# Capítulo 12 Fiabilidad

## 12.1 Conceptos

El estudio de la fiabilidad suele referirse a los componentes y equipos (aparatos, máquinas, etc.) y, por tanto, parece más ligado a las áreas tecnológicas que a las de gestión. Sin embargo, es un concepto mucho más general y muy interesante en el campo de la organización, no sólo porque es un aspecto fundamental en el diseño de productos sino porque también los sistemas productivos y los equipos humanos tienen asociada una determinada fiabilidad o probabilidad de estar en condiciones de funcionar correctamente en un momento dado (piénsese en cualquier sistema productivo, en el conjunto de elementos humanos y materiales para realizar unas misión militar, en un equipo de fútbol, en un tribunal de oposiciones, etc.). El propósito de este capítulo es proporcionar las nociones necesarias para el estudio de la fiabilidad de elementos, sin entrar en la consideración de sus aspectos tecnológicos, y, sobre todo, estudiar la fiabilidad de los sistemas compuestos de diversos elementos, a partir de la fiabilidad de los mismos y de la estructura del sistema, es decir, de la forma en que éste está organizado.

### 12.1.1 Fiabilidad de elementos

Consideremos un elemento o un equipo que se pone en funcionamiento en el instante 0; su duración de vida es el tiempo que transcurre hasta el instante T en que se produce la avería definitiva o "muerte" del elemento o equipo. Llamaremos *ley de supervivencia v(t)* (a veces *fiabilidad*) del elemento a la probabilidad de que en el instante $t$ no se haya producido todavía la avería y de que, por tanto, el equipo esté en funcionamiento:

$$v(t) = \text{Prob}\{T > t\}$$

La variable $t$ de $v(t)$ tiene en general el significado de tiempo (tiempo transcurrido o tiempo de funcionamiento) pero en algunos casos representa otras magnitudes: en el caso de los neumáticos de un coche la supervivencia se dará en función de los kilómetros recorridos, en el del tren de aterrizaje de un avión en función del número de aterrizajes, en el de un interruptor en función del número de conexiones y desconexiones, etc.

*v(t)* es una función monótona decreciente con *v(0)* = 1 y lím *v(t)* = 0 (para $t \rightarrow \infty$) si no creemos en elementos o equipos eternos. La *figura 12.1.1.1* nos representa varias funciones de supervivencia:

**a:** equipo eterno

**b:** equipo rigurosamente homogéneo, cuya vida es determinista (prácticamente irrealizable)

**c:** curva de aspecto *exponencial*

**d:** curva de aspecto *campana*, que corresponde a elementos que se averían por desgaste

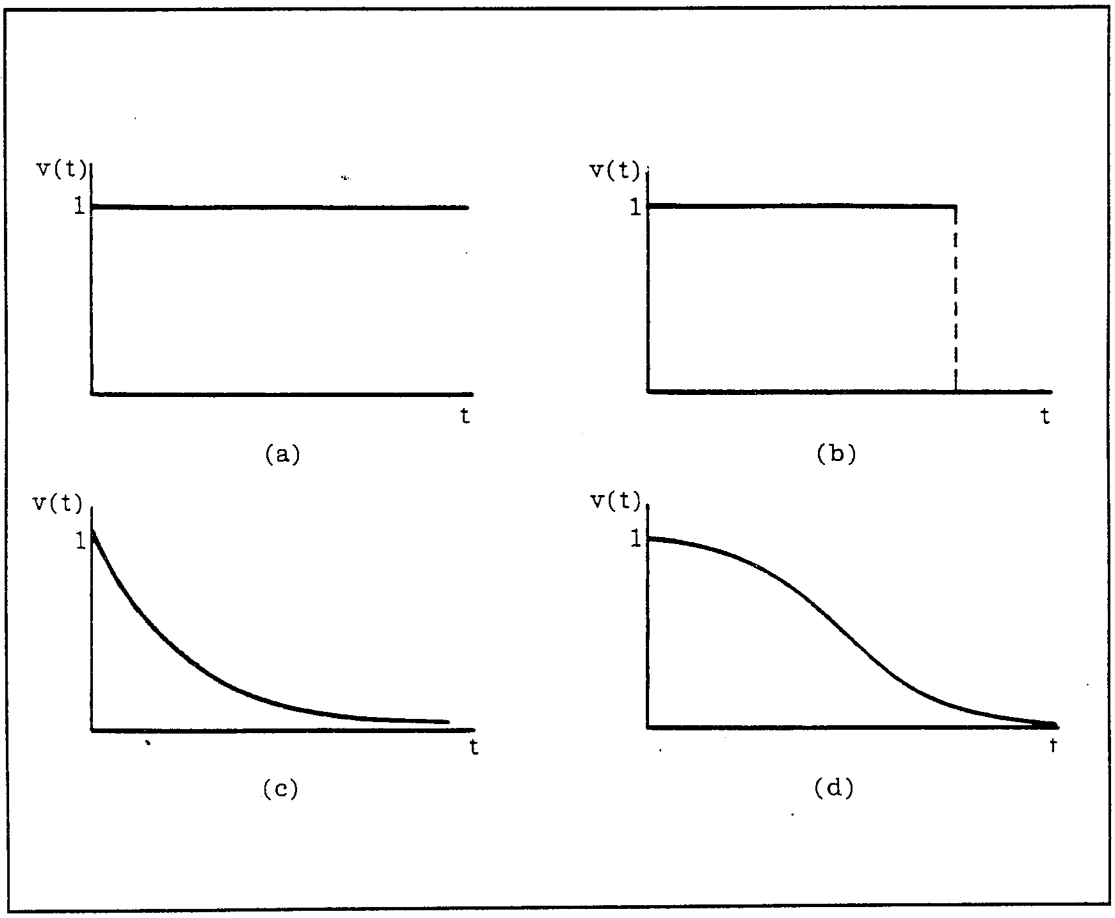



*Fig. 12.1.1.1 Curvas de supervivencia*

En general se reserva el nombre de *fiabilidad* de un elemento a la probabilidad de que el mismo realice una función determinada en unas condiciones prefijadas durante un tiempo dado; podemos considerar que se trata del valor de $v(t)$ para un $t$ dado.

Si consideramos la variable aleatoria T, llamaremos F($t$) a su función de distribución, y $f(t)$ a su función de densidad de probabilidad, si existe; tendremos:

$$F(t) = \text{Prob}\{T \leq t\} = 1 - v(t) \quad \text{(prob. acumulativa de avería)}$$

$$f(t) = -v'(t) \quad \text{(densidad de avería)}$$

Llamaremos *tasa de avería* $\lambda(t)$ a la función:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{v(t)} = -\frac{v'(t)}{v(t)}$$

Obsérvese que $\lambda(t)$ tiene el significado de una densidad de probabilidad condicional: $\lambda(t) \cdot dt$ es la probabilidad de que, habiendo alcanzado el elemento la edad $t$, sufra la avería entre $t$ y $t + dt$. Evidentemente:

$$v(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) \cdot du} \qquad \text{para } t > 0$$

Supondremos en lo que sigue $\lambda(t) > 0$ y $\lim_{t \to \infty} \left[t^{\alpha} \cdot v(t)\right] = 0$ para todo $\alpha > 0$.

En la *figura 12.1.1.2* tenemos representadas varias funciones $\lambda(t)$:

**a:** tasa de avería constante (fatiga)

**b:** tasa de avería creciente (desgaste)

**c:** curva en forma de cuna que da tres zonas: la de la mortalidad infantil, la de las averías aleatorias, la de envejecimiento

En el caso **a** es fácil deducir que si $\lambda(t) = \lambda_0$ entonces $v(t) = e^{-\lambda_0 \cdot t}$ la ley de supervivencia es exponencial, y el elemento *no envejece* (puesto que la densidad de probabilidad condicional de avería es constante, el elemento vivo siempre está en idénticas condiciones, tanto si ha vivido mucho como poco). Otra forma de apreciarlo es la siguiente, sea $t_0 >$ 0 y empecemos a contar el tiempo desde dicho valor (supuesto vivo el elemento en $t_0$):

$$v(t \mid t_0) = \frac{v(t)}{v(t_0)} = \hat{v}(t - t_0) \quad ; \quad t > t_0$$

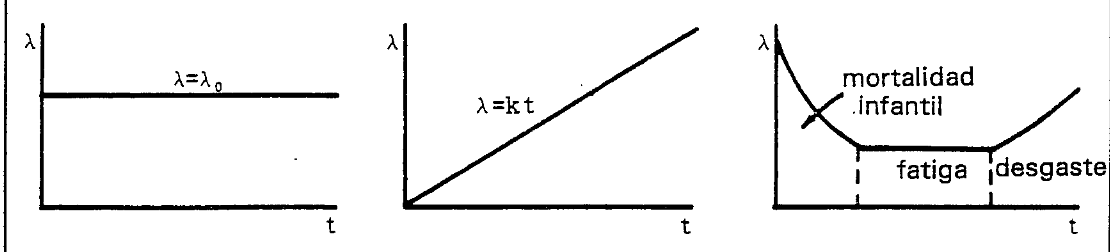



*Fig. 12.1.1.2 Tasas de avería*

Esta ley de supervivencia condicional será la observada por el usuario si el fabricante comprueba los equipos haciéndolos funcionar durante un tiempo $t_0$. Apliquemos esta expresión a la ley exponencial:

$$\hat{v}(t-t_o) = v(t \mid t_o) = e^{-\lambda_o \cdot (t-t_o)}$$

que es exactamente la misma función exponencial de partida, tomando como nueva variable $(t - t_0)$. El fabricante no habría podido eliminar los elementos con defectos de infancia (caso **c**) si la ley de supervivencia fuese exponencial, ya que la avería es totalmente aleatoria a lo largo de toda la vida del elemento.

Un concepto muy importante es el de edad media de aparición de la avería, que se confunde con la vida media del elemento:

$$\bar{t} = \int_0^\infty t \cdot f(t)\, dt = \int_0^\infty v(t)\, dt \quad \text{(integrando por partes)}$$

Es el MTBF de los anglosajones (*mean time between failures*).

Una circunstancia muy habitual, que encontraremos más adelante, se produce cuando al elemento se le deja "vivir" sólo hasta la edad $t_0$, es decir, cuando siempre hay, por ejemplo, un elemento en funcionamiento que se cambia por uno nuevo al llegar a $t_0$, si llega, pues si se avería antes también se substituye por uno nuevo; ¿cuál es en este caso la vida media del elemento?:

$$\bar{t}_o = \bar{t}(t_o) = \int_0^{t_o} t\cdot f(t)\,dt + t_o\cdot v(t_o) = \int_0^{t_o} v(t)\,dt$$

también integrando por partes, y gracias a las propiedades de *v(t)*.

### 12.1.1.1 Nomenclatura en el caso discreto

En algunos casos prácticos sólo podremos postular el conocimiento del estado de los elementos o equipos (funcionando o averiados) en instantes discretos equidistribuidos: 0, 1, 2, 3, ..., t,... En dicha circunstancia preferiremos escribir $v_t$ en lugar de *v(t)*. La densidad de probabilidad *f(t)* quedará substituida por la probabilidad incondicional de avería entre $t$ y $t+1$, $p_t$:

$$p_t = v_t - v_{t+1}$$

En cuanto a la tasa de avería $\lambda_t$ poseerá prácticamente el mismo significado:

$$\lambda_t = \frac{p_t}{v_t} = \frac{v_t - v_{t+1}}{v_t} = -\frac{\Delta v_t}{v_t}$$

### 12.1.2 Leyes de supervivencia

Experimentalmente puede aproximarse el valor de la fiabilidad en el instante $t_0$ mediante la razón *n*/N, siendo N el número de elementos idénticos que se ponen en funcionamiento en el instante 0 y n el número de ellos vivos aún en el instante $t_0$:

$$n/\text{N (convergencia casi cierta)} \rightarrow v(t_0) \text{ cuando N} \rightarrow \infty$$

Si además se comprueba un promedio de averías $\Delta n$ entre $t_0$ y $t_0 + \Delta t$ mediante pruebas repetidas se podrá estimar la tasa de avería $\lambda(t_0)$ mediante:

$$\lambda(t_o) = \frac{\Delta n}{n\cdot\Delta t}$$

### 12.1.2.1 Ley exponencial

Se caracteriza por una tasa de avería constante $\lambda$ (como si las averías se produjeran debido a la ocurrencia de fenómenos, o causas, aleatorios que siguen una ley de Poisson de tasa $\lambda$).

Entonces:

$$v(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$
$$F(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$$
$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$
$$\bar{t} = \frac{1}{\lambda}$$

Algunas piezas mecánicas, numerosos conjuntos eléctricos, como los motores en general tienen una función de supervivencia de este tipo.

### 12.1.2.2 Ley de Weibull

Consideramos una tasa de avería variable, función de una potencia de *t*, lo que nos llevará a una ley con dos parámetros y por tanto más adaptable a algunos comportamientos observados. La ley de Weibull, que se adapta a la supervivencia de muchos equipos electrónicos, tiene la tasa de avería:

$$\lambda(t) = \beta \cdot \alpha^{\beta} \cdot t^{\beta-1}$$

donde $\alpha$ y ß son dos constantes positivas (ver *figuras 12.1.2.2.1* y *12.1.2.2.2*).

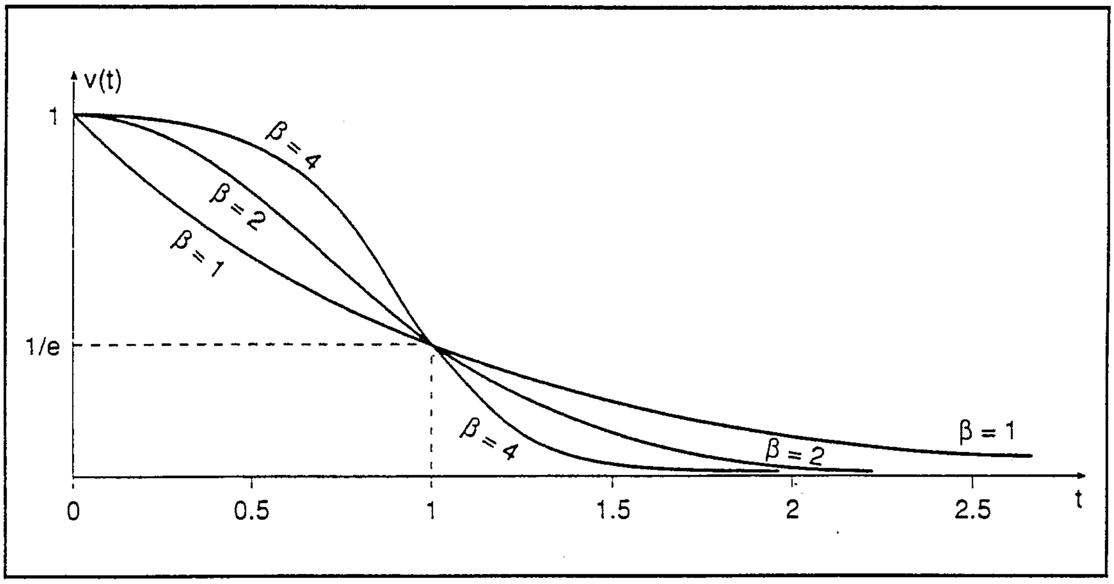



*Fig. 12.1.2.2.1 Ley de Weibull ($\alpha$ = 1)*

Se obtiene:

$$v(t) = e^{-(\alpha \cdot t)^{\beta}} \quad ; \quad v'(t) = -(\alpha \cdot t)^{\beta-1} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot e^{-(\alpha \cdot t)^{\beta}}$$

La tasa de avería es constante si ß = 1, y creciente si ß > 1 (*fig. 12.1.2.2.3*). El momento *p*-ésimo de la ley *v(t)* es:

$$m_p = \int_0^{\infty} t^{p} \cdot e^{-(\alpha \cdot t)^{\beta}} dt$$

y haciendo $(\alpha \cdot t)^{\beta} = u$ obtenemos:

$$m_p = \frac{1}{\beta \cdot \alpha^{p+1}} \cdot \int_0^{\infty} u^{\frac{p+1-\beta}{\beta}} \cdot e^{-u} du$$

y como la función *gamma* de Euler es:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot u^{s-1}\, du$$

tenemos:

$$m_p = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{\beta}\right)}{\beta \cdot \alpha^{p+1}} \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

la vida media es por tanto:

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} v(t)\, dt = \frac{\Gamma(1/\beta)}{\beta \cdot \alpha}$$

| ß→ t↓ | 0'5 | 0'8 | 0'9 | 1 | 1'1 | 1'2 | 1'5 | 1'8 | 2 | 2'5 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0'1 | 7289 | 8534 | 8817 | 9048 | 9236 | 9389 | 9689 | 9843 | 9900 | 9968 | 9990 | 9999 |
| 0'3 | 5783 | 6827 | 7129 | 7408 | 7665 | 7899 | 8485 | 8918 | 9139 | 9519 | 9734 | 9919 |
| 0'5 | 4931 | 5631 | 5852 | 6065 | 6272 | 6471 | 7022 | 7504 | 7788 | 8380 | 8825 | 9394 |
| 0'7 | 4332 | 4715 | 4841 | 4966 | 5089 | 5211 | 5567 | 5908 | 6126 | 6637 | 7096 | 7865 |
| 0'9 | 3873 | 3989 | 4027 | 4066 | 4104 | 4143 | 4258 | 4373 | 4449 | 4637 | 4824 | 5189 |
| 1 | 3679 | 3679 | 3679 | 3679 | 3679 | 3679 | 3679 | 3679 | 3679 | 3679 | 3679 | 3679 |
| 1'1 | 3504 | 3399 | 3364 | 3329 | 3294 | 3259 | 3155 | 3051 | 2982 | 2811 | 2642 | 2313 |
| 1'3 | 3198 | 2913 | 2819 | 2725 | 2633 | 2541 | 2271 | 2012 | 1845 | 1456 | 1111 | 575 |
| 1'5 | 2938 | 2508 | 2368 | 2231 | 2097 | 1466 | 1593 | 1256 | 1054 | 636 | 342 | 63 |
| 1'7 | 2715 | 2168 | 1995 | 1827 | 1665 | 1510 | 1090 | 743 | 556 | 231 | 74 | 2 |
| 2 | 2431 | 1753 | 1547 | 1353 | 1172 | 1005 | 591 | 307 | 183 | 35 | 3 | 0'0011 |
| 2'5 | 2057 | 1248 | 1022 | 821 | 646 | 496 | 192 | 55 | 19 | 1 | 0'0016 | |
| 3 | 1769 | 900 | 680 | 498 | 351 | 238 | 55 | 7 | 1 | 0'0017 | | |
| 4 | 1353 | 482 | 307 | 183 | 101 | 51 | 3 | 0'054 | | | | |

*Fig. 12.1.2.2.2 Tabla de la ley de Weibull, para α = 1* (valores en diezmilésimas)

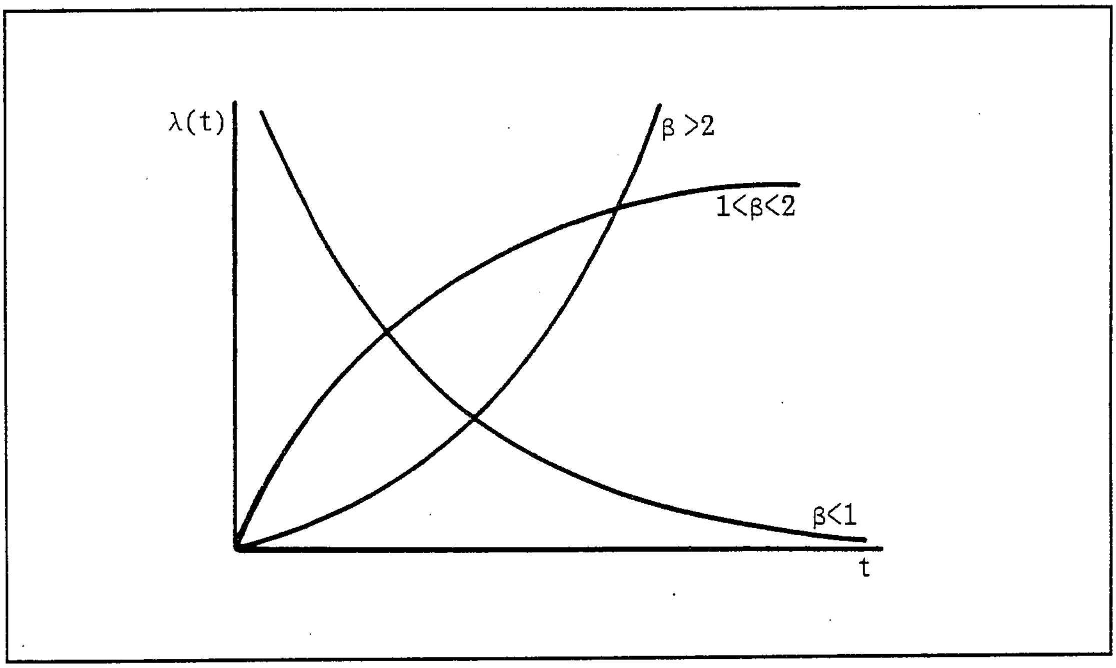



*Fig. 12.1.2.2.3 Tasas de avería en la ley de Weibull*

## 12.1.2.3 Ley de Erlang

Si la avería se produce si y sólo si ocurren exactamente $k$ fenómenos aleatorios que siguen una ley de Poisson de tasa $\lambda$, la ley se determina como sigue. La probabilidad de que en el instante $t$ se hayan producido $n$ fenómenos es:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^n \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{n!}$$

y por tanto:

$$v(t) = p_0 + p_1 + \dots + p_{k-1} = e^{-\lambda \cdot t} \cdot \left[ 1 + \frac{(\lambda \cdot t)}{1!} + \dots + \frac{(\lambda \cdot t)^{k-1}}{(k-1)!} \right]$$

y, derivando para hallar *f(t)*

$$f(t) = -v'(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \frac{(\lambda \cdot t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Se ha obtenido un proceso de Erlang de parámetro $k$, con una vida $\bar{t} = k/\lambda$ y variancia $\sigma^2 = k/\lambda^2$.

## 12.1.3 Fiabilidad de sistemas

### 12.1.3.1 Funciones de estructura

Sea *e* un elemento (o un equipo) al que asociaremos una variable binaria *x* tal que adopta el valor 1 si el equipo funciona y el 0 si está averiado.

Dos elementos están en *serie* si el funcionamiento del conjunto se obtiene sólo cuando ambos funcionan. Sean $e_1$ y $e_2$ dichos elementos (*fig. 12.1.3.1.1a*) y $x_1$ y $x_2$ sus variables asociadas, y sea $\varphi$ la variable asociada al sistema constituido por ambos elementos, evidentemente:

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

Diremos que $\varphi$ es la *función lógica de estructura* (o simplemente *función de estructura*) del sistema.

Dos elementos están en *paralelo* (*fig. 12.1.3.1.1b*) si el funcionamiento del conjunto queda garantizado cuando funciona, al menos, uno de ellos.

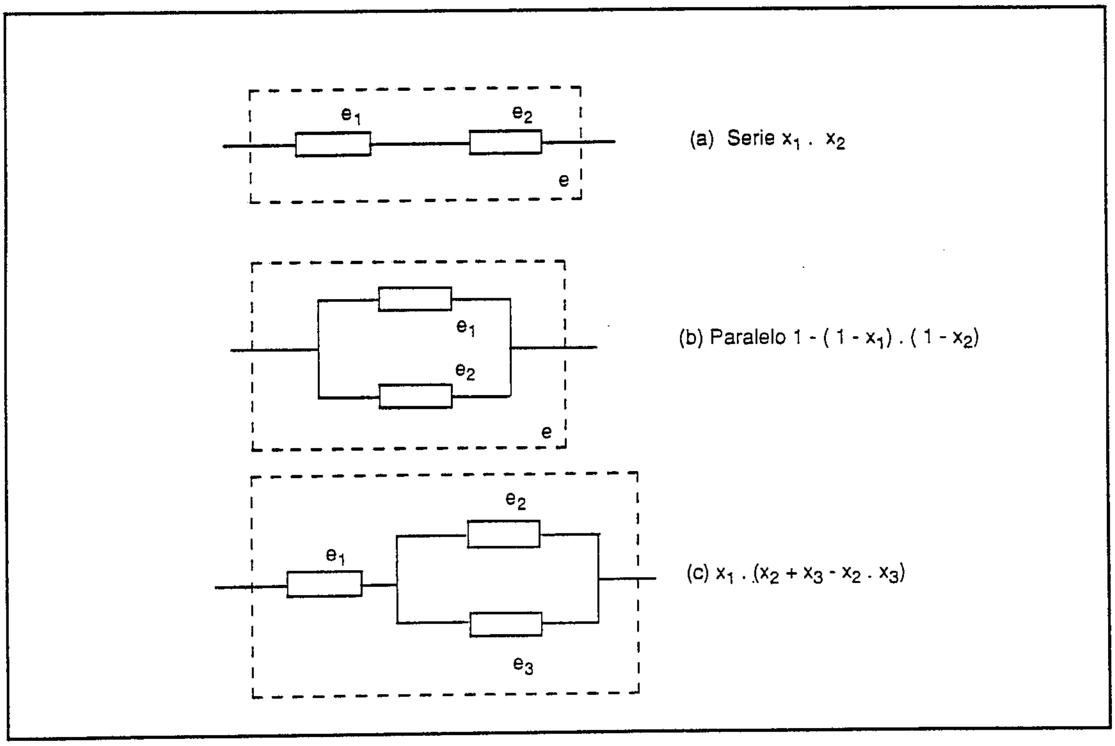



*Fig. 12.1.3.1.1 Sistemas con estructuras simples*

En este caso:

$$\varphi(x_1,x_2) = 1 - (1 - x_1)\cdot(1 - x_2) = x_1 + x_2 - x_1\cdot x_2$$

Obsérvese que las expresiones *en serie* y *en paralelo* indican cómo se combinan las funciones de los elementos en el sistema y no necesariamente una disposición física (por ejemplo, las cuatro ruedas de un coche constituyen un sistema en el que sus elementos, las ruedas, están en serie).

En general, sea S un conjunto o sistema, compuesto de $n$ elementos $e_1$, $e_2$, ..., $e_n$. Su función de estructura $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ es una función que toma los valores 0 o 1 cuando las variables de estructura $x_i$ toman los valores 0 o 1, es decir, a cada una de las $2^n$ posibles combinaciones de valores 0 o 1 de las $x_i$ corresponde un valor, 0 o 1, de $\varphi$. Esta función de estructura de S describe los dos estados del sistema a partir de los estados posibles de $e_1$, $e_2$, ..., $e_n$. Veamos un ejemplo de un conjunto de tres componentes:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = x_1\cdot x_2 + x_1\cdot x_3 - x_1\cdot x_2\cdot x_3$$

Veamos si se trata realmente de una función de estructura construyendo todos los valores posibles de dicha función:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Efectivamente $\varphi$ es una función de estructura, ya que toma sólo los valores 0 y 1; y además tiene un significado bastante intuitivo, S funciona si (y sólo si) funciona $e_1$ y por lo menos uno de los elementos $e_2$ o $e_3$: equivale a un montaje en el que $e_1$ está en serie con el conjunto de $e_2$ y $e_3$ en paralelo (*fig. 12.1.3.1.1c*). La condición de que $\varphi$ sólo tome los valores 0 o 1 no es suficiente para que un polinomio en $x_1$, $x_2$,..., $x_n$ (sin potencias, ya que, por ser binarias las variables, $x_i^k = x_i$) representa la función de estructura de un sistema en función de las variables de estado de sus componentes. Establezcamos una ordenación (realmente un preorden) en los $n$-etos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mediante la siguiente relación:

$$(x_1, \dots, x_n) \geq (x_1', \dots, x_n') \quad \text{si} \quad \forall i \quad x_i \geq x_i'$$

Diremos que la función de estructura es una *función monótona de estructura* si:

$$(x_1, \dots, x_n) \geq (x_1', \dots, x_n') \rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) \geq \varphi(x_1', \dots, x_n')$$

Para que $\varphi$ pueda representar el funcionamiento de un equipo ligado al funcionamiento de sus componentes $\varphi$ debe ser una función monótona de estructura (pues si no fuese así tendríamos la sorpresa de que estropeando un componente lograríamos arreglar el conjunto, que pasaría de estar averiado a funcionar).

### 12.1.3.2 Redes de fiabilidad

Llamaremos *red de fiabilidad* a la representación gráfica mediante un dipolo (tal como se ha hecho ya en la *figura 12.1.3.1.1*) de la función de estructura de un conjunto S (*figura 12.1.3.2.1*). La idea de la red de fiabilidad está tomada de los circuitos eléctricos: para que circule corriente de $\alpha$ a $\omega$ es necesario que uno de los dos caminos en paralelo, por lo menos, esté operativo, bien el de los elementos $e_1$ y $e_2$ en serie, bien el del elemento $e_3$. La función de estructura representada es:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 1 - (1 - x_1 \cdot x_2) \cdot (1 - x_3)$$

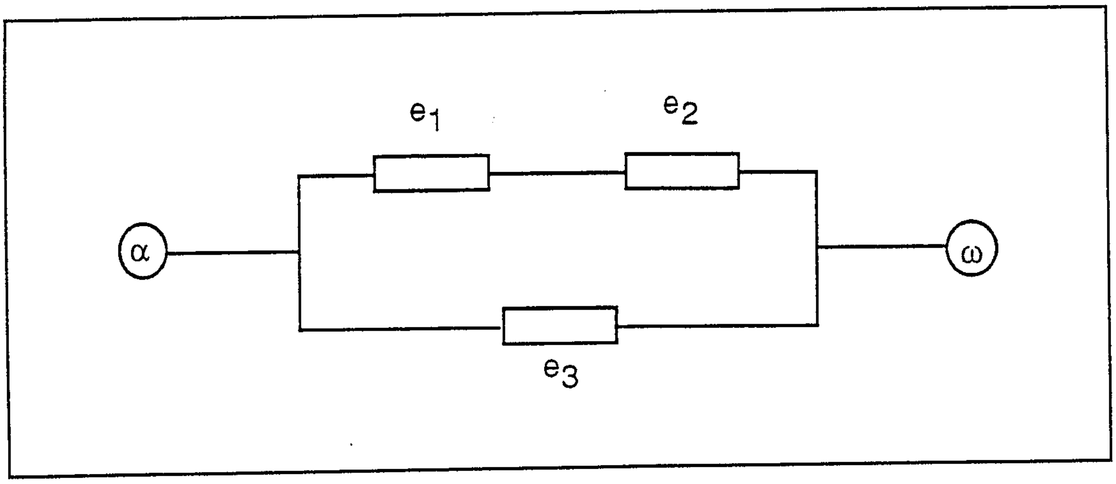



*Fig. 12.1.3.2.1 Red de fiabilidad*

A partir de la red o grafo de fiabilidad vamos a construir las nociones de camino y de corte, bastante semejantes a las existentes en la teoría de grafos. Sea E = $\{ e_1, ..., e_n \}$ el conjunto de componentes del sistema; una colección de elementos $(e_i, e_j, ..., e_k)$ es un *camino* si:

$$x_i = x_j = ... = x_k = 1 \quad \rightarrow \quad \varphi = 1$$

En otras palabras, la colección de elementos del camino garantiza con su funcionamiento el funcionamiento del sistema. Naturalmente un camino puede contener superabundancia de elementos, por ello definimos como *camino mínimo* aquél que no contiene propiamente otro camino (con menos elementos). En el sistema de la *figura 12.1.3.2.1* hay tres caminos:

$$(e_1, e_2)$$
$$(e_1)$$
$$(e_1, e_2, e_3)$$

de los cuales los dos primeros son mínimos.

Una colección de elementos $(e_r, e_s, ..., e_t)$ es un *corte* si:

$$x_r = x_s = ... = x_t = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = 0$$

es decir, la avería de todos los elementos del corte es suficiente para producir la avería del conjunto. En el mismo caso anterior, también hay tres cortes:

$$(e_1, e_3)$$
$$(e_2, e_3)$$
$$(e_1, e_2, e_3)$$

de los cuales el tercero es superabundante en elementos. Llamaremos *corte mínimo* a aquél que no contenga propiamente otro corte (con menor número de elementos).

Dado un sistema se puede construir su red de fiabilidad por uno de los dos procedimientos siguientes:

- Poniendo en paralelo todos sus caminos mínimos (cada camino formado con los elementos de dicho camino en serie).

- Poniendo en serie todos sus cortes mínimos (cada corte formado por sus elementos en paralelo).

Evidentemente el procedimiento anterior presupone que un mismo elemento *puede aparecer en la red más de una vez* (lo que no debe confundirse con la presencia de dos o más elementos idénticos: en este caso, con independencia de que cada uno de ellos pueda aparecer una o más veces en la red, cada elemento debe identificarse con un símbolo propio). En algunos casos simplificaciones rápidas de la red así construida reducirán el número de apariciones de cada elemento a una sola. En la *figura 12.1.3.2.2* vemos la construcción de la red a partir de los cortes del caso de la *figura 12.1.3.2.1* (la construcción a partir de los caminos coincide con la *figura 12.1.3.2.1*).

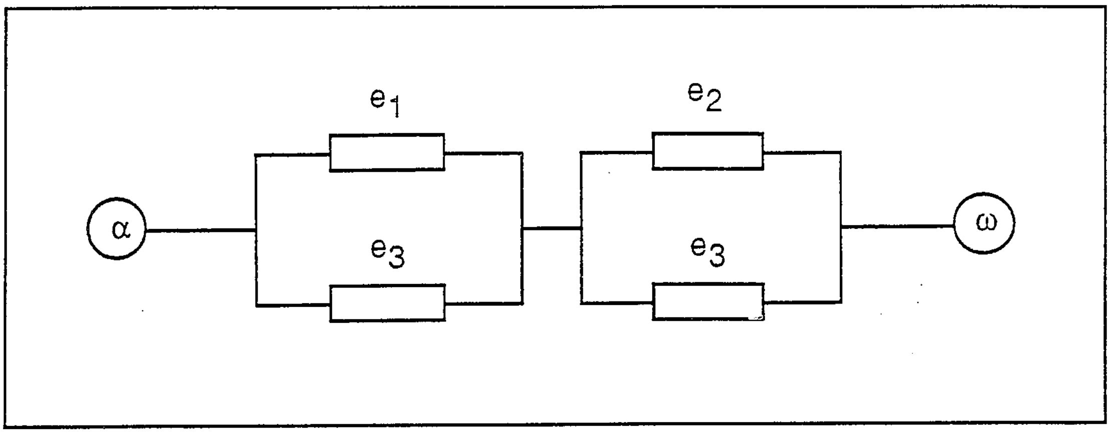



*Fig. 12.1.3.2.2 Red de fiabilidad construida a partir de los cortes.*

Podemos enunciar: "A toda red de fiabilidad le corresponde una función de estructura monótona y sólo una; a toda función de estructura monótona le corresponde una red de fiabilidad".

### 12.1.3.3 Funciones de fiabilidad

En lo que precede se ha considerado únicamente la estructura lógica de los fallos sin tener en cuenta la probabilidad de que un elemento se encuentre en uno u otro estado, es decir la probabilidad de funcionamiento y la probabilidad de avería. Sea de nuevo un conjunto S formado por los elementos $e_1, e_2, \ldots, e_n$ que poseen la probabilidad $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de funcionar en un instante determinado (y por tanto la $1 - p_i$ de estar averiados); ¿cuál es la probabilidad de funcionamiento del conjunto?

Parece que se tratará de una función de dichas probabilidades, es decir, $h(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, ¿cómo se encuentra la función $h$?

Para dos elementos en serie o en paralelo, *con probabilidades de fallo independientes*, el problema es muy simple:

$$\text{en serie} \quad h(p_1,p_2) = p_1 \cdot p_2$$

$$\text{en paralelo} \quad h(p_1,p_2) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2$$

que tienen un parecido sorprendente con las funciones de estructura. Para casos más complejos la *función de fiabilidad* también puede deducirse de la función de estructura mediante los siguientes pasos:

1°.- Se obtiene la función de estructura $\varphi$ poniendo en paralelo los caminos mínimos, en serie los cortes mínimos u otro procedimiento adecuado.

2°.- Se obtiene la *forma simple* $\varphi_s$ de la función de estructura efectuando las multiplicaciones, eliminando los paréntesis, suprimiendo las potencias (ya que $x_i^k = x_i$) y agrupando los términos semejantes.

3°.- El desarrollo de $h(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ coincide con el de $\varphi_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sustituyendo $x_i$ por $p_i$.

Por supuesto, el procedimiento sólo es válido si las probabilidades de fallo de los elementos que constituyen el sistema son independientes, lo cual no será cierto en la práctica en muchas ocasiones (puede haber causas de fallos que afecten simultáneamente a diversos elementos - piénsese por ejemplo, en una epidemia de gripe, que puede originar el "fallo" simultáneo de diversos elementos de un equipo humano o, en otro orden de cosas, en una sobretensión que puede afectar simultáneamente a la capacidad de funcionamiento de diversos componentes de un sistema eléctrico - y también puede suceder que el fallo de un elemento - por ejemplo, una línea en un sistema de distribución de energía eléctrica - produzca una sobrecarga en los restantes, cuya probabilidad de fallo, en consecuencia, aumente); ello no debe perderse de vista, puesto que generalmente, si no hay independencia, la fiabilidad del sistema será menor que la calculada con el procedimiento descrito.

Sea la red de fiabilidad de la *figura 12.1.3.3.1*:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = 1-(1-x_1\cdot x_2)\cdot(1-x_2\cdot x_3)\cdot(1-x_3\cdot x_1) =$$

$$= 1 - 1 + x_1\cdot x_2 + x_2\cdot x_3 + x_3\cdot x_1 - x_1^2\cdot x_2\cdot x_3 - x_1\cdot x_2^2\cdot x_3 - x_1\cdot x_2\cdot x_3^2 + x_1^2\cdot x_2^2\cdot x_3^2$$

$$\varphi_s(x_1,x_2,x_3) = x_1\cdot x_2 + x_2\cdot x_3 + x_3\cdot x_1 - 2\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3$$

$$h(p_1,p_2,p_3) = p_1\cdot p_2 + p_2\cdot p_3 + p_3\cdot p_1 - 2\cdot p_1\cdot p_2\cdot p_3$$

si $p_1 = p_2 = p_3 = p$ entonces $h = 3 \cdot p^2 - 2 \cdot p^3 = p^2 \cdot (3 - 2 \cdot p)$

si $p = 0'8$; $h = 0'896$.

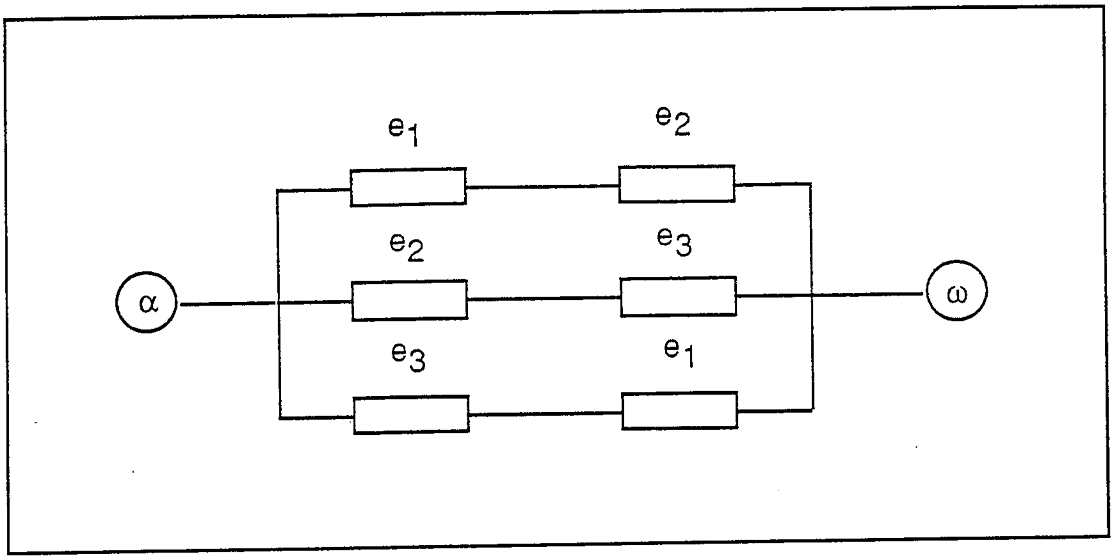



*Fig. 12.1.3.3.1 Red de fiabilidad*

Sea el sistema de la *figura 12.1.3.3.2,* compuesto de tres generadores y dos motores:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2) = 1 - (1 - x_1 \cdot y_1) \cdot (1 - x_3 \cdot y_1)(1 - x_3 \cdot y_2) \cdot (1 - x_2 \cdot y_2)$$

$$\varphi_s(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2) = x_1 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_2 - x_1 \cdot x_3 \cdot y_1 - x_2 \cdot x_3 \cdot y_2 -$$

$$- x_3 \cdot y_1 \cdot y_2 - x_1 \cdot x_2 \cdot y_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot y_1 \cdot y_2$$

$$h(p_1,p_2,p_3,q_1,q_2) = p_1 \cdot q_1 + p_3 \cdot q_1 + p_3 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_2 - p_1 \cdot p_3 \cdot q_1 - p_2 \cdot p_3 \cdot q_2$$

$$- p_3 \cdot q_1 \cdot q_2 - p_1 \cdot p_2 \cdot q_1 \cdot q_2 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot q_1 \cdot q_2$$

con las probabilidades:

$p_1 = p_2 = p_3 = 0'9$; $q_1 = q_2 = 0'99$; resulta $h = 0'9987$

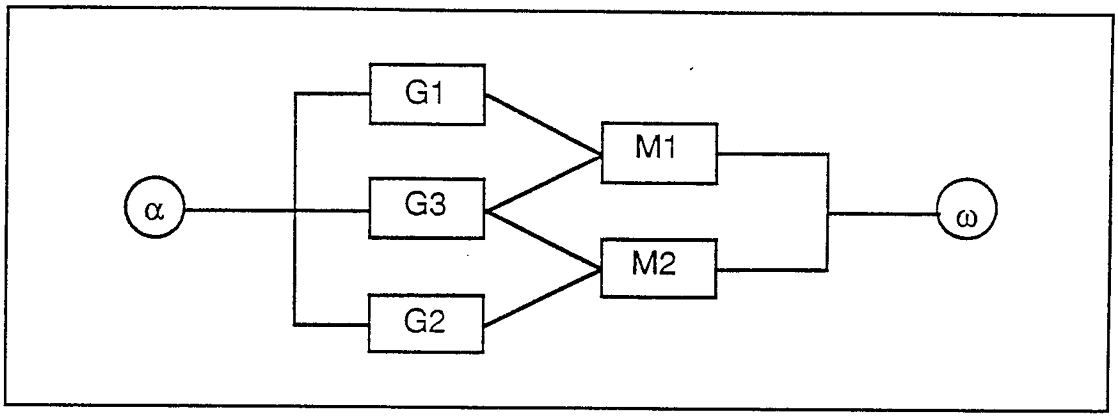



*Fig. 12.1.3.3.3 Sistema con tres generadores y dos motores*

## 12.1.4 Procedimientos para incrementar la fiabilidad de los sistemas: redundancia y canibalización

Los desarrollos anteriores son aplicables también para hallar la ley de supervivencia de un conjunto S en función de las leyes de supervivencia de sus componentes $e_i$; en efecto, $v(t)$ tendrá la misma expresión que $h(p_1, p_2, ..., p_n)$ substituyendo $p_i$ por la función $v_i(t)$ correspondiente.

La mejor manera de mejorar la fiabilidad de un sistema consiste en mejorar la de sus componentes, pero generalmente esto no puede hacerse sin modificar el coste de adquisición o entretenimiento o incluso el peso o el volumen. Es raro que no sean fundamentales las condiciones económicas así como en ciertos casos las de peso, volumen u otras. Así la substitución de unos elementos de un equipo por otros más fiables se realiza en virtud de estudios con una componente tecnológica y otra económica. Normalmente se pasa a través de una comparación y un compromiso entre las posibilidades ofrecidas. Consideremos el sistema de tres componentes representado en la red de fiabilidad de la *figura 12.1.3.4.1*.

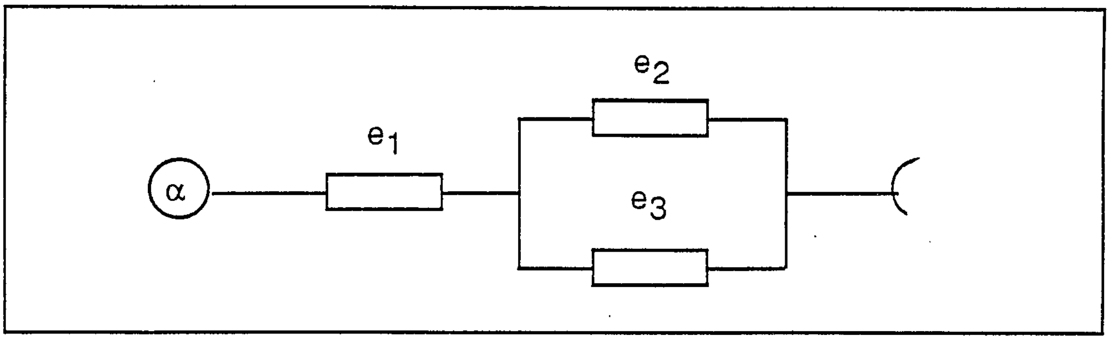



*Fig. 12.3.1.4.1*

Existen dos variantes de elección del equipo, que denominaremos $D^1$ y $D^2$, cuyas fiabilidades y precios pueden consultarse en la tabla adjunta:

| | Fiabilidad | | Precio | |
|---|---|---|---|---|
| | $D_1$ | $D_2$ | $D_1$ | $D_2$ |
| $e_1$ | 0'8 | 0'95 | 380 | 470 |
| $e_2$ | 0'7 | 0'70 | 217 | 217 |
| $e_3$ | 0'8 | 0'95 | 37 | 122 |

Teniendo en cuenta que:

$$h(p_1,p_2,p_3) = p_1\cdot(p_2 + p_3 - p_2\cdot p_3)$$

obtenemos:

$h_1$ = 0'752 para un coste de 634
$h_2$ = 0'93575 para un coste de 809

¿nos interesa un aumento de fiabilidad del 24'6% a cambio de un aumento de precio del 27'6% ?

Montajes en serie y en paralelo pueden utilizarse para aumentar la fiabilidad. Cuando se utilizan varios ejemplares de un elemento en paralelo, y sólo es necesario que haya uno de ellos en funcionamiento para que funcione el sistema, decimos que hemos recurrido a la *redundancia*.

Los elementos en reserva están en *reserva cargada* si proporcionan el mismo trabajo que el elemento principal y por tanto están sometidos a la misma ley de supervivencia; si el primero de los elementos de reserva no entra en funcionamiento hasta el fallo del elemento principal, y el segundo cuando falla el primero y así sucesivamente, la reserva es *no cargada*; entre ambos extremos existe la *reserva aligerada* cuando las probabilidades de avería de los elementos en reserva son inferiores a las del elemento que está trabajando.

Nos podemos preguntar, ¿qué redundancia es más interesante, la de equipos completos o la de elementos? Volviendo al ejemplo de la *figura 12.1.3.4.1*, y doblando los elementos, ¿qué fiabilidad es mayor, la del sistema de la *figura 12.1.3.4.2a* o el de la *figura 12.1.3.7.b*? En general y en todos los casos *la redundancia de elementos es, por lo menos, tan buena como la redundancia de equipos completos.*

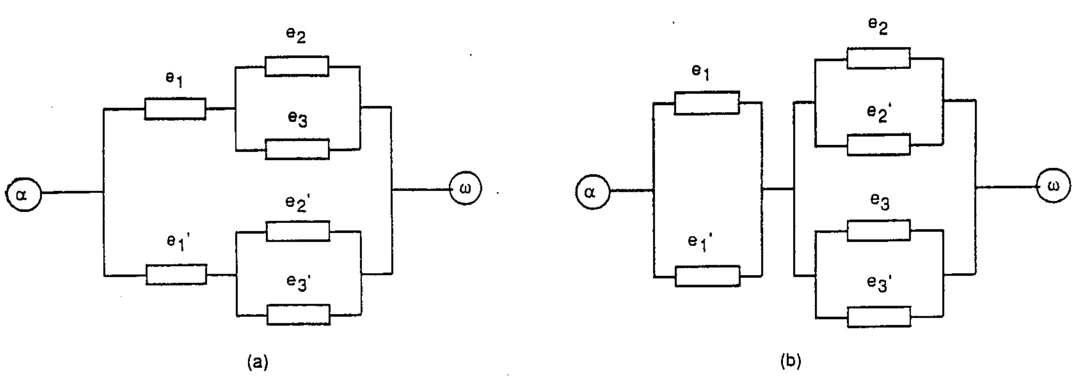



*Fig. 12.1.3.4.2 Redundancia de sistemas y redundancia de elementos*

Volviendo a los ejemplos de las *figuras 12.1.3.4.1* y *12.1.3.4.2*, y tomando $p_1$ = 0'9, $p2$ = 0'8 y $p_3$ = 0'7, obtendremos:

Fiabilidad *figura 12.1.3.4.1*:

$$h_1 = 0'9 \times (0'8 + 0'7 - 0'8 \times 0'7) = 0'846$$

Fiabilidad *figura 12.1.3.4.2a*:

$$h_2 = 2 \cdot h_1 - h_1^2 = 0'9763$$

Fiabilidad *figura 12.1.3.4.2b*:

$h_3$ = 0'9864 (el cálculo se expondrá a continuación).

Por consiguiente convendrá recurrir siempre que se pueda a la redundancia de elementos. Es algo que tradicionalmente va unido al concepto de seguridad: doblar o triplicar los centinelas, doblar los circuitos de frenos, doblar los circuitos de encendido de los motores de aviación, etc.

Cuantos más elementos redundantes haya, mayor será la fiabilidad; pero también mayor será el coste. Volvamos al ejemplo de la *figura 12.1.3.4.1*, y sean $p_i$ y $c_i$ la fiabilidad y el coste respectivamente de $e_i$. Supongamos que se montan $n_1$ elementos $e_1$ en paralelo, $n_2$ elementos $e_2$ y $n_3$ elementos $e_3$. Llamemos P a la fiabilidad del sistema y C a su coste; tendremos:

$$P(n_1,n_2,n_3) = P_1\cdot(P_2 + P_3 - P_2\cdot P_3)$$
$$c(n_1,n_2,n_3) = c_1\cdot n_1 + c_2\cdot n_2 + c_3\cdot n_3$$

con:

$$P_1(n_1) = 1 - (1 - p_1)^{n_1} \quad ; \quad P_2(n_2) = 1 - (1 - p_2)^{n_2} \quad ; \quad P_3(n_3) = 1 - (1 - p_3)^{n_3}$$

Un problema que podemos plantearnos es el de hallar $n_1$, $n_2$ y $n_3$ para que la fiabilidad del sistema sea la mayor posible dentro de una limitación de coste:

$$[MAX]\ P(n_1,n_2,n_3)$$
$$C(n_1,n_2,n_3) \le k$$

o, recíprocamente, para que el coste sea lo menor posible dentro de una limitación de fiabilidad:

$$[MIN]\ C(n_1,n_2,n_3)$$
$$P(n_1,n_2,n_3) \ge F$$

Ambos problemas conducen a problemas de optimización combinatoria, cuyas técnicas de resolución corresponden a los Métodos Cuantitativos de Organización Industrial. No obstante, en los casos sencillos pueden utilizarse técnicas de enumeración y tanteo que permiten obtener la solución óptima.

Supongamos que los datos correspondientes a nuestro problema son:

$$p_1 = 0'9 \ ; \ p_2 = 0'8 \ ; \ p_3 = 0'7 \ ; \ c_1 = 50 \ ; \ c_2 = 100 \ ; \ c_3 = 200$$

Calculemos en primer lugar algunos valores de $P_i(n)$:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_1(n)$ | 0'9 | 0'99 | 0'999 | 0'9999 | 0'99999 |
| $P_2(n)$ | 0'8 | 0'96 | 0'992 | 0'9984 | 0'99968 |
| $P_3(n)$ | 0'7 | 0'91 | 0'973 | 0'9919 | 0'99757 |

Supóngase que deseamos una fiabilidad superior a 0'95 al mínimo coste, con la condición de que haya al menos un elemento de cada tipo. Consideremos las diversas combinaciones con 1 ó 2 elementos:

| $n_1$ $n_2$ $n_3$ | $P_1$ $P_2$ $P_3$ | $P(n_1, n_2, n_3)$ | $C(n_1, n_2, n_3)$ |
|---|---|---|---|
| 1 1 1 | 0'9 0'8 0'7 | 0'8460 | 350 |
| 1 1 2 | 0'9 0'8 0'91 | 0'8838 | 550 |
| 1 2 1 | 0'9 0'96 0'7 | 0'8892 | 450 |
| 2 1 1 | 0'99 0'8 0'7 | 0'9306 | 400 |
| 1 2 2 | 0'9 0'96 0'91 | 0'8968 | 650 |
| 2 1 2 | 0'99 0'8 0'91 | 0'9722 | 600 |
| 2 2 1 | 0'99 0'96 0'7 | 0'9781 | 500 |
| 2 2 2 | 0'99 0'96 0'91 | 0'9864 | 700 |

De los casos listados, es el séptimo el que cumple $p \geq 0'95$ al menor coste, C = 500. Podemos tener la duda sobre si una combinación no tenida en cuenta $n_1 = 3$, $n_2 = n_3 = 1$, cuyo coste es C = 450, puede tener la fiabilidad suficiente. Si hacemos el cálculo resulta P = 0'9391; por tanto no cumple la condición (era evidente, pues un elemento $e_2$ y otro $e_3$ en paralelo, tienen una fiabilidad de 0'94; aun no poniéndolo en serie con otro elemento, o bien poniéndolo con un conjunto de fiabilidad 1, la condición es inalcanzable).

Si no se ha de cumplir la condición de que el conjunto contenga al menos un elemento de cada tipo, es fácil comprobar que la configuración óptima es $n_1 = n_2 = 2$ y $n_3 = 0$, con C = 300 y una probabilidad de funcionar igual a 0'9504.

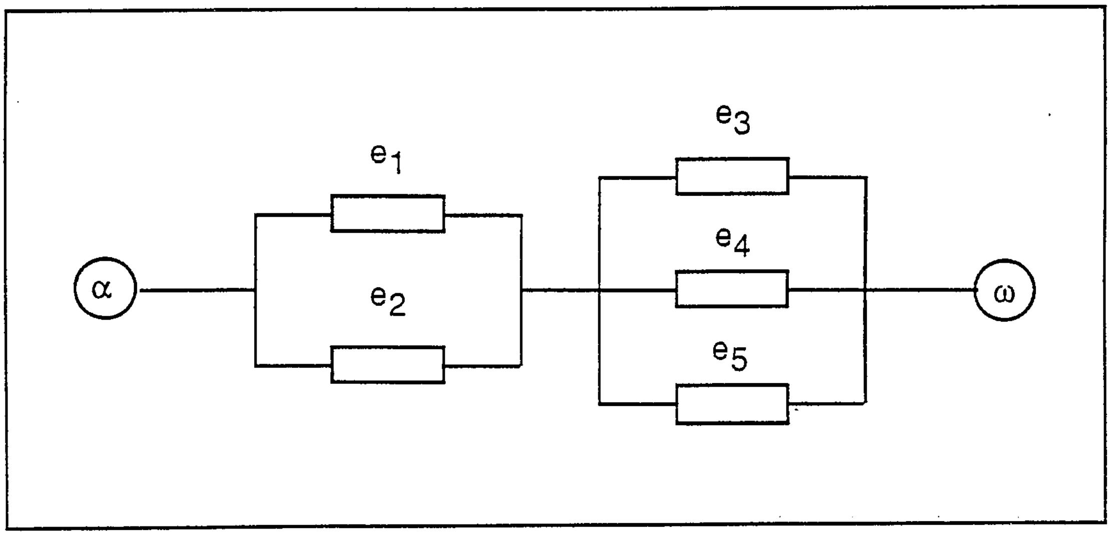



*Fig. 12.1.3.4.3*

Consideremos ahora el ejemplo de la *figura 12.1.3.4.3*, en el que supondremos que los elementos son de dos tipos:

Tipo I : $e_1$, $e_3$, $e_5$

Tipo II: $e_2$, $e_4$

y que los elementos de un mismo tipo son intercambiables, e incluso que tienen la misma fiabilidad. Una pregunta que podemos formularnos es: ¿si se estropea $e_2$ conviene o no poner en su lugar $e_4$? Estudiemos las funciones de estructura y de fiabilidad correspondientes:

$$\varphi = [1 - (1 - x_1)\cdot(1 - x_2)]\cdot[1 - (1 - x_3)\cdot(1 - x_4)\cdot(1 - x_5)]$$

si $e_2$ está averiado:

$$\varphi^{(1)}(x_1,x_3,x_4,x_5) = \varphi(x_1,0,x_3,x_4,x_5) = x_1\cdot x_3 + x_1\cdot x_4 + x_1\cdot x_5 - x_1\cdot x_3\cdot x_4 - $$
$$- x_1\cdot x_3\cdot x_5 - x_1\cdot x_4\cdot x_5 + x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5$$

y si el elemento no existente es $e_4$:

$$\varphi^{(2)}(x_1,x_2,x_3,x_5) = \varphi(x_1,x_2,x_3,0,x_5) = x_1\cdot x_3 + x_1\cdot x_5 + x_2\cdot x_3 + x_2\cdot x_5 - $$
$$- x_1\cdot x_3\cdot x_5 - x_2\cdot x_3\cdot x_5 - x_1\cdot x_2\cdot x_3 - x_1\cdot x_2\cdot x_5 + x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_5$$

Consideremos que el valor de la fiabilidad de los elementos de tipo I es $a$ y el de los elementos de tipo II es $b$, entonces:

$$h^{(1)}(a,b) = 2\cdot a^2 + a\cdot b - a^3 - 2\cdot a^2\cdot b + a^3\cdot b$$

$$h^{(2)}(a,b) = 2\cdot a^2 + 2\cdot a\cdot b - a^3 - 3\cdot a^2\cdot b + a^3\cdot b$$

de donde:

$$h^{(2)} - h^{(1)} = a\cdot b - a^2\cdot b = a\cdot b\cdot(1 - a) > 0$$

por tanto conviene proceder a la substitución. Una operación de este tipo se conoce con el nombre de *canibalización*. La canibalización lleva a interesarse por la normalización e intercambiabilidad de las piezas o componentes de un equipo. Un caso interesante se produce en la gestión de equipos idénticos o con componentes idénticos: en cualquier situación es conveniente estudiar la disposición de los componentes en buen estado para obtener el mayor número de equipos en funcionamiento, lo que lleva a despojar a los equipos irremediablemente averiados de los componentes en buen estado que poseen para montarlos en otros equipos en substitución de sus pares averiados. Estudios de canibalización muy profundos se realizaron, por ejemplo, para obtener las reglas óptimas de substitución en los submarinos atómicos con proyectiles nucleares. Téngase presente que en los estudios de canibalización el criterio utilizado no es habitualmente la fiabilidad, sino la disponibilidad o nivel de rendimiento.

## 12.2 Bibliografía

[1] GNÉDENKO, B; BÉLIAEV, Y; SOLOVIEV, A. *Méthodes mathématiques en théorie de la fiabilité*. Mir, 1972.

[2] GROUCHKO, D, ed. *Operations Research and Reliability*. Gordon and Breach, 1971.

[3] HILLIER, F. S; LIEBERMAN, G. J. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill, 1982.

[4] KAUFMANN, A; GROUCHKO, D; CRUON, R. *Modèles mathématiques pour l'étude de la fiabilité des systèmes*. Masson, 1975.

[5] TERSINE, R. J. *Production/Operations Management: Concepts, Structure and Analysis.* North-Holland, 1985.

### Comentarios

Dado el tratamiento introductorio del tema de fiabilidad en esta obra, la bibliografía incluida es sucinta. [3] y [5] incluyen una exposición elemental y en las otras referencias se puede encontrar un tratamiento más extenso y profundo.

## 12.3. Problemas resueltos

### 12.3.1 *Objetivo: La Luna*

**La tripulación de un vuelo espacial ha de incluir, al menos, un médico, un ingeniero, un informático y un psicólogo y, en conjunto, al menos cuatro personas.**

**El equipo que se entrena para la realización del vuelo está compuesto de las siguientes personas:**

**A (ingeniero)**

**B (ingeniero e informático)**

**C (médico)**

**D (médico y psicólogo)**

**E (ingeniero y psicólogo)**

**Las probabilidades de que estas personas se encuentren en condiciones apropiadas de salud en el momento de emprender el vuelo son, respectivamente: 0'98, 0'99, 0'99, 0'96, 0'99.**

**a) ¿Cuál es la probabilidad de que el vuelo pueda realizarse en la fecha fijada?**

**Una vez iniciado el vuelo, la probabilidad de que un miembro de la tripulación se ponga enfermo, obligando así a cancelar la expedición, sigue una ley exponencial con una media de 100 días:**

**b) ¿Cuál es la probabilidad de que se pueda terminar un vuelo que tiene una duración prevista de 10 días y que se inicia con el equipo completo de astronautas?**

**c) Supóngase que la enfermedad de un tripulante no obliga a cancelar la expedición sino que simplemente inutiliza temporalmente a la persona afectada: ¿cuál es en este caso la probabilidad de terminar el vuelo descrito en b?**

a) La función de fiabilidad, que proporciona la probabilidad de funcionamiento del sistema a partir de las de sus componentes, se obtiene substituyendo variables binarias por probabilidades de funcionamiento en la forma simple de la función de estructura.

Ésta se obtiene por transformaciones formales (efectuar multiplicaciones, eliminar paréntesis, suprimir exponentes, agrupar términos semejantes) de la función de estructura, la cual se puede plantear bien a partir de una representación del sistema que consiste en todos los cortes mínimos en serie (cada corte mínimo, con sus componentes en paralelo) o bien a partir de la representación consistente en todos los caminos mínimos (con sus componentes en serie) en paralelo.

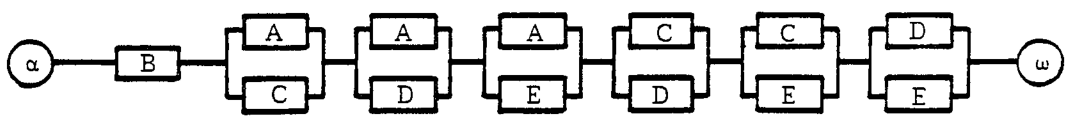
Un corte es un conjunto de elementos tal que si no funciona ninguno de ellos el sistema no funciona. Un camino es un conjunto de elementos tal que si todos funcionan el sistema funciona. Son mínimos si no es posible suprimir ningún elemento sin que dejen de ser cortes o caminos, según corresponda.

En nuestro caso es fácil establecer la relación de cortes mínimos a la de caminos mínimos.

La de cortes mínimos es:

B, AC, AD, AE, CD, CE, DE

a partir de cuya relación se puede dibujar la siguiente red de fiabilidad:




y plantear la función de estructura:

$$\phi(a,b,c,d,e) = b\cdot[1-(1-a)\cdot(1-c)]\cdot[1-(1-a)\cdot(1-d)]\cdot$$

$$\cdot[1-(1-a)\cdot(1-e)]\cdot[1-(1-c)\cdot(1-d)]\cdot[1-(1-c)\cdot(1-e)]\cdot[1-(1-d)\cdot(1-e)]$$

cuya forma simple es:

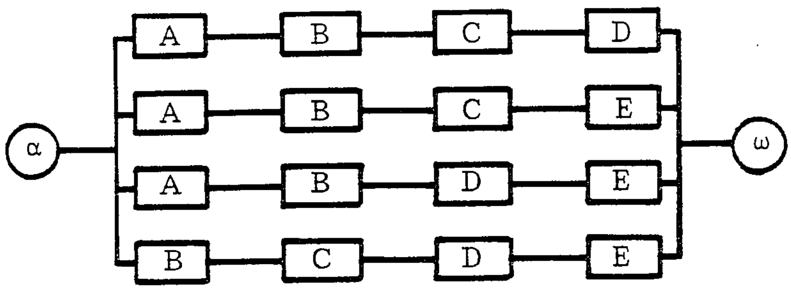
$$\phi_s(a,b,c,d,e) = a\cdot b\cdot c\cdot d + a\cdot b\cdot c\cdot e + a\cdot b\cdot d\cdot e + b\cdot c\cdot d\cdot e - 3\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e$$

Substituyendo las variables por las probabilidades respectivas se obtiene el siguiente valor para la probabilidad de funcionamiento del sistema (probabilidad de que el vuelo pueda realizarse en la fecha fijada):

$$0'9879644$$

Al mismo resultado se puede llegar a partir de la relación de caminos mínimos:

$$ABCD,\ ABCE,\ ABDE,\ BCDE$$




$$\phi(a,b,c,d,e) = 1 - (1 - a\cdot b\cdot c\cdot d)\cdot(1 - a\cdot b\cdot c\cdot e)\cdot(1 - a\cdot b\cdot d\cdot e)\cdot(1 - b\cdot c\cdot d\cdot e)$$

de la que se obtiene la misma $\Phi_s$ que antes.

b) En este caso el fallo de cualquier elemento provoca el fallo del sistema, por lo cual:

$$\phi(a,b,c,d,e) = a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e$$

La probabilidad de supervivencia (no fallo) de cada uno de los elementos es:

$$e^{-\lambda\cdot t}$$

con $\lambda$ = 1 /100 = 0'01 y $t$ = 10, es decir, $e^{-0'1}$, por lo cual la probabilidad de funcionamiento del sistema es:

$$(e^{-0'1})^5 = e^{-0'5} = 0'6065$$

c) En este caso la estructura del sistema es la misma del apartado a) pero las probabilidades de funcionamiento correcto de cada elemento son iguales, según se acaba de ver, a $e^{-0'1}$, por lo cual, substituyendo las variables por este valor en $\Phi_s(a,b,c,d,e)$, se obtiene:

$$4 \cdot e^{-0'4} - 3 \cdot e^{-0'5} = 0'7985$$

### 12.3.2 *Rally*

**Un automovilista se dispone a emprender la travesía del desierto (2000 km), para lo cual ha equipado su coche con 2 circuitos de frenos y 2 ruedas de recambio.**

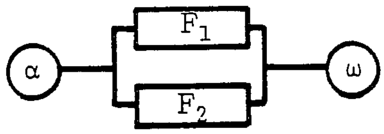
**Las tasas de avería de las ruedas montadas y de los circuitos de frenos se pueden considerar, para una travesía, sensiblemente constantes e iguales, respectivamente, a 0'001 averías/km y 0'0002 av/km.**

**¿Cuál es la probabilidad de que el coche llegue a su destino por sus propios medios?**

Si, como está implícito en el enunciado, se considera únicamente la posibilidad de avería en frenos o en ruedas, el sistema se puede considerar como el conjunto de dos subsistemas en serie, el subsistema frenos y el subsistema ruedas.


La probabilidad de llegar a destino es el producto de las probabilidades correspondientes a cada subsistema.

Por su parte el subsistema frenos se compone de dos elementos, $F_1$ y $F_2$, en paralelo:




cuya función de estructura es:

$$\phi(f_1,f_2) = 1 - (1 - f_1)\ (1 - f_2) = f_1 + f_2 - f_1 \cdot f_2$$

Y, substituyendo las variables por la probabilidad de que el circuito de frenos funcione hasta el final de la travesía, es decir, por $e^{-\lambda t}$ (puesto que si la tasa de avería es constante la ley de averías es exponencial) con $\lambda$ = 0'0002 averías/km y t = 2000 km, cuyo valor numérico es:

$$e^{-0'0002 \times 2000} = e^{-0'4}$$

se obtiene la probabilidad de funcionamiento del subsistema de frenado:

$$e^{-0'4} + e^{-0'4} - e^{-0'4} \cdot e^{-0'4} = 0'8913$$

En cuanto al subsistema constituido por las ruedas, el número de averías en la travesía sigue una ley de Poisson de media:

$$0'001 \times 2000 = 2 \text{ averías}$$

El subsistema ruedas podrá cubrir todo el viaje si el número de averías no es superior a 2, lo que ocurrirá con probabilidad igual a:

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-2} \cdot 2^k}{k!} = e^{-2} \cdot (1 + 2 + \frac{4}{2}) = \frac{5}{e^2} = 0'676676$$

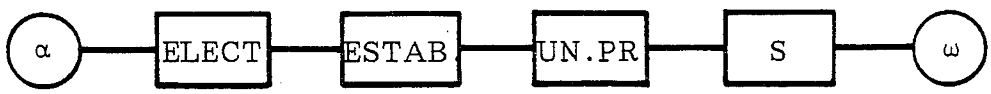
La probabilidad de que se pueda completar la travesía es, por consiguiente:

$$0'8913 \times 0'6767 = 0'60312$$

**12.3.3 Un microordenador está equipado con dos unidades de disco y una impresora. Para ejecutar cierto programa se necesita una unidad de disco y, para registrar los resultados, otra unidad de disco o bien la impresora; además, por supuesto, que haya corriente eléctrica (probabilidad 0'99), que funcione el estabilizador (prob. 0'999) y que funcione también la unidad de proceso (prob. 0'98). Las probabilidades de funcionamiento de cada una de las dos unidades de disco son 0'97 y la de la impresora 0'9.**

**¿Cuál es la probabilidad de que pueda ejecutarse el programa?**

De forma inmediata se puede dibujar la siguiente red de fiabilidad:




Donde S es el subsistema constituido por las dos unidades de disco, $D_1$ y $D_2$, y la impresora, I.

Los caminos mínimos de dicho subsistema son:

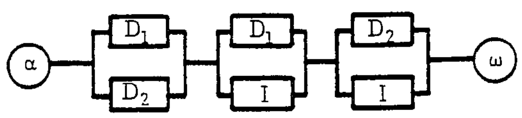
$$D_1\ D_2,\ D_1\ I,\ D_2\ I$$

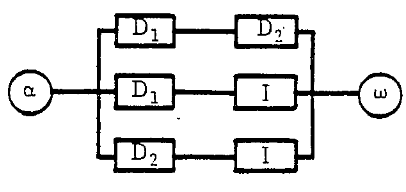
Y los cortes mínimos:

$$D_1\ D_2,\ D_1\ I,\ D_2\ I$$

(que en este caso, por cierto, coinciden con los caminos mínimos).

Las redes de fiabilidad correspondientes son:




(a partir de cortes mínimos) (a partir de caminos mínimos) y las funciones de estructura:

$$\phi(d_1, d_2, i) = (d_1 + d_2 - d_1 \cdot d_2) \cdot (d_1 + i - i \cdot d_1) \cdot (d_2 + i - i \cdot d_2)$$

(a partir de los cortes) o:

$$\phi(d_1, d_2, i) = 1 - (1 - d_1 \cdot d_2) \cdot (1 - i \cdot d_1) \cdot (1 - i \cdot d_2)$$

(a partir de los caminos mínimos.)

En cualquier caso, la forma simple de la función de estructura es:

$$\phi_s(d_1, d_2, i) = d_1 \cdot d_2 + i \cdot d_1 + i \cdot d_2 - 2 \cdot i \cdot d_1 \cdot d_2$$

a partir de la cual, substituyendo variables por probabilidades obtenemos la probabilidad de que funcione el sistema S:

$$0'97^2 + 2 \times 0'9 \times 0'97 - 2 \times 0'9 \times 0'97^2$$

que multiplicada por las probabilidades de los otros subsistemas en serie da la probabilidad de que pueda ejecutarse el programa:

$$0'99 \times 0'999 \times 0'98 \times (0'97^2 + 2 \times 0'9 \times 0'97 - 2 \times 0'9 \times 0'97) = 0'9627$$

### 12.3.4 *Comodines y polivalencia en ESCASA*

**La empresa ESCASA (Eslabones y Cadenas S.A.) fabrica material para la manutención. Dos de sus productos (A y B) se obtienen en sendas líneas de montaje en cada una de las cuales hay 5 estaciones de trabajo con un trabajador en cada una. El turno de trabajo es de 7 horas y 50 minutos y cada trabajador tiene derecho a períodos de descanso por un total de 60 minutos; para que no se interrumpa el funcionamiento de las líneas en cada una hay un operario comodín que substituye a los demás en sus períodos de descanso y hace alguna tarea complementaria en el tiempo que le sobra cada día. Cuando un trabajador de una línea está de baja el comodín se incorpora a una estación de trabajo y la línea funciona únicamente 6 horas y 50 minutos; cuando hay dos o más bajas la línea no funciona y los trabajadores son asignados a otras tareas. La probabilidad de que un trabajador esté de baja un día cualquiera es del 5% y es independiente del hecho de que lo estén o no los demás trabajadores. Cada hora de inactividad de la cadena representa una pérdida de ingresos para la empresa de 200 ECU.**

**Actualmente todos los trabajadores de una línea de montaje pueden encargarse de cualquier estación de trabajo de su misma línea pero no de una de la otra línea.**

**El Director de Producción, después de leer en la revista *Prodúctica92* el artículo "Polivalencia: un concepto clave para la competitividad y la supervivencia", considera la posibilidad de un plan de formación que faculte a los trabajadores para encargarse indistintamente de las estaciones de trabajo de las líneas de A y de B. Estima que, una vez haya conseguido esta polivalencia, tendrá que aumentar el salario por hora de los trabajadores en 0'4 ECU y se pregunta qué coste máximo puede admitir para el plan de formación suponiendo que la tasa de interés sea de un 10% anual y el número de días laborables al año, de 250.**

En la situación actual, la probabilidad de que una cadena funcione 7 horas y 50 minutos es la de que no haya ningún trabajador de baja:

$$p_0(6{,}0'05) = 0'95^6 = 0'735$$

La de que funcione 6 horas y 50 minutos es la de que haya un trabajador de baja:

$$p_1(6{,}0'05) = \binom{6}{1} 0'05 \cdot 0'95^5 = 0'232$$

La de que no funcione en todo el turno:

$$1 - 0'735 - 0'232 = 0'033$$

Por lo cual, la esperanza matemática de la pérdida anual de ingresos por inactividad, teniendo en cuenta que hay dos líneas es:

$$2 \times 250 \times 200 \times \left[ 0'232 \times 1 + 0'033 \times \frac{470}{60} \right] = 49050 \text{ ECU/año}$$

Si los tres trabajadores fueran polivalentes funcionarían todo el turno si no hubiera ninguna baja; si hubiera una, una de las líneas debería estar inactiva durante 38 minutos (el comodín puede cubrir 1 hora en cada una de las estaciones de trabajo de una línea y le queda aún 1 hora y 50 minutos para repartir entre las 5 estaciones de la otra línea); si hubiera dos, las dos líneas estarían inactivas durante una hora; si el número de bajas está comprendido entre 3 y 6, funcionará una línea y la otra permanecerá inactiva; si hay 7 bajas, la línea activa sólo lo estará durante 6 horas y 50 minutos; con 8 o más bajas, ambas líneas cesan por completo en su actividad.

Por tanto, la esperanza matemática de las pérdidas por inactividad es:

$$250\times200\times[p_1(12,0'05)\times\frac{38}{60}+p_1(12,0'05)\times2+\sum_{k=3}^{6}p_k(12,0'05)\times\frac{470}{60}+p_7(12,0'05)\times\frac{530}{60}$$

$$+\sum_{k=8}^{12}p_k(12,0'05)\times2\times\frac{470}{60}]\approx50000\times[0'341\times\frac{38}{60}+0'099\times2\times+0'019\times\frac{470}{60}]=28140\text{ ECU/Año}$$

Es decir, el ahorro medio anual, en lo que respecta a los costes de inactividad, es de:

$$48050 - 28140 = 19910 \text{ ECU/año}$$

De los que hay que deducir el importe del incremento salarial, es decir:

$$\frac{470}{60}\times250\times0'4 = 1566'67 \text{ ECU/año}$$

En definitiva, el ahorro neto es de:

$$19910 - 1566'67 = 18343'33 \text{ ECU/año}$$

que, si se considera con horizonte ilimitado, corresponden a un capital de:

$$\frac{18343'33}{0'1} = 183433'3 \text{ ECU/año}$$

importe máximo admisible para el plan de formación.

## 12.4 Enunciados

**12.4.1** Para ir de B a T se puede coger el metro hasta E y allí coger el tren 1 (que pasa por S y T) o bien coger el autobús hasta C y, en C, el tren 2 (que lleva a S, donde se puede coger el tren 1 para ir a T, tal como se ha dicho anteriormente) o bien el tren 3 que va directamente de C a T.

¿Con qué probabilidad se puede ir de B a T si la probabilidad de funcionamiento de cada una de las 5 líneas de transporte mencionadas es 0'95?

**12.4.2** El sistema de prevención de incendios de un almacén está constituido por unos rociadores que funcionan automáticamente cuando la temperatura alcanza un cierto valor y 3 extintores de espuma que han de ser accionados manualmente. Los rociadores o los dos extintores son suficientes para cortar cualquier fuego y los daños son entonces de 500.000 PTA.

Los rociadores funcionan con una probabilidad del 95% y cada extintor con una probabilidad del 90%. Hay, por tanto, una pequeña probabilidad de que el fuego se convierta en incendio y entonces los daños son de 200 millones de pesetas. La media anual de conatos de incendio es de 0'3 en horas de trabajo y 0'1 en horas en las que el almacén permanece cerrado (en cuyo caso, los extintores no pueden actuar por falta de personal que los haga funcionar).

a) ¿Cuál es el coste medio por año?

b) El coste de un extintor es de 50.000 PTA (la duración puede considerarse prácticamente ilimitada); el del mantenimiento anual, 10.000 PTA; y la tasa de interés, el 5%. ¿Es conveniente comprar un cuarto extintor?

**12.4.3** El entrenador de natación del equipo preolímpico de Lavinia cuenta con 5 deportistas para formar el equipo de 4 x 100 estilos. Las normas para participar en la competición señalan que cada integrante del equipo debe tener acreditada una marca mínima en la especialidad en la que participe.

La tabla siguiente indica en qué especialidad tiene marca cada deportista:

| Especialidad | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Crawl | X | | | | X |
| Espalda | | X | | | |
| Braza | | | X | | X |
| Mariposa | | | | X | X |

Se trata de obtener la función de fiabilidad de este sistema y calcular la probabilidad de poder participar en la competición de 4 x 100 estilos, sabiendo que la probabilidad de que cada deportista esté disponible es 0'9.

**12.4.4** El gerente del aeropuerto internacional de Everlateness, con motivo de la ampliación y renovación de las instalaciones, considera dos posibilidades para el parque de vehículos de transporte entre las aeronaves y la terminal.

Por una parte, unos autobuses, con un coste unitario de 12 M de unidades monetarias y con una probabilidad de funcionamiento del 95%. Por otra, tractores y remolques; los tractores tienen un coste unitario de 8 Mum i una probabilidad de funcionamiento del 96% y los remolques, de 6 Mum i del 98%.

El nivel de servicio que ha fijado el gerente es una probabilidad del 99% de que haya al menos 3 vehículos disponibles i del 999‰ de que haya al menos uno.

a) ¿Cuál es la mejor solución?

b) Para la solución que se ha obtenido con tractores y remolques, dibujar una red de fiabilidad del sistema para cada uno de los siguientes casos:

$b_1$) Se considera que el sistema funciona si funcionan al menos 3 vehículos.

$b_2$) Se considera que el sistema funciona si funciona al menos un vehículo.

**12.4.5** El fabricante de un aparato concede una garantía de un año; si el aparato se avería en dicho período, los costes de la reparación (con un valor medio de 10.000 PTA) corren a su cargo.

Prácticamente, las averías pueden deberse únicamente a un elemento delicado que tiene un coste de 300 PTA y una duración que sigue una ley normal de media 1'2 años y desviación tipo 0'1 años.

Se estudia la posibilidad de incluir en el aparato dos ejemplares del elemento, de un modelo diferente, de inferior calidad, con una duración que sigue una ley normal (1'15, 0'1). Los dos ejemplares funcionan simultáneamente, pero si uno de ellos falla, con el otro es suficiente porque el aparato sigue funcionando bien.

¿Qué coste se puede admitir para cada unidad de este modelo del elemento crítico?

**12.4.6** La empresa Manufactura Asistida por Ordenador (MAO) es la pionera en la aplicación de tecnologías avanzadas en los procesos de fabricación.

Una de las cadenas de montaje está equipada con tres robots de la conocida marca ASYMOF (Artefactos con Sensibilidad y Movilidad para Optimizar la Fabricación): $R_1$, $R_2$ y $R_3$. Estos robots tienen asignadas las funciones de coger y colocar en posición ($R_1$), poner tapa ($R_2$) y soldar ($R_3$). Se dispone también de un robot de reserva, $R_4$, que puede sustituir a $R_2$ si éste falla. Una persona, P, supervisa todo el proceso y, en caso necesario, puede sustituir a $R_1$ o $R_2$.

a) ¿Cuál es la función de fiabilidad de esta cadena?

b) Si, para un instante elegido al azar, las probabilidades de que $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$ y P estén en condiciones de actuar son, respectivamente, 0'95, 0'90, 0'97, 0'999 y 0'92: ¿cuál es la probabilidad de que la cadena pueda funcionar?

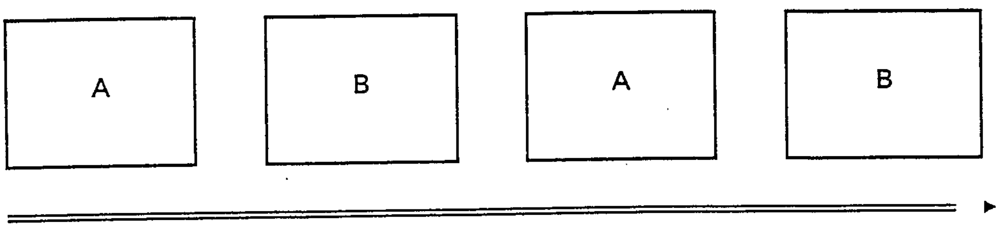
c) Aun siendo alta la fiabilidad, se desea mejorarla porque es un cuello de botella del proceso de producción en la fábrica y cada hora de interrupción del funcionamiento de la cadena produce unas pérdidas de 1.000.000 de unidades monetarias. ¿Qué inversión podría hacer la empresa en un robot $R_5$ idéntico a $R_3$, considerando un horizonte de 5 años, 8000 horas de producción al año y una tasa de interés real del 5%?

**12.4.7** El Servicio de Inspección Técnica Oficial (SITO) diseña las instalaciones para homologar determinadas máquinas pesadas (250 cada año, en media).

Las máquinas son de dos tipos diferentes (I y II), en la misma proporción, y hay también dos tipos de estaciones de control (A y B). Las máquinas de tipo I deben pasar por las estaciones según la secuencia ABAB y las de tipo II según la AB.

Se considera dos modalidades en la instalación, la segunda de las cuales presenta variantes.

En la modalidad 1, la disposición de las estaciones es la que se representa esquemáticamente en la figura, con unos dispositivos de manutención que sólo permiten el desplazamiento de las máquinas de izquierda a derecha. El coste anual de esta modalidad es de 100 *um*.




En la modalidad 2, hay una sección con 1 ó 2 estaciones A y otra con 1 ó 2 estaciones

B (lo que da 4 variantes). El coste anual de esta modalidad es de 95 *um* para la configuración mínima (1 estación A y 1 estación B) más 10 *um* si se instala una segunda estación A y 15 *um* si se instala una segunda estación B.

Las estaciones son delicadas y la probabilidad de que estén en condiciones de funcionar en un momento dado es únicamente de 0'9 para cada estación A y 0'95 para cada estación B.

El coste de no poder realizar inmediatamente una inspección se estima en 0'5 *um*.

Se trata de determinar la modalidad (y variante, en su caso) de menor coste esperado anual.

**12.4.8** El Departamento de Organización de COMMVULSA (Compañía Manufacturera de Vulcanizados, S.A.) estudia la configuración de una parte de su sistema productivo, en la cual unas piezas (en la cantidad de 10000 diarias) deben someterse a dos operaciones, A y B, en este orden. Las opciones son las siguientes:

1) Máquinas (con un coste de 1500 *um*/día) manejadas por un operario cada una. El ciclo de trabajo consta de la siguiente secuencia: manual(20 *s*) / máquina(10 *s*) / manual (25*s*) / máquina(15 *s*); el tercer y el cuarto elementos se superponen durante 5 s. El tiempo de trabajo manual corresponde a una actividad de 100 en la escala centesimal, pero se considera que se puede pactar una actividad 120 a cambio de una prima garantizada, con la cual el coste de un operario será de 1000 *um*/*h*.
2) Un conjunto de máquinas que efectúan la operación A seguidas (con un espacio para el stock intermedio) por un conjunto de máquinas que realizan la operación B. Tanto las unas como las otras tienen un coste de 30.000 *um*/día y son automáticas, pero se presentan incidencias (cuya probabilidad de aparición es independiente del tiempo transcurrido desde la incidencia anterior). La tasa de incidencias es de 0'1 y 0'05 por hora de funcionamiento en las máquinas que ejecutan A y B, respectivamente, y los tiempos de resolución de una incidencia son de 30 minutos en ambos casos. El stock intermedio siempre es suficiente para alimentar las máquinas que realizan B aunque haya algún problema con las que efectúan A. El tiempo requerido por las máquinas es de 8 *s* para la operación A y de 6 *s* para la B. Habrá un operario para atender las máquinas destinadas a A y otro para las de B con un coste de 1500 *um*/*h* cada uno.
3) Máquinas automáticas que llevan a cabo todo el proceso en 2 *s* y que tienen un coste de 180.000 *um*/día. Estas máquinas tienen dos elementos relativamente delicados con leyes de supervivencia $v_1(t) = \exp(-0'02 \cdot t)$ y $v_2(t) = \exp(-0'04 \cdot t)$, donde $t$ es el tiempo de funcionamiento en horas. Cuando falla un elemento interviene inmediatamente un equipo de reparaciones de la empresa fabricante de las máquinas, el cual emplea 4 horas en hacer su trabajo; el coste de una intervención es de 30.000 *um*.

La jornada laboral es de 8 horas. En la opción 1 los operarios tendrían dos pausas programadas de 30 minutos cada una.

Se trata de comparar estas opciones y también, en su caso, de sugerir otras opciones razonables (a partir, exclusivamente, de los datos contenidos en el enunciado).