venta de diversos productos, lectura de contadores, etc.), en otros no hay distribución ni recogida sino que se trata de prestar un servicio (inspección, mantenimiento, visitas médicas domiciliarias, ventas, etc.).

El problema más sencillo de los de este tipo es el que se conoce en la bibliografía científica con el nombre de *problema del viajante de comercio* (*Travelling Salesman Problem*, TSP). Dados unos puntos y una red de comunicaciones que los une y elegido uno de dichos puntos como origen, se trata de hallar un itinerario que pase una vez, y una sola, por cada uno de los puntos y vuelva al origen, con un coste mínimo (o longitud y tiempo de recorrido mínimos). Técnicamente se habla de hallar un ciclo o circuito *hamiltoniano* óptimo (lo que se busca es un circuito, es decir, un camino cerrado sobre sí mismo, puesto que el origen o destino puede ser arbitrariamente uno cualquiera de los puntos). Este problema, directamente, no tiene apenas interés práctico. En la realidad, hay muchos condicionamientos que no se tienen en cuenta en el enunciado, por ejemplo, las limitaciones en la capacidad del vehículo o en la longitud o tiempo del itinerario. Pero el TSP suele aparecer como subproblema en los problemas prácticos y de ahí que, sin olvidar motivaciones de tipo teórico, se hayan dedicado y se sigan dedicando muchos esfuerzos a resolverlo eficientemente. A pesar de que en los últimos años se ha progresado mucho, sigue siendo un problema muy difícil, pues el tiempo necesario para resolverlo exactamente crece exponencialmente con su dimensión, es decir, con el número de puntos a visitar. Por ello, generalmente, no es factible la solución exacta y se recurre a procedimientos de tipo heurístico que permiten encontrar buenas soluciones pero que no garantizan que se alcance el óptimo. Por supuesto, la dificultad de los problemas reales es, en general, mayor aún que la del TSP, por lo que casi nunca es factible encontrar económicamente una solución óptima de un problema de rutas y hay que conformarse con la solución obtenida heurísticamente.

9.1.2.1 Restricciones y objetivos

Una primera formalización del problema de rutas puede ser la siguiente: en una red de comunicaciones disponemos de un almacén o depósito central en el que se encuentran

vehículos de capacidades determinadas y hay que establecer las rutas para servir a unos clientes de los que se conoce su posición en la red y su demanda, que puede ser de uno o de varios productos.

En general, para realizar el servicio es necesario establecer más de una ruta (varios vehículos o varias rutas de un mismo vehículo). La representación gráfica de estos itinerarios recuerda, con un poco de imaginación, una flor, por lo que las rutas se denominan *pétalos* (fig. 9.1.2.1).

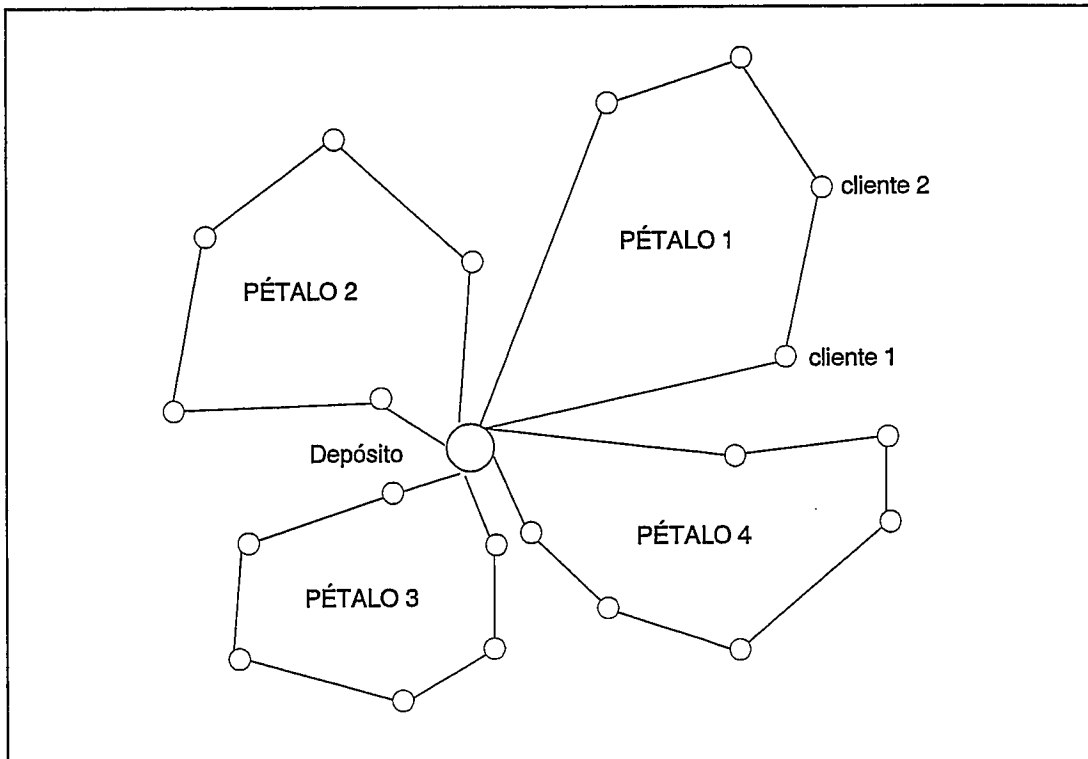


Fig. 9.1.2.1 Rutas de distribución o pétalos

Pero para seguir aproximando la formalización a la realidad hay que tener en cuenta, como mínimo, los aspectos que se comentan a continuación.

Hay que conocer las limitaciones relativas a las rutas. Por ejemplo, hay que considerar si cada vehículo puede realizar sólo una o, por el contrario, varias rutas en el período considerado. Por supuesto el tiempo para realizar la ruta está limitado y, además, hay que tener en cuenta los períodos de descanso de los conductores, que se pueden fijar rígidamente o dentro de ciertos límites. El tiempo necesario para recorrer una ruta incluye el que se requiere para los desplazamientos y también los tiempos de carga y descarga y

las posibles esperas. Una ruta puede incluir sólo distribución, sólo recogida o ambas actividades y, en este último caso, intercaladas o consecutivas.

Muchos vehículos pueden cargar simultáneamente diversos productos, pero no todos; por ejemplo, muchos camiones cisterna sólo pueden llevar un tipo de líquido en cada viaje. En algunos casos ello obliga a compartimentar el vehículo, como en el caso de productos congelados y no congelados, con lo que es necesario conocer la capacidad de cada compartimento y el tipo de producto que puede contener.

Los clientes y la red de comunicaciones introducen otros condicionantes. Algunos clientes sólo pueden ser servidos por vehículos de cierto tipo y en ciertos intervalos temporales o *ventanas* (horarios de carga y descarga establecidos por el municipio o el propio cliente).

Algunas empresas tienen una demanda estable, lo que permite establecer rutas regulares (cada día las mismas o rutas según los días de la semana). Si la demanda varía mucho de un período a otro, se tienen que establecer cotidianamente las rutas. En el caso de demanda estable, es probable que las soluciones obtenidas por los procedimientos manuales tradicionales sean bastante buenas, porque se habrán ido refinando a lo largo del tiempo. En el caso de demanda variable, cabe esperar mejoras importantes con la utilización de un paquete informático que incorpore algoritmos adecuados.

Por otra parte, una empresa puede disponer de diversos almacenes o depósitos. Si cada uno tiene sus propios clientes y sus propios vehículos, se deben resolver tantos problemas como almacenes, pero si hay interdependencia (por ejemplo, un vehículo puede cargar en un almacén, distribuir los productos y reponer en un almacén distinto), el problema se tiene que tratar globalmente y resulta más complejo.

Las restricciones a respetar pueden ser, pues, muy variadas, así como los objetivos. La empresa puede desear servir toda la demanda del período considerado y en este caso hacerlo con el mínimo coste, que puede incluir el de los vehículos propios y el de transportistas contratados (a veces el coste se substituye por la distancia recorrida o por el tiempo invertido), o bien servir toda la que pueda con su propio parque de vehículos. En este caso deberán fijarse unas prioridades de los clientes o de los pedidos.

Hasta aquí se ha supuesto que los recursos están predeterminados (posición del almacén y parque de vehículos). Desde luego, la empresa puede plantearse también la determinación del parque de vehículos más adecuado, a partir de una información más o menos precisa sobre los clientes y sus demandas.

9.1.2.2 Los datos

Cualquier procedimiento para el cálculo de rutas exige una información de partida: un

archivo o base de datos de vehículos, con capacidades, costes, etc.; otro de clientes (ubicación, ventanas temporales, vehículos admisibles), datos generales (regulaciones laborales de los conductores, etc.), demandas del período considerado y, desde luego, información sobre la red viaria.

Esta última puede presentarse en muy diversas formas. La solución que proporciona mayor flexibilidad y que permite reflejar más fielmente la realidad es disponer del *grafo* representativo de la red viaria, es decir, un inventario de todos los puntos (depósitos, clientes, intersecciones) y de todas las conexiones entre los mismos con sus características: longitud, tiempo de recorrido (que puede variar según las horas del día), etc. Existen archivos informáticos con los grafos correspondientes a las redes de comunicación de algunas zonas de determinados países, pero si no existen, o no se tiene acceso a ellos, se deben construir, lo que no es especialmente complicado pero sí muy laborioso y delicado. Dado el grafo, hay algoritmos bastante sencillos y rápidos que permiten calcular el mejor camino para ir de un punto a otro. Otra presentación, más fácil de poner en práctica pero más esquemática, consiste en almacenar la posición de los puntos (sus coordenadas) y aproximar la distancia entre ellos por su distancia en línea recta multiplicada por un coeficiente mayor que la unidad cuyo valor puede depender de la zona (para tener en cuenta la estructura de la red viaria). Con este enfoque se puede aproximar bastante bien la mayoría de distancias, pero no todas: a veces hay que incluir *barreras* (una autopista, etc.) o incluso una tabla con distancias entre ciertos puntos, porque su importancia aconseja utilizar un valor más preciso o porque su posición en la red así lo exige.

9.1.2.3 Los procedimientos de resolución

No cabe aquí una descripción detallada de los muy numerosos y diversos procedimientos existentes para el cálculo de rutas; en lo que sigue presentaremos tan sólo los algoritmos más sencillos. Dejando a un lado los procedimientos exactos, sólo aplicables prácticamente a problemas muy particulares, y limitándonos a los heurísticos, estos se pueden clasificar en dos grandes grupos: los *procedimientos constructivos* y los de *dos fases*.

En los primeros las rutas se construyen por pasos sucesivos, en cada uno de los cuales se determina un enlace entre dos clientes (habitualmente siguiendo un orden establecido por un indicador que se calcula previamente). Las rutas pueden contruirse en serie (una después de otra) o en paralelo. Estos procedimientos son los más tradicionales y una de sus mejores características es la flexibilidad que presentan para tener en cuenta diversos condicionamientos. A medida que se construye la ruta se puede comprobar si se respetan las limitaciones de longitud, tiempo, etc.

En los métodos de dos fases, en la primera se forman grupos de clientes de modo que cada grupo será servido en una ruta; la segunda fase consiste en resolver un problema del

viajante de comercio para cada uno de los grupos establecidos en la primera.

La solución obtenida con cualquiera de los dos tipos de procedimientos puede someterse finalmente a un proceso de mejora, por ejemplo, ensayando intercambios de clientes entre pétalos.

9.1.2.3.1 Resolución de TSP

Empezamos por TSP dado que se trata de un problema parecido pero más sencillo que el problema de rutas de vehículos y a causa de que, como se ha dicho, los métodos de las dos fases lo utilizan como subproblema.

Un algoritmo exacto para TSP fué propuesto por Little, Murty, Sweeney y Karol en 1963 y está basado en un procedimiento "*branch-and-bound*". Por consiguiente, su complejidad (tiempo necesario para la resolución) crece exponencialmente en función de la dimensión del problema, lo que imposibilita su aplicación práctica a partir de cierto tamaño del problema. Inicialmente presentaremos dos algoritmos heurísticos. El primero, muy sencillo, se inspira en el algoritmo de Kruskal para la determinación de árboles mínimos en un grafo; la adaptación que se realiza para construir circuitos en lugar de árboles conduce a que la solución obtenida no sea necesariamente óptima. El algoritmo es el siguiente:

supongamos el grafo simétrico (el coste o distancia es la misma en el trayecto de i a j que en el de j a i) con n vértices o puntos y $n \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ aristas o conexiones entre los mismos; llamaremos c_{ij} al coste de recorrer la arista que une i con j ($c_{i,i} = c_{i,j}$).

Paso 1: se ordenan las aristas en orden creciente de los costes,

Paso 2: mientras el número de aristas tomadas sea inferior a $n-1$, se toman para formar el ciclo las aristas en el orden de la lista siempre que la arista que se toma no forme horquilla o ciclo parcial con las ya tomadas (en cuyo caso se pasa a la arista siguiente),

Paso 3: cuando se han tomado $n-1$ aristas, la última queda automáticamente determinada, ya que es la que completa (cierra) el ciclo.

Denominamos horquilla a la situación en la que inciden en un vértice más de dos aristas, situación que no puede darse en un ciclo, puesto que en cada vértice sólo deben incidir dos aristas, la de entrada y la de salida del vértice.

En algunas aplicaciones del algoritmo descrito, cuando se han elegido $n - 2$ aristas, si están concatenadas, las dos restantes quedan automáticamente determinadas, por lo que podría modificarse el paso 3.

Ejemplo TSP_1: sea el grafo con $n = 6$ cuyos valores c_{ij} se indican en la *figura 9.1.2.2* (dada la simetría se indican únicamente los valores de c_{ij} para $i < j$).

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	—	10	15	11	7	9
2		—	9	13	6	8
3			—	10	9	8
4				—	8	7
5					—	2
6						—

Fig. 9.1.2.2 Distancias o costes del trayecto comprendido entre dos vértices del grafo del ejemplo TSP_1

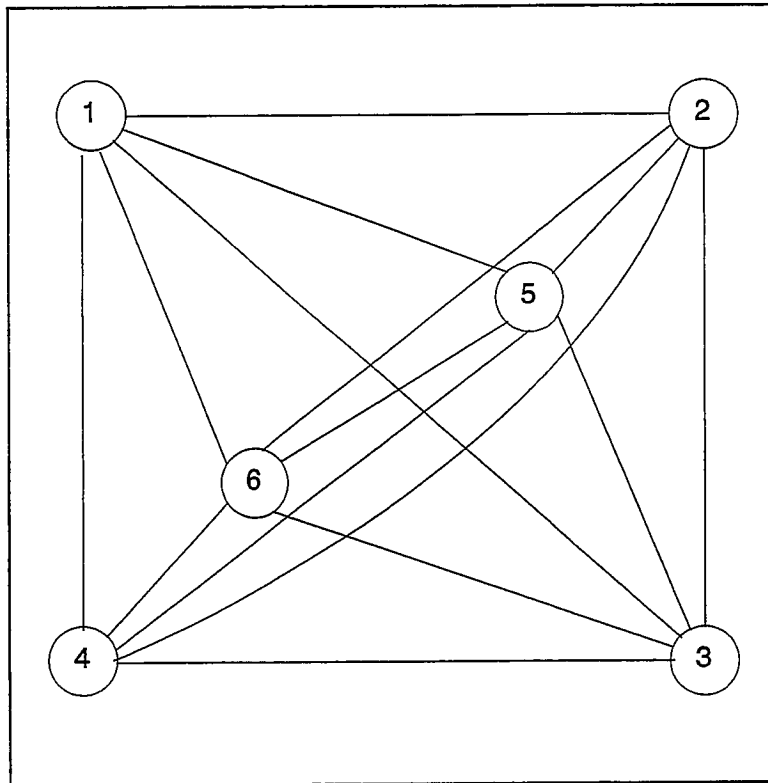


Fig. 9.1.2.3 Grafo del ejemplo TSP_1

El número de ciclos hamiltonianos existentes en este caso es $\frac{1}{2} \cdot 5! = 60$ (en el caso general $\frac{1}{2} \cdot (n-1)!$) dado que se corresponden a permutaciones circulares de los vértices y la simetría permite considerar indiferente el sentido del recorrido.

Las aristas ordenadas según valores crecientes de c_{ij} se encuentran en la *figura 9.1.2.4*.

(i,j)	c_{ij}	(i,j)	c_{ij}
(5,6)	2	(2,3)	9
(2,5)	6	(3,5)	9
(1,5)	7	(1,2)	10
(4,6)	7	(3,4)	10
(2,6)	8	(1,4)	11
(3,6)	8	(2,4)	13
(4,5)	8	(1,3)	15
(1,6)	9		

Fig. 9.1.2.4 Aristas del ejemplo TSP_1 ordenadas en sentido creciente de los costes

La aplicación del paso 2 conduce a:

arista considerada	c_{ij}	acción	número de aristas tomadas	Σc_{ij}
(5,6)	2	se toma	1	2
(2,5)	6	se toma	2	8
(1,5)	7	NO: horquilla en 5		
(4,6)	7	se toma	3	15
(2,6)	8	NO: horquilla en 6		
(3,6)	8	NO: horquilla en 6		
(4,5)	8	NO: horquilla en 5		
(1,6)	9	NO: horquilla en 6		
(2,3)	9	se toma	4	24
(3,5)	9	NO: horquilla en 5		
(1,2)	10	NO: horquilla en 2		
(3,4)	10	NO: ciclo parcial		
(1,4)	11	se toma	5	35

Hemos construido la cadena con 6 vértices:

3 - 2 - 5 - 6 - 4 - 1

la arista que completa el ciclo es la (1,3) cuyo coste es 15 (a añadir al 35 anterior). Por tanto, el ciclo determinado es:

1 - 3 - 2 - 5 - 6 - 4 - 1 valor = 50

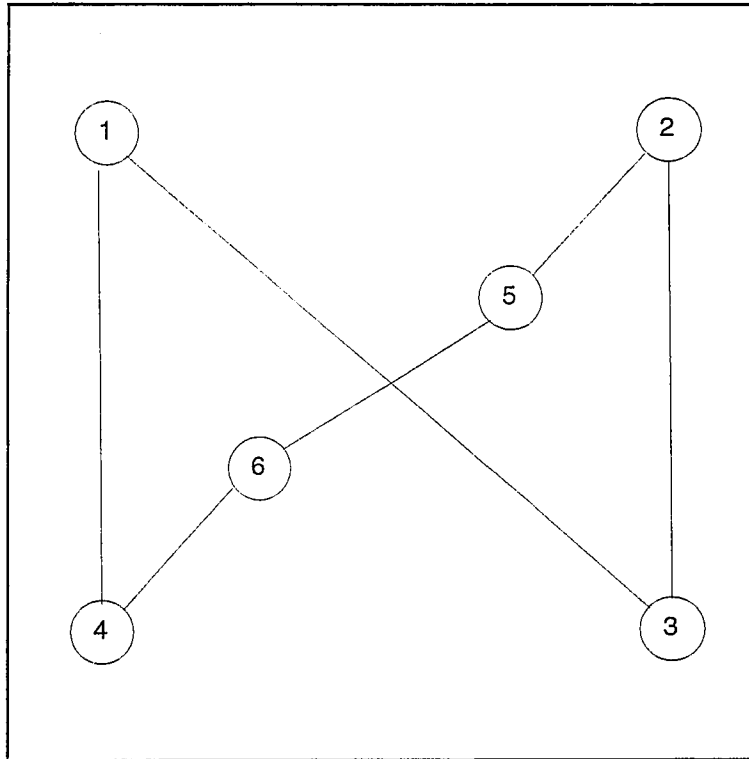


Fig. 9.1.2.5 Primera solución del problema TSP_1

Hemos descrito una versión paralela del algoritmo, lo que significa que la construcción del ciclo se realiza de tal forma que en un momento dado de la construcción podemos encontrarnos con varios segmentos del ciclo final no concatenados entre sí (cosa que en el ejemplo no ocurre). Aunque la manipulación informática de dichos segmentos no presenta dificultades especiales, puede considerarse más sencillo utilizar la versión serie o secuencial del algoritmo obtenida mediante una pequeña alteración del paso 2 (considerando únicamente como candidatos a la elección las aristas que concatenan). Un inconveniente mayor reside en el hecho de que las primeras aristas elegidas condicionan las siguientes, por lo que las últimas pueden ser las de mayor coste; en nuestro ejemplo la quinta arista elegida, la (1,4), es la antepenúltima de la lista ordenada, y la sexta, la que cierra el ciclo (1,3), la última.

Un procedimiento para paliar en parte este último inconveniente es el que utiliza en lugar de los costes los *ahorros* de las aristas. Llamaremos *grado de centralización* de un vértice i , G_i , la suma de los costes de las aristas que unen este vértice a todos los demás.

$$G_i = \sum_{j=1}^n c_{i,j}$$

en donde se ha supuesto $c_{i,i} = 0$. Cuanto menor es G_i , más "céntrico" es el vértice i . En el ejemplo:

$$G_1 = 52 \quad G_2 = 46 \quad G_3 = 51 \quad G_4 = 51 \quad G_5 = 32 \quad G_6 = 34$$

por tanto, el vértice más céntrico es el 5.

Llamaremos *ahorro* o *alejamiento* de la arista (i,j) respecto al centro O al valor:

$$a_{i,j} = c_{i,0} + c_{0,j} - c_{i,j}$$

que en definitiva mide la ventaja relativa de ir directamente de i a j , en lugar de efectuar el trayecto pasando por el centro O . Si se cumple la desigualdad triangular $a_{i,j} \geq 0$, lo que ocurrirá si el coste tiene un significado asociable a un concepto de distancia. El ahorro de cualquier arista que incida en el centro es 0.

Sea σ un ciclo cualquiera y sumemos las expresiones correspondientes a los ahorros de todas las aristas del ciclo (llamaremos $a(\sigma)$ y $c(\sigma)$ a la suma de los ahorros y de los costes, respectivamente, de dichas aristas):

$$a(\sigma) = G_0 + G_0 + c(\sigma)$$

es decir:

$$a(\sigma) + c(\sigma) = 2 \cdot G_0$$

Como una vez elegido O , G_0 es una constante, la expresión anterior nos indica que el ciclo de mínimo coste es el de máximo ahorro; en lugar de buscar el ciclo de coste mínimo podemos concentrar nuestros esfuerzos en buscar el ciclo de ahorro máximo utilizando, por ejemplo, una modificación de nuestro algoritmo anterior.

Paso 1: se ordenan las aristas que no pasan por el centro en orden decreciente de los ahorros.

Paso 2: mientras el número de aristas tomadas sea inferior a $n - 2$, se toman para formar el ciclo las aristas en el orden de la lista

siempre que la arista que se toma no forme horquilla o ciclo parcial con las ya tomadas (en cuyo caso se pasa a la arista siguiente).

Paso 3: cuando se han tomado $n-2$ aristas, las dos últimas quedan automáticamente determinadas, ya que son las que completan (cierran) el ciclo, pasando por el centro y ambas tienen ahorro 0).

Ejemplo TSP_1; Vamos a aplicar el procedimiento al ejemplo TSP_1, elegimos el vértice 5 como centro (dado que G_5 es el grado de centralización menor, y por ello repercutirá en la reducción de la variabilidad de $c(\sigma)$ y $a(\sigma)$). Los ahorros correspondientes se encuentran en la *figura 9.1.2.6*, y las aristas ordenadas en orden decreciente de los ahorros en la *9.1.2.7*.

i\j	1	2	3	4	5	6
1	—	3	1	4	0	0
2		—	6	1	0	0
3			—	7	0	3
4				—	0	3
5					—	0
6						—

Fig. 9.1.2.6 Ahorros entre los vértices del grafo del ejemplo TSP_1, con centro el vértice 5

(3,4)	7	(4,6)	3
(2,3)	6	(1,3)	1
(1,4)	4	(2,4)	1
(1,2)	3	(1,6)	0
(3,6)	3	(2,6)	0

Fig. 9.1.2.7 Aristas del ejemplo TSP_1 ordenadas en sentido decreciente de los ahorros

La aplicación del paso 2 conduce a:

arista considerada	a_{ij}	acción	número de aristas tomadas	Σa_{ij}
(3,4)	7	se toma	1	7
(2,3)	6	se toma	2	13
(1,4)	4	se toma	3	17
(1,2)	3	NO: ciclo parcial		
(3,6)	3	NO: horquilla en 3		
(4,6)	3	NO: horquilla en 4		
(1,3)	1	NO: ciclo parcial		
(2,4)	1	NO: ciclo parcial		
(1,6)	0	se toma	4	17

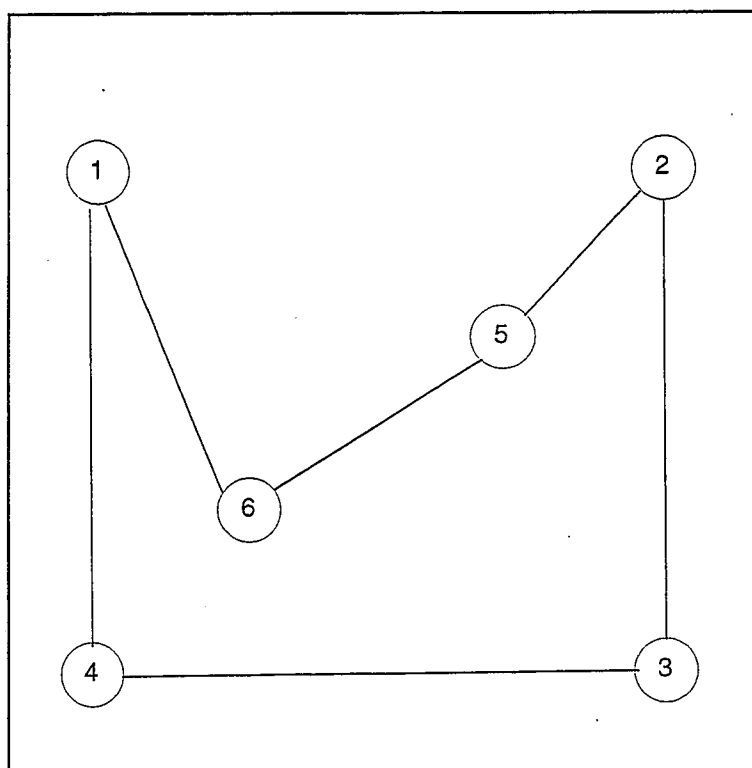


Fig. 9.1.2.8 Segunda solución del problema TSP_1

Se ha construido una cadena con 5 vértices:

$$6 - 1 - 4 - 3 - 2$$

que, completada con dos aristas que inciden en el centro, (5,6) y (2,5), nos proporciona el ciclo:

$$1 - 4 - 3 - 2 - 5 - 6 - 1$$

de ahorro total 17, y por tanto de coste total:

$$2 \times 32 - 17 = 47$$

es decir menor que el determinado anteriormente.

Aplicación a grafos asimétricos

Los procedimientos anteriores son aplicables a grafos asimétricos, es decir, aquéllos en los que los costes del trayecto de i a j dependen del sentido del movimiento ($c_{i,j}$ y $c_{j,i}$ no tienen por qué ser iguales). Esta situación se presentará en los problemas de distribución si existen tramos de comunicación unidireccionales (por ejemplo direcciones prohibidas), y es común en algunos problemas de origen industrial que pueden modelizarse mediante TSP (ver el ejemplo TSP_2).

Además de tener que considerar un número de arcos doble que el número de aristas del caso anterior, existe una nueva circunstancia que elimina arcos en la selección de los mismos (paso 2). Si se ha tomado un arco que emerge del vértice i , todos los demás arcos que emerjan de dicho vértice deberán rechazarse en las elecciones posteriores (ya que los únicos arcos aceptables, en ausencia de ciclo o de horquilla, serán los que incidan en el vértice i). Denominaremos *incidencia* a esta causa de rechazo y el paso 2 quedará (en ambos procedimientos, minimizar costes o maximizar ahorros) como sigue:

Paso 2: mientras el número de arcos tomados sea inferior a $n-1$ (o a $n-2$ en el caso de considerar ahorros), se toman para formar el circuito los arcos en el orden de la lista siempre que el arco que se toma no forme horquilla o ciclo parcial con los ya tomados o no incida en un vértice en el mismo sentido que un arco ya tomado (en cuyo caso se pasa al arco siguiente).

Dada la orientación de los arcos cabe definir dos grados de centralización de un vértice, el interior, G_i^- , y el exterior, G_i^+ :

$$G_i^- = \sum_{j=1}^n c_{j,i} \quad G_i^+ = \sum_{j=1}^n c_{j,i}$$

siendo el vértice más céntrico el de menor $G_i^- + G_i^+$. Adoptamos la definición de ahorro indicada (en la que ya habíamos escrito las expresiones de forma que pudiese tenerse en cuenta la orientación). La expresión que relaciona el ahorro de un circuito con su coste queda:

$$a(\sigma) + c(\sigma) = G_i^- + G_i^+$$

por consiguiente, sigue cumpliéndose que el circuito de coste mínimo es el de ahorro máximo.

Ejemplo TSP_2: Un problema que adopta la forma TSP es el de establecer la secuencia (cíclica) de realización de diversas piezas en una máquina cuando el tiempo de preparación de cada pieza es función no sólo de la misma sino también de la pieza que se ha realizado anteriormente en la máquina, siendo la función objetivo, que se desea minimizar, el total de los tiempos de preparación. En el ejemplo la secuencia se asocia a los colores distintos en que puede pintarse las diferentes unidades de cierto objeto: el cambio de color exige la limpieza de los circuitos de pintura para eliminar los restos del color antiguo, y será tanto más costosa (por ejemplo, en tiempo) cuanto mayor sea el contraste de tonalidades entre ambos colores. Existe, consecuentemente, asimetría en dichos costes.

	B	A	R	V	N	M
Blanco	—	3	8	9	6	7
Amarillo	4	—	9	6	7	8
Rojo	10	9	—	8	7	6
Verde	13	10	12	—	6	5
Negro	20	18	11	14	—	10
Azul marino	18	17	10	15	12	—

Fig. 9.1.2.9 Coste de transición de un vértice a otro en el grafo del ejemplo TSP_2

El número de circuitos hamiltonianos existentes en este caso es $5! = 120$ (en general $(n-1)!$) dado que cada uno de ellos se corresponde a una permutación circular de los vértices.

Los valores de los costes del ejemplo se encuentran en la figura 9.1.2.9 y la lista de arcos en orden creciente del coste en la 9.1.2.11.

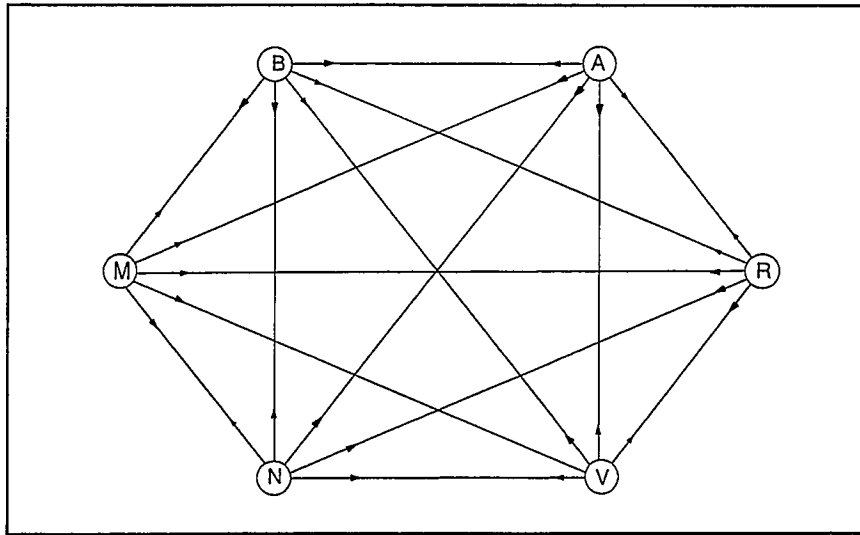


Fig. 9.1.2.10 Grafo del ejemplo TSP_2 (se han indicado los arcos con un solo trazo dotado de dos flechas para simplificar el esquema)

arco considerado	$c_{i,j}$	acción	número de arcos tomados	$\Sigma c_{i,j}$
BA	3	se toma	1	3
AB	4	NO: ciclo parcial		
VM	5	se toma	2	8
BN	6	NO: incidencia en B		
AV	6	se toma	3	14
RM	6	NO: incidencia en M		
VN	6	NO: horquilla en V		
BM	7	NO: ciclo parcial		
AN	7	NO: horquilla en A		
RN	7	se toma	4	21
BR	8	NO: incidencia en B		
AM	8	NO: ciclo parcial		
RV	8	NO: incidencia en R		
BV	9	NO: incidencia en B		
AR	9	NO: horquilla en A		
RA	9	NO: incidencia en R		
RB	10	NO: incidencia en R		
VA	10	NO: ciclo parcial		
NM	10	NO: incidencia en M		
MR	10	se toma	5	31

Minimizando costes la aplicación del paso 2 del algoritmo conduce a la secuencia expuesta en la tabla superior (cuando hemos rechazado un arco hemos indicado sólo una de las razones aunque en algunos casos existen varias).

Hemos construido el camino de seis vértices:

$$B - A - V - M - R - N$$

El arco que completa el circuito es el NB de coste 20; por tanto, el circuito resultante es:

$$B - A - V - M - R - N - B$$

de coste total 51.

BA	3	BR	8	NR	11
AB	4	AM	8	VR	12
VM	5	RV	8	MN	12
BN	6	BV	9	VB	13
AV	6	AR	9	NV	14
RM	6	RA	9	MV	15
VN	6	RB	10	MA	17
BM	7	VA	10	NA	18
AN	7	NM	10	MB	18
RN	7	MR	10	NB	20

Fig. 9.1.2.11 Arcos ordenados en sentido creciente de los costes

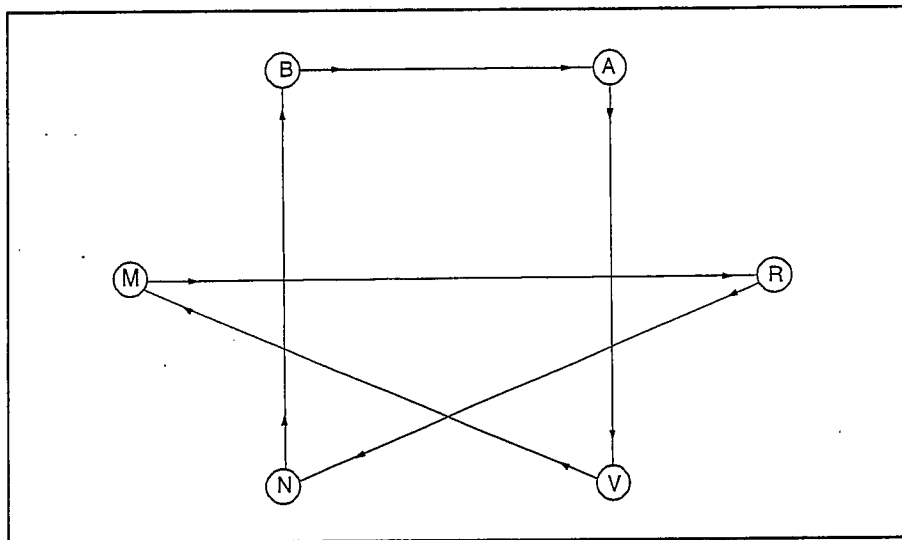


Fig. 9.1.2.12 Primera solución del ejemplo TSP_2

i	G_i^-	G_i^+	$G_i^- + G_i^+$
B	65	33	98
A	57	34	91
R	50	40	90
V	52	46	98
N	38	73	111
M	36	72	108

Fig. 9.1.2.13 Grados de centralización de los vértices del grafo del ejemplo TSP_2

Pasemos a considerar los ahorros. Los grados de centralización se han resumido en la figura 9.1.2.13; el vértice más céntrico es el R respecto al cual hemos calculado los ahorros en la figura 9.1.2.14 y ordenado los arcos en orden decreciente de los mismos en la 9.1.2.15.

	B	A	R	V	N	M
Blanco	—	14	0	7	9	7
Amarillo	15	—	0	11	9	7
Rojo	0	0	—	0	0	0
Verde	9	11	0	—	13	13
Negro	1	2	0	5	—	7
Azul marino	2	2	0	3	5	—

Fig. 9.1.2.14 Ahorros respecto al centro R en el grafo del ejemplo TSP_2

AB	15	AN	9	MN	5
BA	14	VB	9	NV	3
VN	13	BV	7	NA	2
VM	13	BM	7	MB	2
AV	11	AM	7	MA	2
VA	11	NM	7	NB	1
BN	9	NV	5		

Fig. 9.1.2.15 Arcos ordenados en sentido decreciente de los ahorros

La aplicación del paso 2 del algoritmo es como sigue:

arco considerado	$a_{i,j}$	acción	número de arcos tomados	$\Sigma a_{i,j}$
AB	15	se toma	1	15
BA	14	NO: ciclo parcial		
VN	13	se toma	2	28
VM	13	NO: incidencia en V		
AV	11	NO: incidencia en A		
VA	11	NO: incidencia en V		
BN	9	NO: incidencia en N		
AN	9	NO: incidencia en A		
VB	9	NO: incidencia en V		
BV	7	se toma	3	35
BM	7	NO: horquilla en B		
AM	7	NO: incidencia en A		
NM	7	se toma	4	42

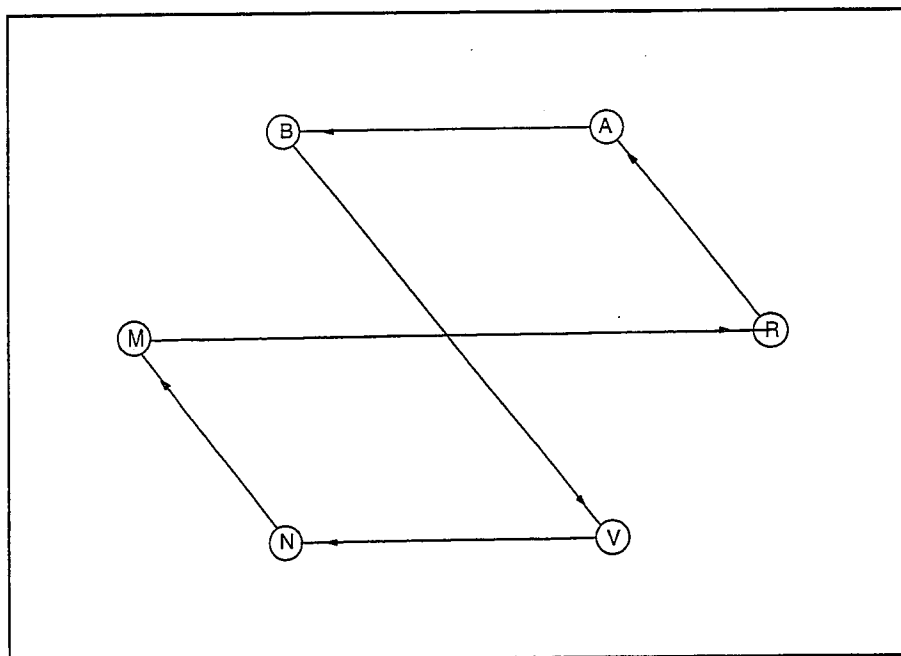


Fig. 9.1.2.16 Segunda solución del ejemplo TSP_2

Hemos construido el camino de 5 vértices:

$$A - B - V - N - M$$

que, completado con los arcos RA y MR , conduce al circuito:

$$B - V - N - M - R - A - B$$

de ahorro total 42, y por tanto de coste total:

$$50 + 40 - 42 = 48$$

menor que el anterior.

Algoritmo de Little

Este algoritmo tiene aspectos similares al algoritmo húngaro para la resolución del problema de afectación (ver **Volumen I**, apartado 5.1.3). La razón es muy simple, un circuito hamiltoniano (que pase una vez y sólo una por cada uno de los vértices) define una asignación: cada vértice se puede asociar o asignar a su siguiente. El recíproco no es cierto, una asignación no es necesariamente un circuito hamiltoniano ya que puede implicar más de un circuito; por ejemplo, en el problema TSP_2 una asignación puede estar formada por las parejas:

$$(B,A) \quad (A,M) \quad (R,V) \quad (V,R) \quad (N,B) \quad (M,N)$$

Que es una asignación resulta evidente: todos los vértices figuran una vez y sólo una tanto a la derecha como a la izquierda de los paréntesis. Sin embargo, esta asignación define dos circuitos:

$$B - A - M - N - B \quad \text{y} \quad R - V - R$$

Si aplicando el algoritmo húngaro al problema determináramos la asignación de coste total mínimo y esta definiera un sólo circuito, habríamos hallado la solución de nuestro problema TSP. Desgraciadamente éste no suele ser el caso. En la *figura 9.1.2.17 (a)* hemos reproducido la matriz de costes del ejemplo TSP_2, en la que los trazos en la diagonal principal indican posiciones prohibidas ya que para formar circuitos un vértice no se puede asignar a sí mismo (por tanto, ahora el valor asociado implícitamente a c_{ii} es infinito).

Hemos creado un cero en cada fila (fig. 9.1.2.17 (b)) y en cada columna (fig. 9.1.2.17 (c)) restando respectivamente los valores mínimos de fila y de columna. Hemos restado en total:

$$3 + 4 + 6 + 5 + 10 + 10 + 2 + 1 = 41 \text{ unidades}$$

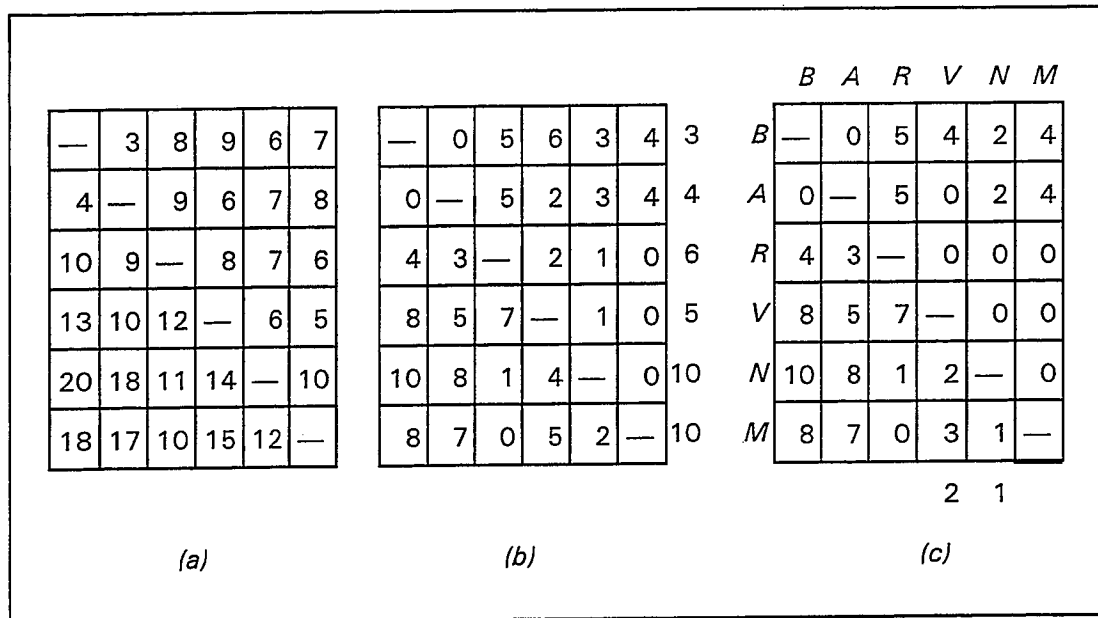


Fig. 9.1.2.17 Creación de ceros en la matriz de costes del problema TSP_2

En la figura 9.1.2.17 (c) es fácil hallar una asignación formada únicamente por ceros (que es única) y que por tanto, referida a la matriz original, tendría un coste total de 41. Esta asignación es:

$$(B,A) \quad (A,B) \quad (R,V) \quad (V,N) \quad (N,M) \quad (M,R)$$

que corresponde a dos circuitos:

$$B - A - B \quad \text{y} \quad R - V - N - M - R$$

El algoritmo de Little busca una asignación formada únicamente por ceros, pero tomando precauciones especiales para evitar la aparición de circuitos parciales (la aparición simultánea de BA y AB, por ejemplo, en la asignación).

Para ello realiza sistemáticamente una separación de las soluciones posibles en dos subconjuntos, según utilicen o no un arco (que corresponde a una de las casillas con 0). Para elegir este arco analiza cuál de los candidatos rechazados puede empeorar más el coste de las soluciones del segundo subconjunto, lo que se efectúa calculando para cada casilla con 0 la suma del mínimo de su fila y del mínimo de su columna (prescindiendo, naturalmente, de dicho 0). La razón es muy simple, puesto que cada asignación corresponde a utilizar una casilla de cada fila y de cada columna, la no utilización de la casilla considerada exige que en su lugar se utilicen otras diferentes de su fila y de su columna, y la suma indicada es una cota del suplemento de coste inducido. Este valor lo denominaremos $\mu(i,j)$, siendo (i,j) una casilla de valor 0. En nuestro caso, partiendo de la matriz de la *figura 9.1.2.17 (c)*, tenemos:

$$\mu(B,A) = 5 \qquad \mu(R,M) = 0$$

$$\mu(A,B) = 4 \qquad \mu(V,N) = 0$$

$$\mu(A,V) = 0 \qquad \mu(V,M) = 0$$

$$\mu(R,V) = 0 \qquad \mu(N,M) = 1$$

$$\mu(R,N) = 0 \qquad \mu(M,R) = 2$$

El mayor valor, 5, corresponde al arco BA ; por tanto, separaremos las soluciones en dos clases: las que utilizan el arco BA y las que no lo utilizan. Podemos acotar estas últimas mediante el valor $41 + 5 = 46$, que corresponde al valor de la cota inicial obtenida en la creación de ceros más el mínimo suplemento de coste debido a la no utilización del arco BA (*fig. 9.1.2.28*, vértice 2 del árbol de soluciones). En cuanto al subconjunto de soluciones que utilizan el arco BA , las deberemos acotar considerando específicamente el caso (puesto que estamos buscando un circuito hamiltoniano y no una asignación, al haber tomado BA prohibiremos automáticamente AB , que formaría un ciclo parcial y, como puede verse en los valores de μ anteriores, la eliminación de AB introduce un suplemento de coste de 4 unidades por lo menos). Para ello eliminaremos de la matriz de la *figura 9.1.2.17 (c)* (correspondiente al vértice 0 del árbol de soluciones) la fila B y la columna A , e introduciremos la prohibición de los ciclos parciales (*figura 9.1.2.18 (a)*). Esta prohibición puede realizarse automáticamente sobre la matriz, sin consultar el camino construido hasta el momento si tenemos en cuenta que sistemáticamente por causa de los ciclos parciales debe existir una casilla prohibida en cada fila y en cada columna; en nuestro caso, después de eliminar la fila B y la columna A , la única fila sin casillas prohibidas era la A y la única columna la B .

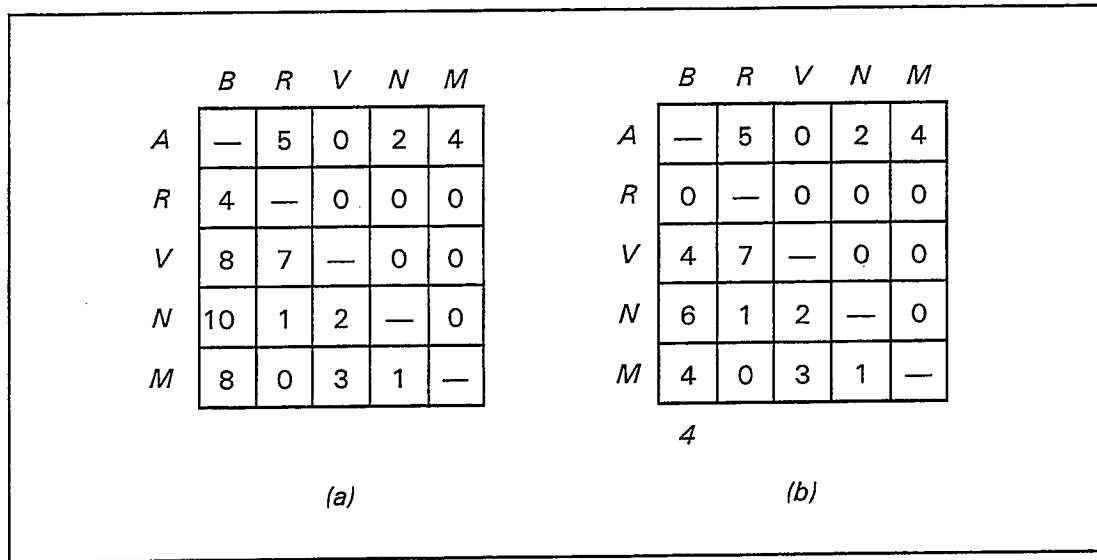


Fig. 9.1.2.18 Matriz del vértice 1 del árbol de soluciones

Observamos que la columna *B* de la matriz no tiene ningún 0, por lo que restamos el mínimo de la columna 4 (fig. 9.1.2.18 (b)). Este valor es el suplemento de coste correspondiente, por lo que la cota de las soluciones del subconjunto será $41 + 4 = 45$. Dado que el vértice 1 del árbol de soluciones tiene mejor cota que el vértice 2, seguimos la exploración por él, determinando los valores $\mu(i,j)$ (sólo se indican los superiores a 0):

$$\mu(A, V) = 2$$

$$\mu(R, B) = 4$$

$$\mu(N, M) = 1$$

$$\mu(M, R) = 2$$

El nuevo arco respecto al cual realizaremos la separación de soluciones será el *RB*; el subconjunto de soluciones sin el arco *RB* tendrá una cota $45 + 4 = 49$ (vértice 4 del árbol de soluciones), mientras que el subconjunto de soluciones con el arco *RB* (además del *BA*) sigue siendo 45 como se deduce en la matriz de la figura 9.1.2.19, que resulta de eliminar la fila *R* y la columna *B* de la matriz de la figura 9.1.2.18 (b) prohibiendo la casilla (*A,R*) que permitiría crear un ciclo parcial. Dado que en todas las filas y columnas hay por lo menos un 0, no se produce ningún coste suplementario. Los valores $\mu(i,j)$ mayores que 0 son:

$$\mu(A, V) = 4$$

$$\mu(V, N) = 1$$

$$\mu(N, M) = 1$$

$$\mu(M, R) = 2$$

	R	V	N	M
A	—	0	2	4
V	7	—	0	0
N	1	2	—	0
M	0	3	1	—

Fig. 9.1.2.19 Matriz del vértice 3 del árbol de soluciones

El nuevo arco considerado es el AV; el subconjunto de soluciones que no utiliza dicho arco tiene la cota 49 (vértice 6 del árbol de soluciones), mientras que el subconjunto de soluciones que utilizan los tres arcos considerados mantiene la cota 45. según se deduce de la figura 9.1.2.20.

	R	N	M
V	-	0	0
N	1	-	0
M	0	1	-

Fig. 9.1.2.20 Matriz del vértice 5 del árbol de soluciones

Los nuevos valores $\mu(i,j)$ diferentes de 0 son:

$$\mu(V, N) = 1$$

$$\mu(N, M) = 1$$

$$\mu(M, R) = 2$$

Elegimos como nuevo arco a considerar el MR ; el subconjunto de soluciones que no utiliza este arco (pero sí los tres anteriores) tiene por cota 47 (vértice 8 del árbol de soluciones), mientras que las soluciones que utilizan los cuatro arcos mantienen la cota 45 (fig. 9.1.2.21). Como la matriz correspondiente sólo tiene en las casillas no prohibidas valores cero, existe una solución de valor igual a la cota, específicamente:

$$B - A - V - N - M - R - B$$

que es óptima (y mejor que las halladas hasta el momento).

	N	M
V	0	—
N	—	0

Fig. 9.1.2.21 Matriz del vértice 7 del árbol de soluciones

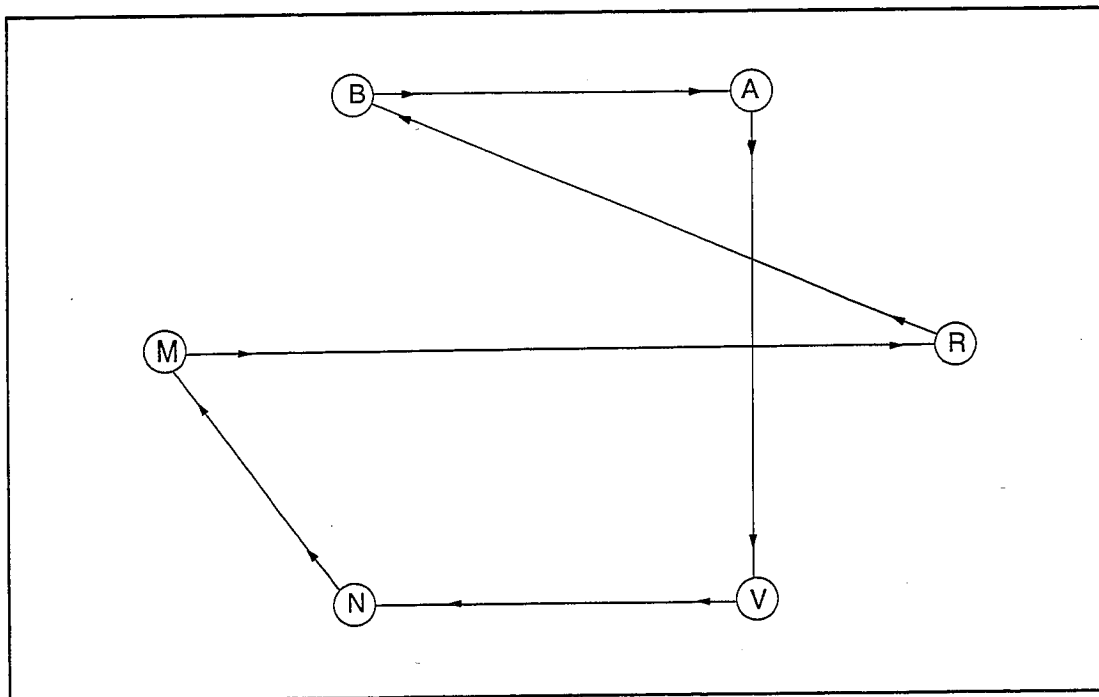


Fig. 9.1.2.22 Solución óptima del ejemplo TSP_2

En este caso no ha sido necesario explorar ningún vértice del árbol de soluciones en el que se haya prohibido un arco. Para analizar el procedimiento en dicha circunstancia vamos a explorar el vértice número 2, cuya cota es 46 y que, por tanto, no puede contener ningún óptimo pero sí soluciones de coste total 46. Para ello tomamos la matriz del vértice padre (cuyo número es 1) y prohibimos la casilla correspondiente al arco AB (hemos indicado la prohibición con X para distinguir dicha casilla de las prohibidas para evitar ciclos parciales, y seguir permitiendo la creación automática de estas prohibiciones). La matriz (fig. 9.1.2.23 (a)) carece de ceros en la primera fila y en la segunda columna, lo que permite restar $3 + 3 = 6$ unidades, que son las ya tenidas en cuenta al fijar la cota en $41 + 5 = 46$ (fig. 9.1.2.23 (c)).

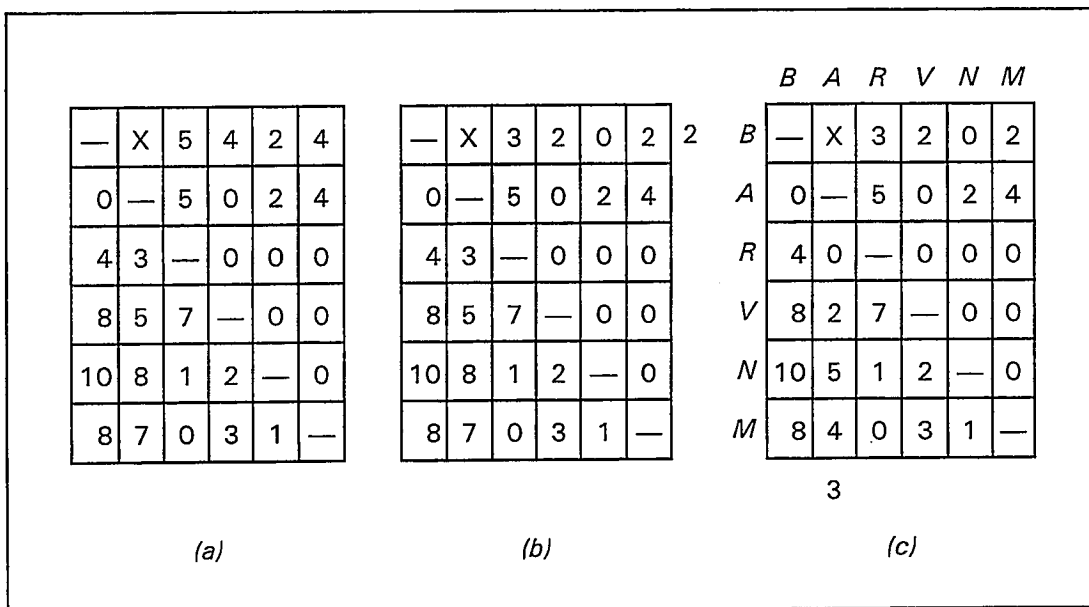


Fig. 9.1.2.23 Matriz del vértice 2 del árbol de soluciones

Los valores $\mu(i,j)$ mayores que cero correspondientes son:

$$\mu(B, N) = 2$$

$$\mu(A, B) = 4$$

$$\mu(R, A) = 2$$

$$\mu(N, M) = 1$$

$$\mu(M, R) = 2$$

Separaremos las soluciones según utilicen o no el arco AB , las que no lo utilizan (y tampoco el BA) tienen una cota de $46 + 4 = 50$. Las que lo utilizan mantienen la cota 46, como puede verse en la *figura 9.1.2.24* (aunque este valor es engañoso ya que los arcos correspondientes a los cinco valores con $\mu(i,j) > 0$ definen un circuito parcial de cinco arcos, que en algún momento de aplicación del algoritmo deberemos rechazar).

	A	R	V	N	M
B	—	3	2	0	2
R	0	—	0	0	0
V	2	7	—	0	0
N	5	1	2	—	0
M	4	0	3	1	—

Fig. 9.1.2.24 Matriz del vértice 9 del árbol de soluciones

En la matriz de la *figura 9.1.2.24* la casilla (B,A) queda prohibida para evitar un ciclo parcial; por tanto, hemos substituido el símbolo X por "—". Los valores $\mu(i,j)$ mayores que cero son ahora:

$$\mu(B, N) = 2$$

$$\mu(R, A) = 2$$

$$\mu(R, V) = 2$$

$$\mu(N, M) = 1$$

$$\mu(M, R) = 2$$

en donde la imposibilidad de tomar a la vez los arcos RA y RV indica que las soluciones son por lo menos 2 unidades superiores a la cota. Separaremos de acuerdo con el arco BN , en caso de tomarlo la cota sigue siendo (aparentemente) 46 (*fig. 9.1.2.25*).

	A	R	V	M
R	0	—	0	0
V	2	7	—	0
N	—	1	2	0
M	4	0	3	—

Fig. 9.1.2.25 Matriz del vértice 11 del árbol de soluciones

Los nuevos valores de $\mu(i,j)$ no nulos son:

$$\mu(R,A) = 2$$

$$\mu(R,V) = 2$$

$$\mu(V,M) = 2$$

$$\mu(N,M) = 1$$

$$\mu(M,R) = 4$$

	A	V	M
R	0	0	0
V	2	—	0
N	—	2	0

Fig. 9.1.2.26 Matriz del vértice 13 del árbol de soluciones

donde, además de la incompatibilidad entre RA y RV , detectamos la existente entre VM y NM . Separamos según el arco MR y en caso de tomarlo tenemos la matriz de la figura 9.1.2.26, que mantiene la cota en 46. Los valores no nulos de $\mu(i,j)$ son:

$$\mu(R,A) = 2$$

$$\mu(R,V) = 2$$

$$\mu(V,M) = 2$$

$$\mu(N,M) = 2$$

y procedemos a la separación según el arco RA . La matriz correspondiente se presenta en la figura 9.1.2.27 (a), que carece de cero en la primera columna y en la segunda fila, restando 2 (lo que hace pasar la cota a 48) obtenemos la matriz de la figura 9.1.2.27 (b), compuesta exclusivamente por ceros (salvo las casillas prohibidas) que indica la existencia de una solución con el valor de la cota, concretamente:

$$B - N - V - M - R - A - B$$

que no coincide con la solución de idéntico valor representada en la figura 9.1.2.16 (que se obtendría a partir del vértice 12 del árbol de soluciones).

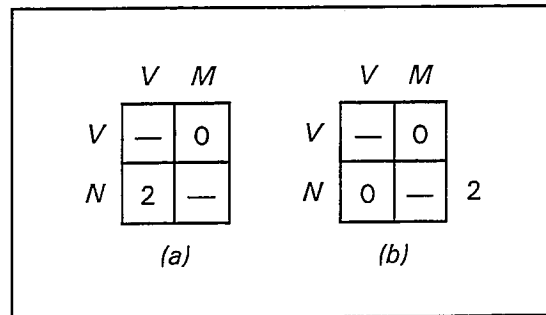


Fig. 9.1.2.27 Matriz del vértice 15 del árbol de soluciones

El árbol de soluciones que sintetiza la marcha del algoritmo se ha representado en la *figura 9.1.2.28*. La solución óptima, que es única, tiene un coste total de valor 45. No existe ninguna solución de valor 46, pero sí una de valor 47 que puede deducirse explorando el vértice 8 del árbol de soluciones, que contiene un único circuito (puesto que todos los arcos adicionales vienen forzados por las prohibiciones):

$$B - A - V - M - N - R - B$$

con dicho coste total. Con coste total 48, además de las dos soluciones ya indicadas, existe una tercera:

$$B - N - M - R - V - A - B$$

que se obtiene explorando a partir del vértice 16 del árbol de soluciones.

Queremos insistir en el hecho de que el mismo algoritmo, sin la prohibición de casillas para evitar ciclos parciales, permite resolver el problema de asignación.

La aplicación al caso simétrico del ejemplo TSP_1 se realiza de la misma forma, aunque conviene tener en cuenta dos observaciones:

- la simetría se pierde al crear los ceros en la matriz, el algoritmo opera considerando arcos en lugar de aristas,
- puesto que el mismo ciclo puede recorrerse en dos sentidos, dando dos circuitos, siempre existirán por lo menos dos soluciones óptimas y la primera separación no es efectiva (si se prohíbe AB siempre queda como arco posible BA que tiene el mismo coste).

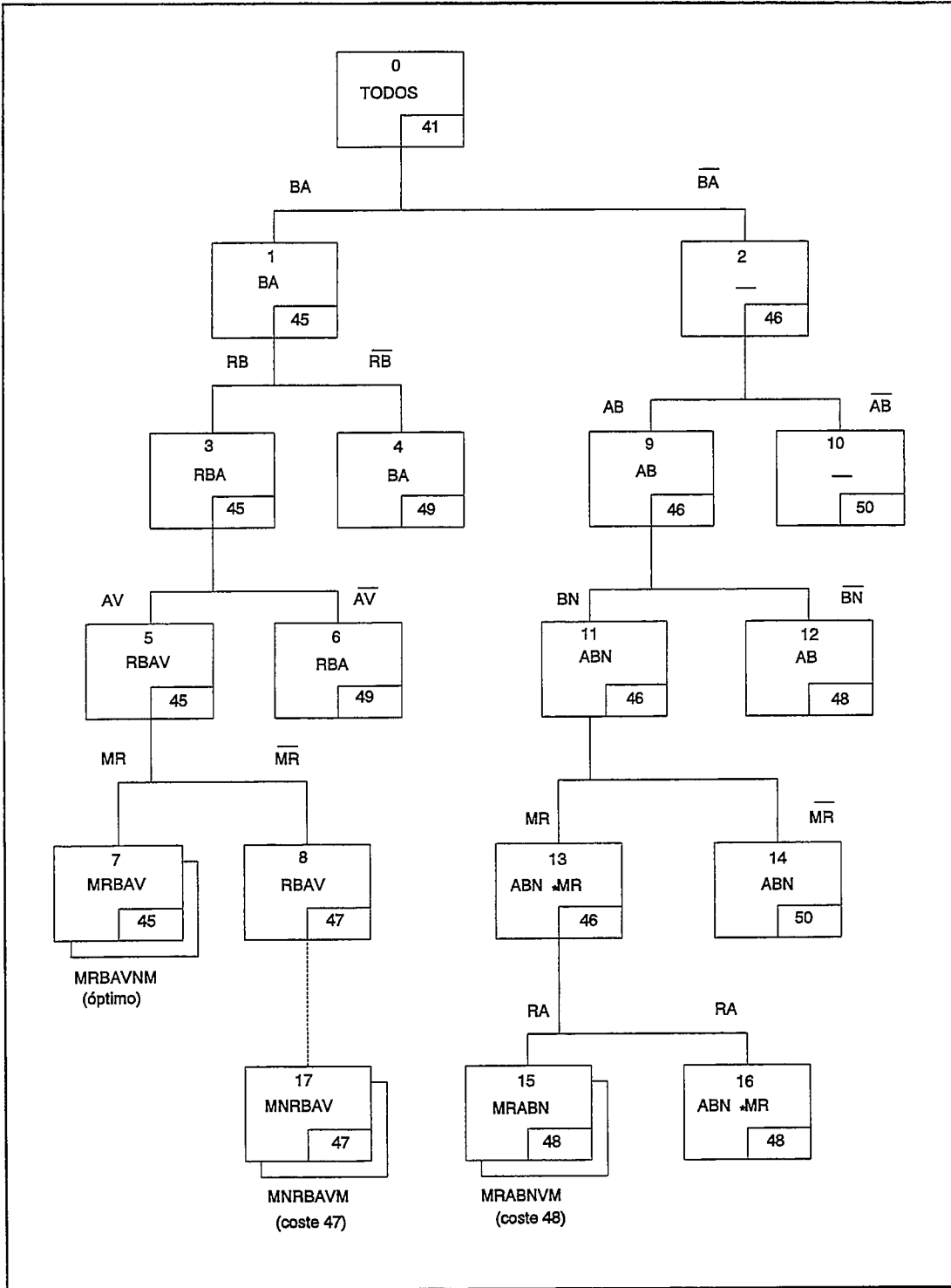


Fig. 9.1.2.28 Árbol de soluciones

En la figura 9.1.2.29 hemos procedido a la creación de ceros; la cota inicial es:

$$7 + 6 + 8 + 7 + 2 + 2 + 4 + 1 + 3 + 2 = 42$$

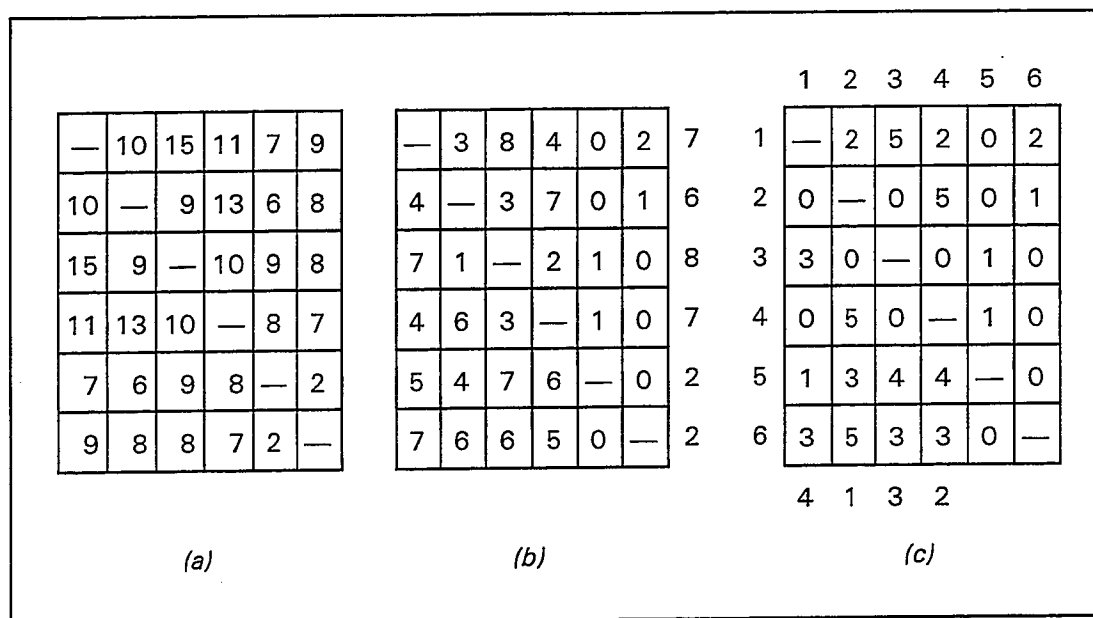


Fig. 9.1.2.29 Creación de ceros en la matriz de costes del problema TSP_1

Los valores no nulos de $\mu(i,j)$ son:

$$\mu(1,4) = 2$$

$$\mu(3,2) = 2$$

$$\mu(3,4) = 2$$

$$\mu(5,6) = 1$$

$$\mu(6,5) = 3$$

Separamos por el arco 6 - 5 y, en virtud de la observación anterior, ambas ramas tienen la misma cota 45. Para el subconjunto que utiliza dicho arco el cálculo de la cota se realiza en la figura 9.1.2.30. Los valores $\mu(i,j)$ no nulos se reducen ahora a uno solo:

$$\mu(5,1) = 2$$

por lo que separamos por el arco 5 - 1. El subconjunto que utiliza dicho arco mantiene la cota 45 (fig. 9.1.2.31).

	1	2	3	4	6	
1	—	2	5	2	2	
2	0	—	0	5	2	
3	3	0	—	0	0	
4	0	5	0	—	0	
5	1	3	4	4	—	

(b)

	1	2	3	4	6	
1	—	0	3	0	0	2
2	0	—	0	5	2	
3	3	0	—	0	0	
4	0	5	0	—	0	
5	0	2	3	3	—	1

(c)

Fig. 9.1.2.30 Matriz del vértice 1 del árbol de soluciones

1	0	3	0	—	
2	—	0	5	2	
3	0	—	0	0	
4	5	0	—	0	

$\mu(2,3) = 2$

separamos por el arco 2 - 3

Fig. 9.1.2.31 Matriz del vértice 3 del árbol de soluciones

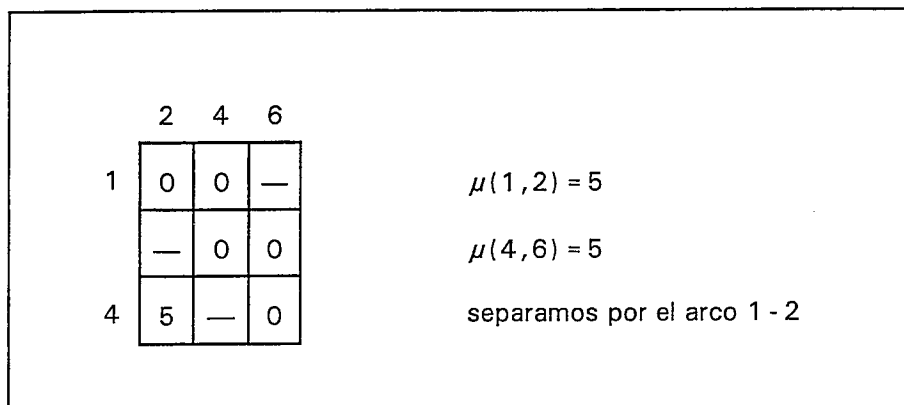


Fig. 9.1.2.32 Matriz del vértice 5 del árbol de soluciones

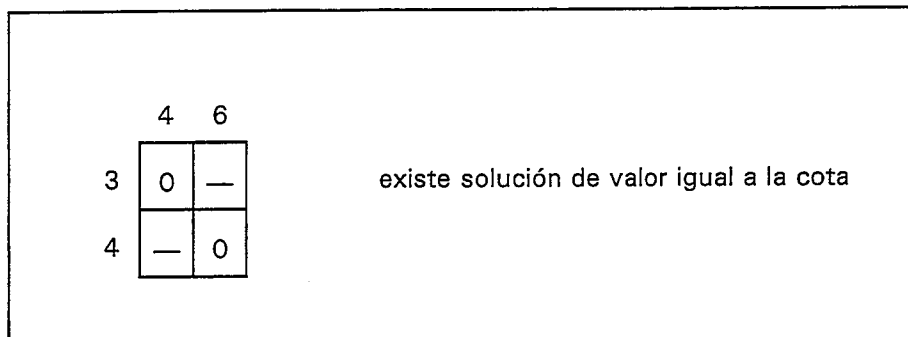


Fig. 9.1.2.33 Matriz del vértice 7 del árbol de soluciones

El resto de la aplicación del algoritmo puede seguirse en las *figuras 9.1.2.32 y 9.1.2.33*; en la *9.1.2.34* se sintetiza dicha aplicación en forma de árbol. La solución óptima hallada es:

$$6 - 5 - 1 - 2 - 3 - 4 - 6$$

de valor 45. A partir del vértice 2 del árbol de soluciones podríamos hallar el circuito simétrico:

$$6 - 4 - 3 - 2 - 1 - 5 - 6$$

que tiene el mismo valor.

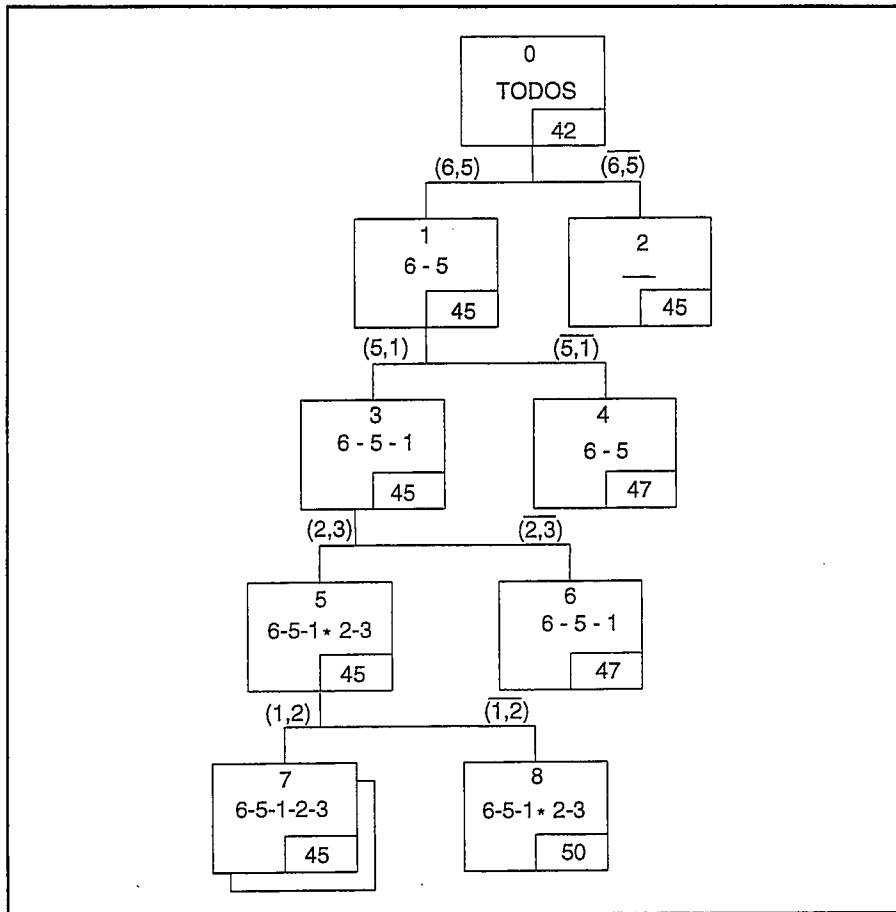


Fig. 9.1.2.34 Árbol de soluciones

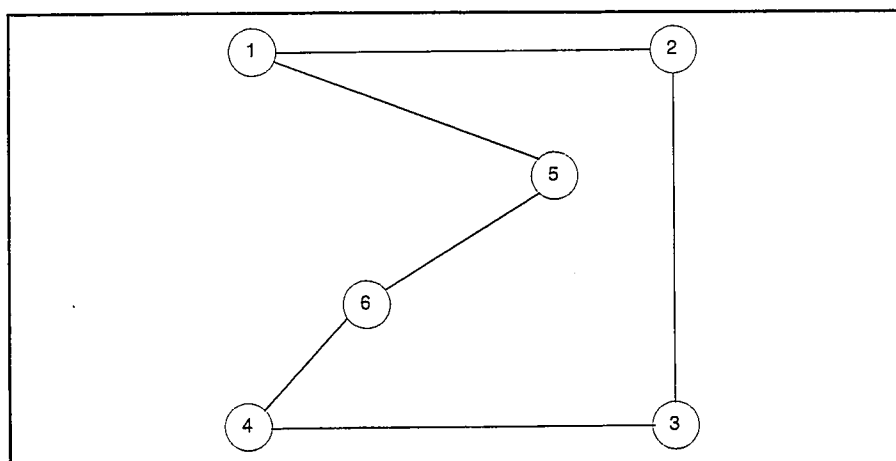


Fig. 9.1.2.35 Solución óptima del problema TSP_1

9.1.2.3.2 Resolución de VRP

El problema de diseño de rutas (*vehicle routing problem*, VRP) es más complejo que TSP. La formulación básica considera un depósito (índice $i = 0$) y n clientes (índices $i = 1, 2, \dots, n$), m vehículos (índices $k = 1, 2, \dots, m$). La demanda del cliente i es q_i y la capacidad del vehículo k es Q_k . Suelen considerarse los clientes y los vehículos ordenados en valores decrecientes de q_i y Q_k respectivamente. Presentaremos un algoritmo constructivo, el de los ahorros (Clarke & Wright, 1964) y otro de dos fases, el algoritmo de barrido (Gillet & Miller, 1974).

Algoritmo de los ahorros

Es uno de los primeros procedimientos heurísticos propuestos para el problema, y sin duda uno de los más conocidos. Se basa en el mismo concepto de los ahorros presentado en relación al TSP (de hecho el concepto de ahorro fue introducido en relación al VRP por Clarke y Wright). El algoritmo actúa como sigue:

- Paso 1. Se calculan los ahorros a_{ij} respecto al depósito para todas las parejas de clientes i y j .
- Paso 2. Se ordenan los ahorros en orden decreciente.
- Paso 3. Empezando en la primera arista de la lista ordenada, ejecutar los pasos siguientes.

Versión paralela

- Paso 4. Si tomando una arista se obtiene una ruta factible de acuerdo con las restricciones del VRP, se añade la arista a la solución; en caso contrario se rechaza la arista.
- Paso 5. Pasar a la arista siguiente y repetir el paso 4 hasta que no se puedan tomar más aristas.

Versión secuencial

- Paso 4. Hallar la primera arista factible de la lista que puede utilizarse para prolongar uno de los dos extremos del pétalo en curso de construcción.
- Paso 5. Si el pétalo no puede expansionarse, darlo por terminado. Elegir la primera arista factible de la lista para iniciar un nuevo pétalo.
- Paso 6. Repetir los pasos 4 y 5 hasta que no puedan tomarse más aristas.

En ambas versiones es conveniente comprobar la factibilidad de la solución parcial a cada

paso, para garantizar que los vehículos disponibles pueden operar en las rutas formadas; de lo contrario es bastante probable que la solución final hallada no sea factible. Es posible que al terminar el algoritmo queden algunos clientes sin conectar a los pétalos formados; si quedan vehículos disponibles, podrán añadirse pétalos con un solo cliente; en caso contrario algunos clientes no podrán ser servidos con el parque de vehículos considerado.

Este algoritmo suele producir rutas imbricadas, que pueden no gustar a los responsables de la distribución.

Ejemplo VRP_1

Consideremos un ejemplo con 20 clientes cuyas coordenadas respecto a unos ejes arbitrarios y demandas se detallan en la *figura 9.1.2.36*. El depósito está situado en las coordenadas (0 , 0) y se dispone de un número ilimitado de vehículos de capacidad 85. El coste que se pretende minimizar es proporcional a la distancia recorrida y consideraremos que la distancia entre dos puntos cualesquiera se mide mediante la distancia euclídea.

i	x_i	y_i	q_i	i	x_i	y_i	q_i
1	3	2	8	11	4	10	10
2	2	4	17	12	-5	11	12
3	-1	5	23	13	-10	8	16
4	-3	3	15	14	-8	5	21
5	-6	1	9	15	-12	-2	11
6	-4	-2	11	16	-9	-5	19
7	-2	-5	25	17	-6	-9	24
8	3	-4	22	18	-2	-11	13
9	6	-2	14	19	5	-10	20
10	7	6	18	20	9	-4	19

Fig. 9.1.2.36 Coordenadas y demandas de los 20 clientes del ejemplo VRP_1

Las distancias entre cada par de vértices se encuentra en la *figura 9.1.2.37*, y los ahorros respecto al depósito en la *figura 9.1.2.38*.

DISTANCIAS											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.0	3.6	4.5	5.1	4.2	6.1	4.5	5.4	5.0	6.3	9.2
1	3.6	0.0	2.2	5.0	6.1	9.1	8.1	8.6	6.0	5.0	5.7
2	4.5	2.2	0.0	3.2	5.1	8.5	8.5	9.8	8.1	7.2	5.4
3	5.1	5.0	3.2	0.0	2.8	6.4	7.6	10.0	9.8	9.9	8.1
4	4.2	6.1	5.1	2.8	0.0	3.6	5.1	8.1	9.2	10.3	10.4
5	6.1	9.1	8.5	6.4	3.6	0.0	3.6	7.2	10.3	12.4	13.9
6	4.5	8.1	8.5	7.6	5.1	3.6	0.0	3.6	7.3	10.0	13.6
7	5.4	8.6	9.8	10.0	8.1	7.2	3.6	0.0	5.1	8.5	14.2
8	5.0	6.0	8.1	9.8	9.2	10.3	7.3	5.1	0.0	3.6	10.8
9	6.3	5.0	7.2	9.9	10.3	12.4	10.0	8.5	3.6	0.0	8.1
10	9.2	5.7	5.4	8.1	10.4	13.9	13.6	14.2	10.8	8.1	0.0
11	10.8	8.1	6.3	7.1	9.9	13.5	14.4	16.2	14.0	12.2	5.0
12	12.1	12.0	9.9	7.2	8.2	10.0	13.0	16.3	17.0	17.0	13.0
13	12.8	14.3	12.6	9.5	8.6	8.1	11.7	15.3	17.7	18.9	17.1
14	9.4	11.4	10.0	7.0	5.4	4.5	8.1	11.7	14.2	15.7	15.0
15	12.2	15.5	15.2	13.0	10.3	6.7	8.0	10.4	15.1	18.0	20.6
16	10.3	13.9	14.2	12.8	10.0	6.7	5.8	7.0	12.0	15.3	19.4
17	10.8	14.2	15.3	14.9	12.4	10.0	7.3	5.7	10.3	13.9	19.8
18	11.2	13.9	15.5	16.0	14.0	12.6	9.2	6.0	8.6	12.0	19.2
19	11.2	12.2	14.3	16.2	15.3	15.6	12.0	8.6	6.3	8.1	16.1
20	9.8	8.5	10.6	13.5	13.9	15.8	13.2	11.0	6.0	3.6	10.2

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	10.8	12.1	12.8	9.4	12.2	10.3	10.8	11.2	11.2	9.8
1	8.1	12.0	14.3	11.4	15.5	13.9	14.2	13.9	12.2	8.5
2	6.3	9.9	12.6	10.0	15.2	14.2	15.3	15.5	14.3	10.6
3	7.1	7.2	9.5	7.0	13.0	12.8	14.9	16.0	16.2	13.5
4	9.9	8.2	8.6	5.4	10.3	10.0	12.4	14.0	15.3	13.9
5	13.5	10.0	8.1	4.5	6.7	6.7	10.0	12.6	15.6	15.8
6	14.4	13.0	11.7	8.1	8.0	5.8	7.3	9.2	12.0	13.2
7	16.2	16.3	15.3	11.7	10.4	7.0	5.7	6.0	8.6	11.0
8	14.0	17.0	17.7	14.2	15.1	12.0	10.3	8.6	6.3	6.0
9	12.2	17.0	18.9	15.7	18.0	15.3	13.9	12.0	8.1	3.6
10	5.0	13.0	17.1	15.0	20.6	19.4	19.8	19.2	16.1	10.2
11	0.0	9.1	14.1	13.0	20.0	19.8	21.5	21.8	20.0	14.9
12	9.1	0.0	5.8	6.7	14.8	16.5	20.0	22.2	23.3	20.5
13	14.1	5.8	0.0	3.6	10.2	13.0	17.5	20.6	23.4	22.5
14	13.0	6.7	3.6	0.0	8.1	10.0	14.1	17.1	19.8	19.2
15	20.0	14.8	10.2	8.1	0.0	4.2	9.2	13.5	18.8	21.1
16	19.8	16.5	13.0	10.0	4.2	0.0	5.0	9.2	14.9	18.0
17	21.5	20.0	17.5	14.1	9.2	5.0	0.0	4.5	11.0	15.8
18	21.8	22.2	20.6	17.1	13.5	9.2	4.5	0.0	7.1	13.0
19	20.0	23.3	23.4	19.8	18.8	14.9	11.0	7.1	0.0	7.2
20	14.9	20.5	22.5	19.2	21.1	18.0	15.8	13.0	7.2	0.0

Fig. 9.1.2.37 Distancia entre cada par de vértices del grafo del problema VRP_1

AHORROS											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.0		5.8	3.7	1.8	0.6	0.0	0.4	2.6	4.9	7.2
2	0.0	5.8		6.4	3.6	2.0	0.5	0.0	1.4	3.6	8.3
3	0.0	3.7	6.4		6.5	4.8	2.0	0.4	0.3	1.5	6.3
4	0.0	1.8	3.6	6.5		6.7	3.6	1.6	0.0	0.3	3.0
5	0.0	0.6	2.0	4.8	6.7		6.9	4.3	0.8	0.0	1.4
6	0.0	0.0	0.5	2.0	3.6	6.9		6.3	2.2	0.8	0.1
7	0.0	0.4	0.0	0.4	1.6	4.3	6.3		5.3	3.2	0.4
8	0.0	2.6	1.4	0.3	0.0	0.8	2.2	5.3		7.7	3.4
9	0.0	4.9	3.6	1.5	0.3	0.0	0.8	3.2	7.7		7.5
10	0.0	7.2	8.3	6.3	3.0	1.4	0.1	0.4	3.4	7.5	
11	0.0	6.3	8.9	8.8	5.1	3.4	0.8	0.0	1.7	4.9	15.0
12	0.0	3.6	6.7	10.0	8.1	8.1	3.5	1.2	0.1	1.4	8.3
13	0.0	2.1	4.6	8.4	8.4	10.8	5.6	2.9	0.1	0.3	4.9
14	0.0	1.6	3.9	7.5	8.3	11.0	5.8	3.2	0.2	0.1	3.6
15	0.0	0.2	1.4	4.2	6.1	11.5	8.6	7.1	2.0	0.5	0.8
16	0.0	0.0	0.6	2.6	4.5	9.7	8.9	8.7	3.3	1.3	0.1
17	0.0	0.2	0.0	1.0	2.7	6.9	8.0	10.5	5.5	3.2	0.2
18	0.0	0.9	0.1	0.2	1.4	4.6	6.4	10.6	7.6	5.5	1.2
19	0.0	2.6	1.3	0.1	0.2	1.7	3.6	8.0	9.9	9.4	4.3
20	0.0	5.0	3.7	1.5	0.2	0.1	1.2	4.2	8.8	12.6	8.9

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	6.3	3.6	2.1	1.6	0.2	0.0	0.2	0.9	2.6	5.0
2	8.9	6.7	4.6	3.9	1.4	0.6	0.0	0.1	1.3	3.7
3	8.8	10.0	8.4	7.5	4.2	2.6	1.0	0.2	0.1	1.5
4	5.1	8.1	8.4	8.3	6.1	4.5	2.7	1.4	0.2	0.2
5	3.4	8.1	10.8	11.0	11.5	9.7	6.9	4.6	1.7	0.1
6	0.8	3.5	5.6	5.8	8.6	8.9	8.0	6.4	3.6	1.2
7	0.0	1.2	2.9	3.2	7.1	8.7	10.5	10.6	8.0	4.2
8	1.7	0.1	0.1	0.2	2.0	3.3	5.5	7.6	9.9	8.8
9	4.9	1.4	0.3	0.1	0.5	1.3	3.2	5.5	9.4	12.6
10	15.0	8.3	4.9	3.6	0.8	0.1	0.2	1.2	4.3	8.9
11		13.8	9.4	7.2	2.9	1.2	0.1	0.1	1.9	5.8
12	13.8		19.1	14.8	9.5	5.9	2.9	1.1	0.0	1.4
13	9.4	19.1		18.6	14.8	10.1	6.2	3.4	0.6	0.2
14	7.2	14.8	18.6		13.5	9.7	6.1	3.5	0.8	0.0
15	2.9	9.5	14.8	13.5		18.2	13.8	9.9	4.6	0.9
16	1.2	5.9	10.1	9.7	18.2		16.1	12.3	6.6	2.1
17	0.1	2.9	6.2	6.1	13.8	16.1		17.5	11.0	4.9
18	0.1	1.1	3.4	3.5	9.9	12.3	17.5		15.3	8.0
19	1.9	0.0	0.6	0.8	4.6	6.6	11.0	15.3		13.8
20	5.8	1.4	0.2	0.0	0.9	2.1	4.9	8.0	13.8	

Fig. 9.1.2.38 Ahorro respecto al depósito de cada par de vértices del grafo del problema VRP_1

La aplicación del algoritmo en su versión paralelo conduce a una solución con 5 pétalos:

PÉTALO 1	0	—	1	—	10	—	11	—	12	—	13	—	14	—	0	(85)
PÉTALO 2	0	—	5	—	15	—	16	—	17	—	18	—	0			(76)
PÉTALO 3	0	—	8	—	19	—	20	—	9	—	0					(75)
PÉTALO 4	0	—	2	—	3	—	4	—	0							(55)
PÉTALO 5	0	—	6	—	7	—	0									(36)

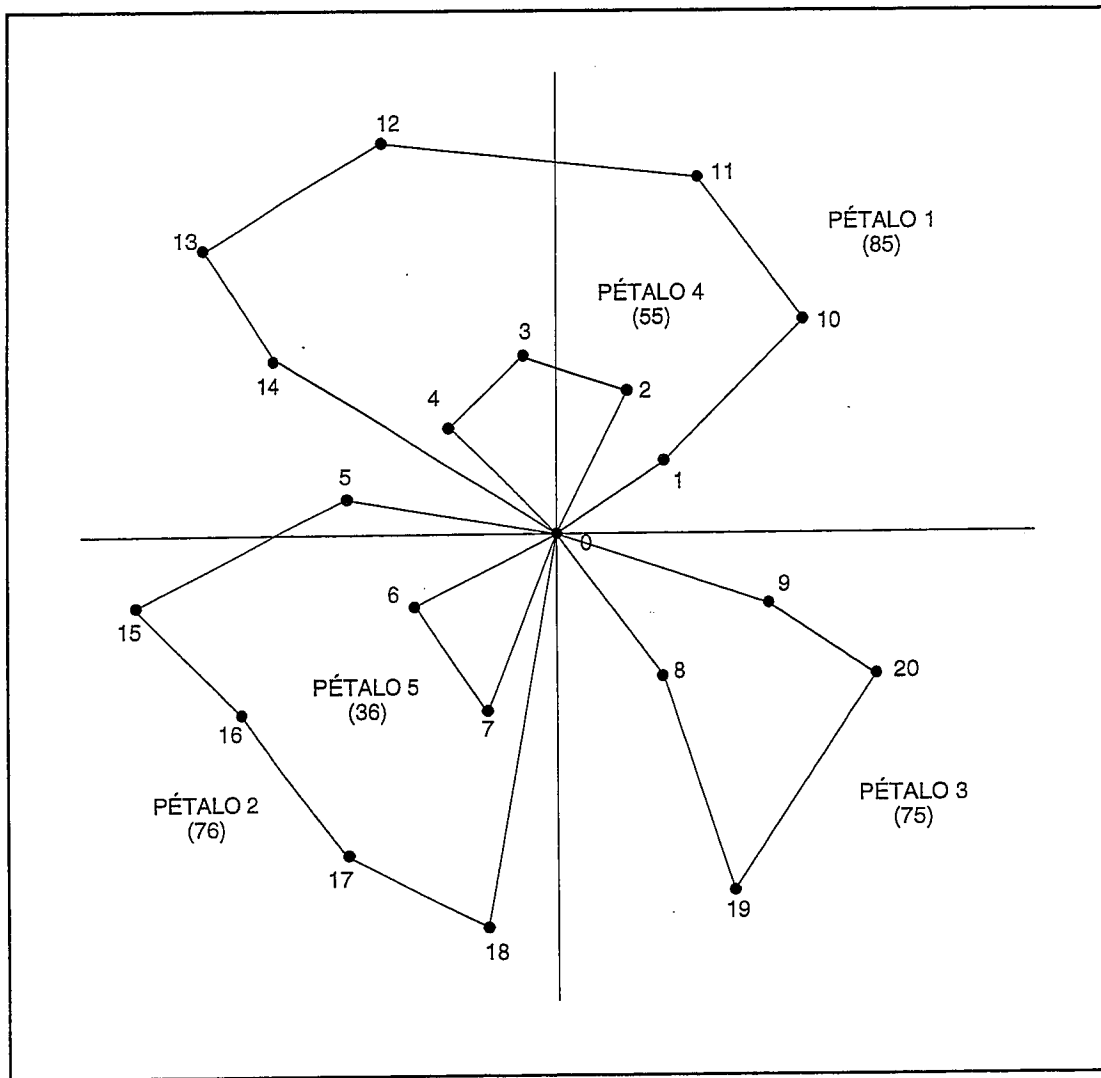


Fig. 9.1.2.39 Solución obtenida por el algoritmo de los ahorros

habiéndose indicado entre paréntesis la suma de las demandas de los clientes servidos. Esta solución tiene asociado un coste (distancia total recorrida) de 136,5085.

Es fácil observar que la suma de las demandas es 327, por lo que una cota inferior del número de pétalos necesarios para servir a todos los clientes es 4 ($327/85 = 3,73$). Como veremos más adelante, existen soluciones con 4 pétalos.

Algoritmo de barrido

Es un algoritmo de dos fases, ambas de naturaleza secuencial. En la primera fase se constituyen grupos de clientes que formarán parte del mismo pétalo; en la segunda se determina la ruta que conecta el depósito con los clientes de cada pétalo. Previamente, y suponiendo el grafo cuyos vértices son los clientes y el depósito dispuesto sobre un plano, expresamos la posición de los clientes en coordenadas polares (r_i, θ_i) respecto al depósito y una dirección arbitraria. Ordenamos los clientes en orden creciente de θ_i :

$$\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_n$$

Fase I

- Paso 1. Elegir un vehículo k no utilizado.
- Paso 2. Empezando en un cliente no asignado a un pétalo, i , con menor ángulo θ_i , incluir clientes consecutivos en el nuevo pétalo: $i + 1, i + 2, \dots$, mientras la capacidad del vehículo lo permita.
- Paso 3. Si todos los clientes han sido barridos o todos los vehículos han sido utilizados, ir a la fase II; en caso contrario, volver al paso 1.

Fase II

- Paso 4. Para cada conjunto de clientes asignados a un vehículo y el depósito, resolver el TSP para formar las rutas finales.

Según qué cliente se elija en primer lugar, es decir, la dirección arbitraria que marca el ángulo O , se obtendrán diferentes rutas; lo mismo ocurre según el orden en que se elijan los vehículos (o el sentido del barrido).

Ejemplo VRP_2

Tomaremos los mismos datos del ejemplo VRP_1. Inicialmente ordenamos los clientes de acuerdo con las coordenadas polares definidas (que no es necesario estrictamente calcular

para proceder a la ordenación, disponiendo de las coordenadas cartesianas). El orden obtenido es:

1 - 10 - 2 - 11 - 3 - 12 - 4 - 13 - 14 - 5 - 15 - 6 - 16 - 17 -
7 - 18 - 19 - 8 - 20 - 9

Este orden es circular; después del punto 9 se sitúa de nuevo el 1 y así sucesivamente.

Empezando el barrido desde el vértice 1 obtenemos 5 pétalos o grupos de clientes:

GRUPO 1	1	—	10	—	2	—	11	—	3	(76)		
GRUPO 2	12	—	4	—	13	—	14	—	5	—	15	(84)
GRUPO 3	6	—	16	—	17	—	7	(79)				
GRUPO 4	18	—	19	—	8	—	20	(74)				
GRUPO 5	9	(14)										

Si formamos las rutas en el orden indicado (*fig. 9.1.2.40*) obtenemos un coste de 168,4442. Aplicando para la segunda fase el método de los ahorros, los pétalos obtenidos son (*fig. 9.1.2.41*):

PÉTALO 1	0	—	1	—	10	—	11	—	2	—	3	—	0		
PÉTALO 2	0	—	4	—	12	—	13	—	14	—	15	—	5	—	0
PÉTALO 3	0	—	6	—	16	—	17	—	7	—	0				
PÉTALO 4	0	—	18	—	19	—	20	—	8	—	0				
PÉTALO 5	0	—	9	—	0										

y el coste se reduce a 147,0860. Hemos utilizado los ahorros respecto al depósito calculados anteriormente, aunque es posible que el vértice más céntrico del pétalo no sea precisamente el que corresponde al depósito.

Si el barrido se comienza en el vértice 10 (y también empezando en 4, 16 o 19), el número de grupos es 4 (*fig. 9.1.2.42*):

GRUPO 1	10	—	2	—	11	—	3	—	12	(80)		
GRUPO 2	4	—	13	—	14	—	5	—	15	—	6	(83)
GRUPO 3	16	—	17	—	7	—	18	(81)				
GRUPO 4	19	—	8	—	20	—	9	—	1	(83)		

El coste recorriendo las rutas en el orden indicado es 161,2463. Aplicando el algoritmo de los ahorros a los grupos obtenidos se construyen unas rutas mejores:

PÉTALO 1	0	—	2	—	10	—	11	—	12	—	3	—	0		
PÉTALO 2	0	—	4	—	14	—	13	—	15	—	5	—	6	—	0
PÉTALO 3	0	—	16	—	17	—	18	—	7	—	0				
PÉTALO 4	0	—	8	—	19	—	20	—	9	—	1	—	0		

y el coste es ahora 136,3398 comparable (y algo inferior) al obtenido mediante el algoritmo de los ahorros.

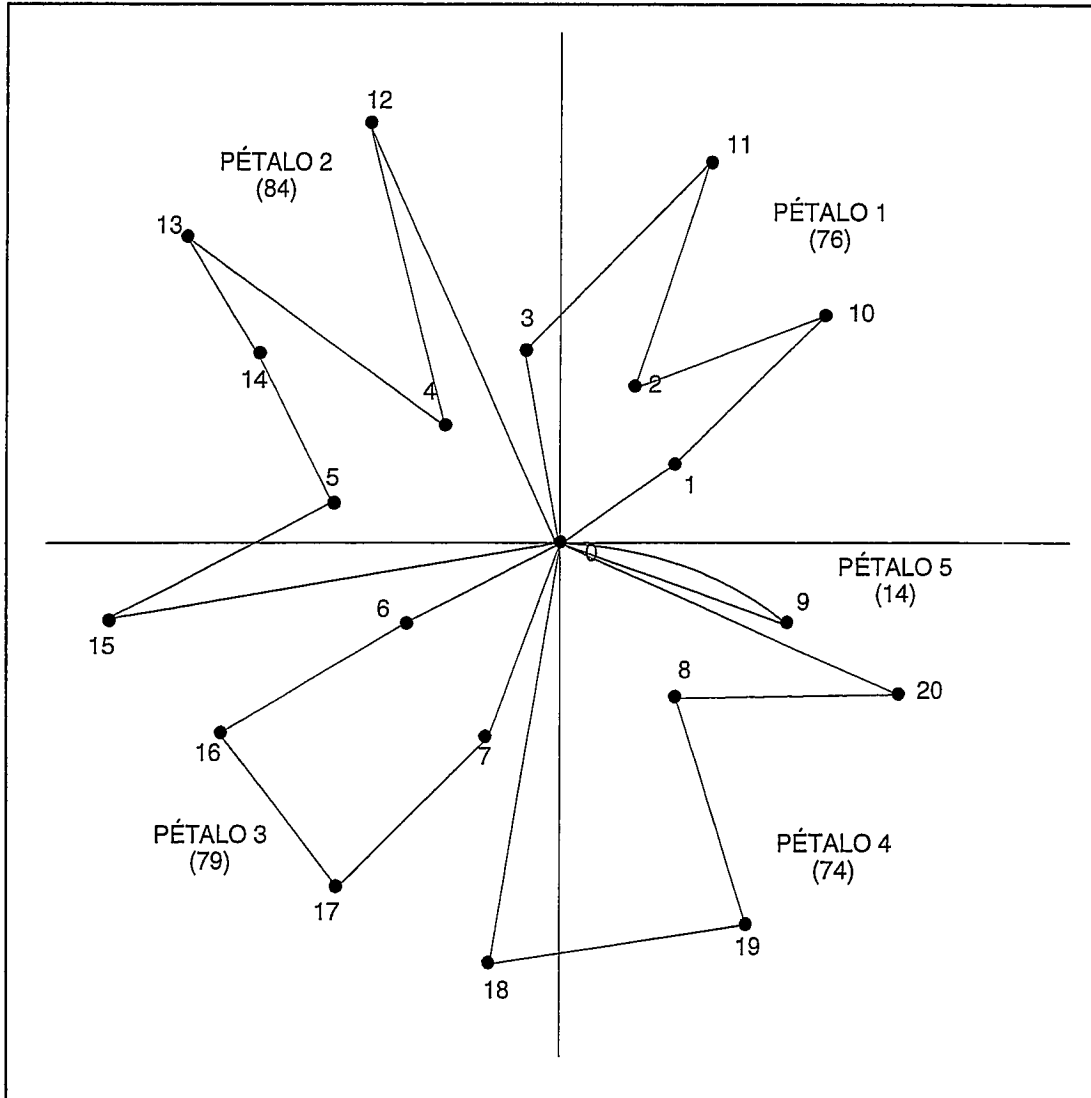


Fig. 9.1.2.40 Grupos obtenidos barriendo desde el vértice 1

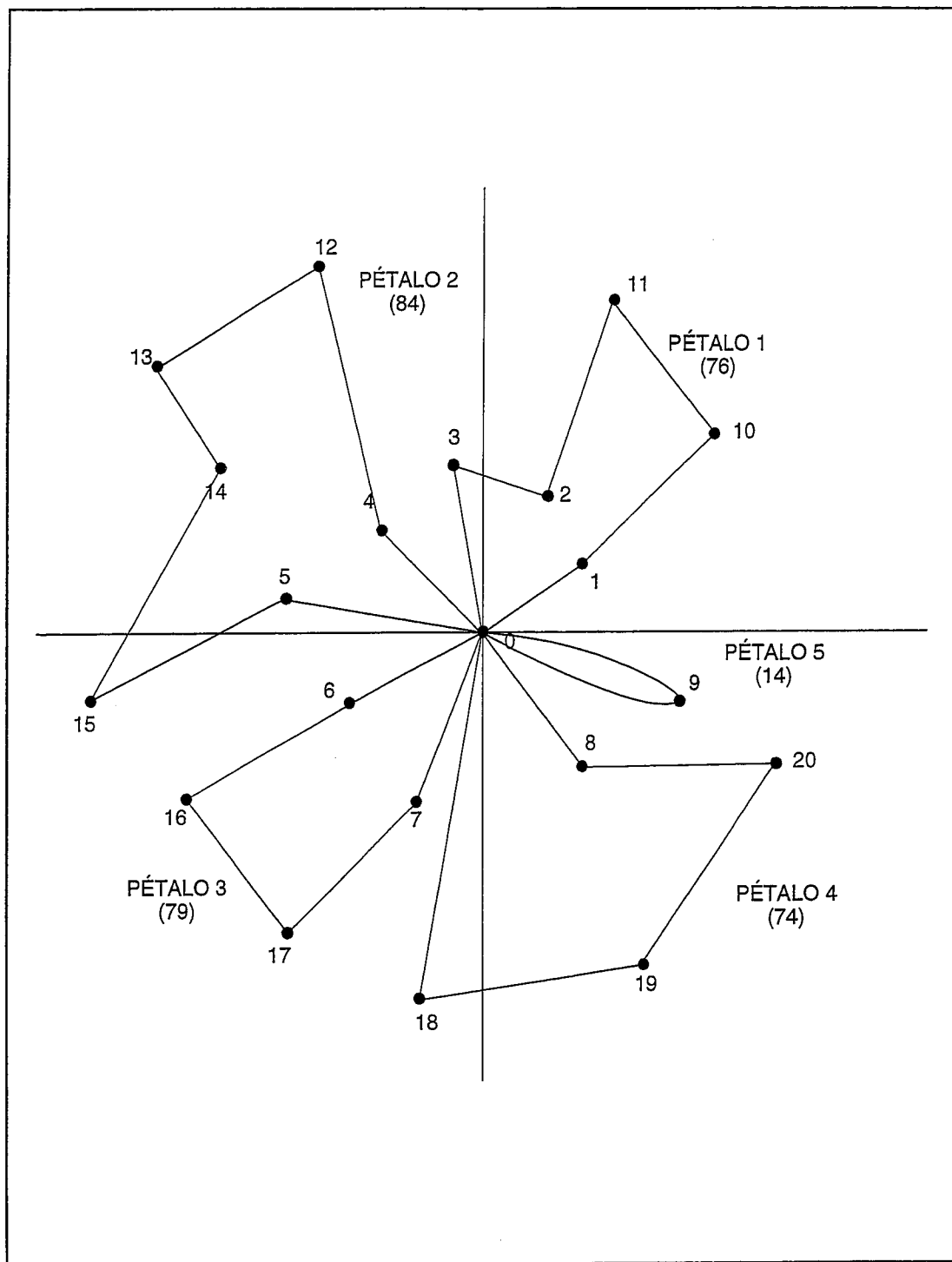


Fig. 9.1.2.41 Rutas formadas con los grupos de la figura 9.1.2.40

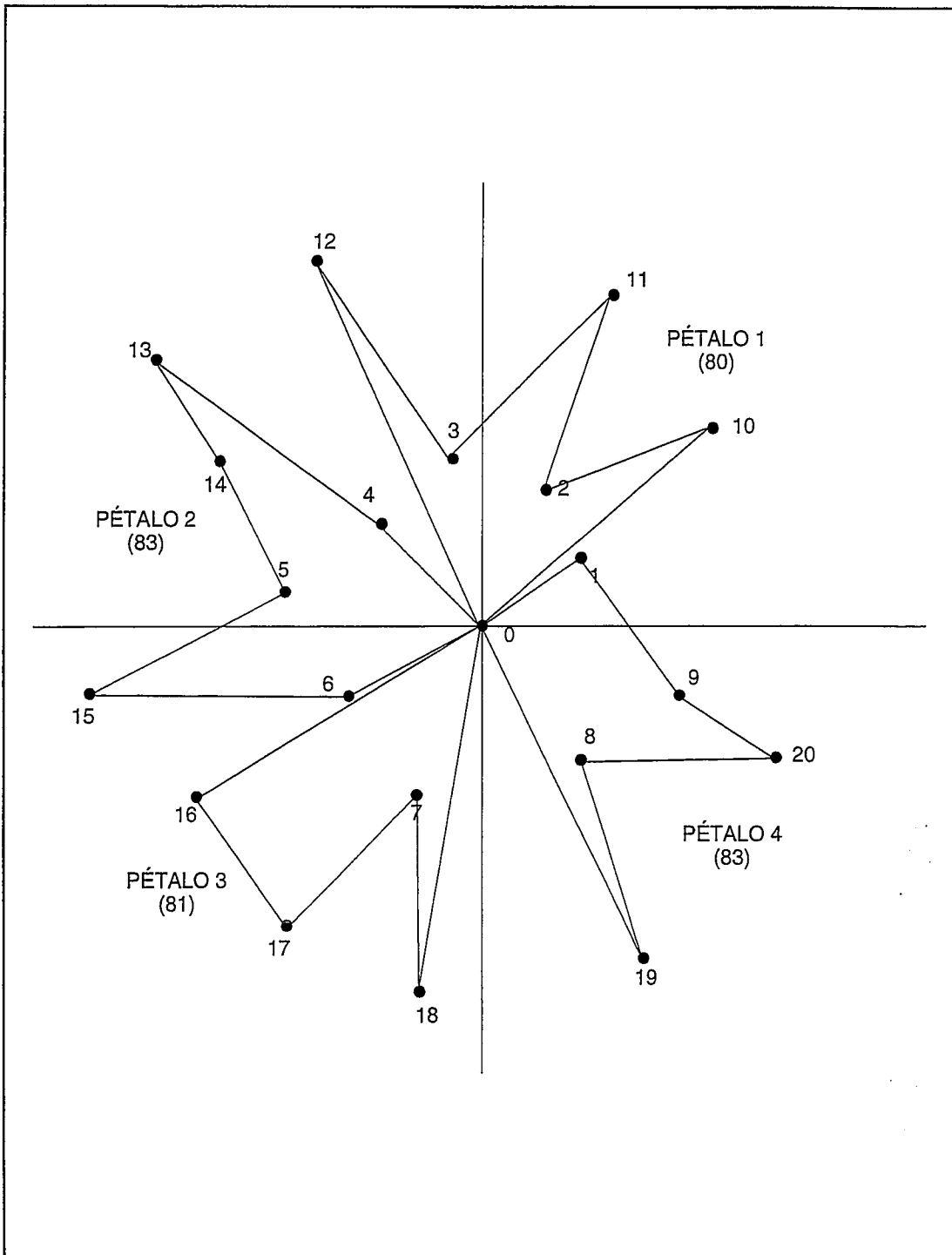


Fig. 9.1.2.42 Grupos obtenidos barriendo desde el vértice 10

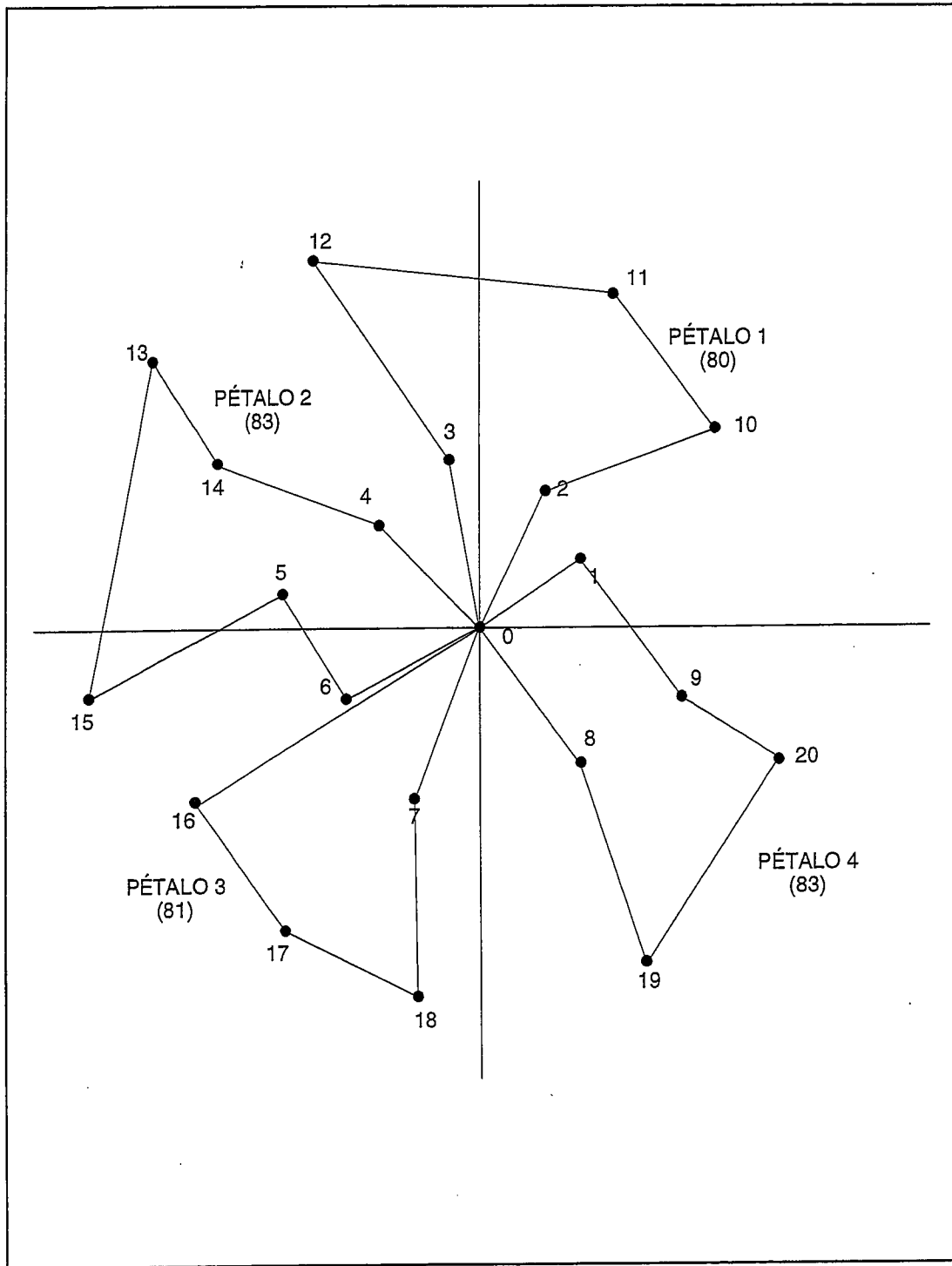


Fig. 9.1.2.43 Rutas formadas con los grupos de la figura 9.1.2.43

Un inconveniente de este procedimiento es el de que no resulta fácil incluir restricciones distintas de las de capacidad de los vehículos.

9.1.2.4 Los paquetes informáticos

La dificultad que presenta el problema de cálculo de rutas explica, probablemente, que el número de paquetes informáticos disponibles en el mercado sea inferior al que se ofrece para la resolución de otros problemas de gestión. No obstante, la complejidad del problema y el número de cálculos que se deben realizar en las situaciones reales aconsejan la utilización de ayudas informáticas.

En algunas circunstancias será necesario construir una aplicación informática específica adaptada a las circunstancias propias de la empresa. Sin embargo las habilidades de los informáticos de gestión empleados en las empresas suelen ser ajenas al diseño de los delicados instrumentos de manipulación de la combinatoria que exige un paquete informático de determinación de rutas eficiente.

Hemos asistido a presentaciones de ciertos consultores en las que ofrecían a las empresas un llamado *motor de optimización*, un módulo informático, especie de caja negra, conectable a una aplicación informática realizada por la empresa siguiendo ciertas especificaciones. La función del módulo en cuestión era la de realizar el cálculo de rutas, siguiendo unos procedimientos y algoritmos no especificados. En todo caso, para la selección de un paquete, caja negra o no, se debe partir de las especificaciones del problema concreto existente y, desde luego, realizar los contactos oportunos con los distribuidores.

9.2 Bibliografía

- [01] BALLOU R. H. *Logística empresarial*. Madrid, Ediciones Díaz de Santos, 1991.
- [02] CHRISTOFIDES, N; MINGOZZI, A; TOTH, P; SANDI, C (Eds.). *Combinatorial optimization*. Nueva York, Wiley, 1979.
- [03] D. W. FOGARTY, Th. R. HOFFMANN. *Production and inventory management*. Chicago, South-Western Publishing Co., 1983.
- [04] GOLDEN, B.L; ASSAD, A. A. *Vehicle routing: Methods and studies*. Amsterdam, North Holland, 1988.
- [05] LAWLER, E. L; LENSTRA, J, K; RINNOOY KAN, A. H. G; SHMOYS, D. B (Eds.). *The travelling salesman problem: A guided tour of combinatorial optimization*. Nueva York, Wiley, 1985.

[06] MARTIN, A. J. *DRP: Planificación de recursos de distribución*. Barcelona. Ediciones S, 1994.

[07] VOLLMANN, Th. E; BERRY, W. L; WHYBARK, D. C. *Manufacturing planning and control systems*. Homewood, Dow Jones-Irwin, 1988.

Comentarios

Una buena descripción de los problemas y técnicas logísticas se presenta en [01]. La planificación de recursos de distribución tiene dedicada un capítulo muy interesante en [07], que ha inspirado ampliamente nuestra presentación. [06] es un texto más reiterativo pero que posiblemente sea más fácil de leer.

[05] contiene un capítulo sobre el problema de diseño de rutas escrito por un gran especialista, N. Christofides. Dicho capítulo constituye una buena introducción al tema y presenta someramente procedimientos de resolución más sofisticados que los que se han descrito en este texto. La concreción de algunos de dichos procedimientos puede encontrarse en [02], donde el capítulo sobre el diseño de rutas se debe a Christofides, Mingozzi y Toth. [04] es un texto específico que presenta el estado del arte en el momento de su redacción.

