UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA – BARCELONATECH
OPE – ORGANIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Y DE EMPRESA (ASPECTOS TÉCNICOS, JURÍDICOS Y ECONÓMICOS EN PRODUCCIÓN)

Modelos y herramientas de decisión. Teoría de Juegos II

MODELOS Y HERRAMIENTAS DE DECISIÓN 240EO023 – Máster Universitario en Ingeniería de Organización (240MUEO) - ETSEIB

Joaquín Bautista-Valhondo

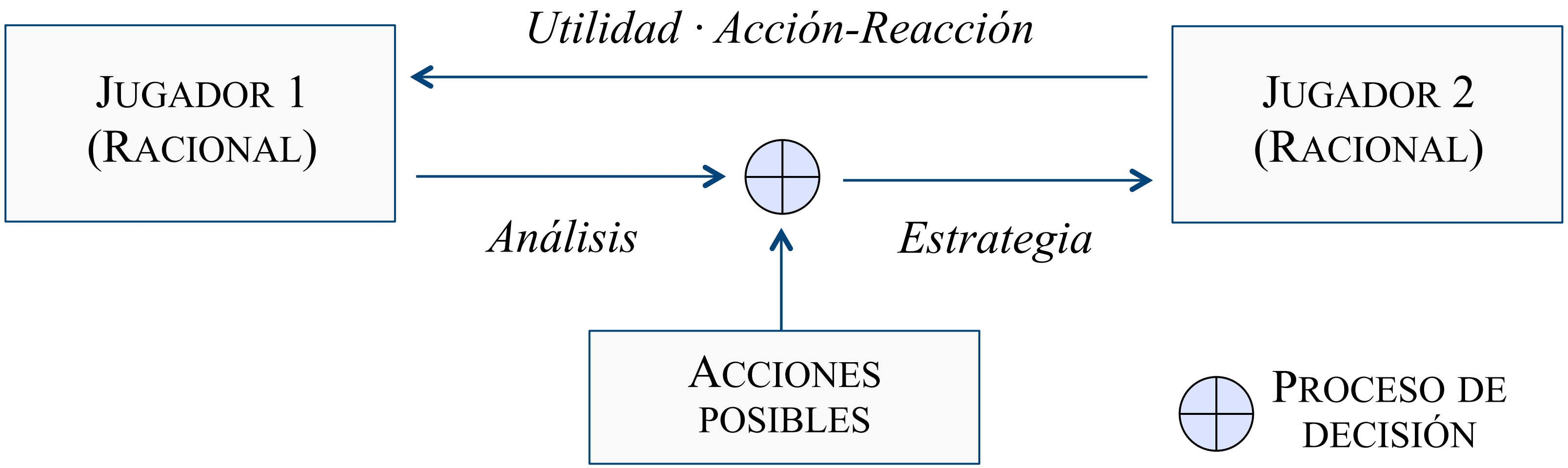
OPE-PROTHIUS – OPE-MSc.2018/20 240EO023 (20180310) - http://futur.upc.edu/OPE - www.prothius.com -
Departamento de Organización de Empresas – ETSEIB · UPC

Contenido

- Decisiones en universo hostil · Juego
- Elementos de un juego
- Juegos suma 0. Técnicas de resolución
- Juegos suma 0. Criterio max min / min max · Resolución Ejemplos 1, 2 y 3
- Ejemplos 4 y 5. Presentación y resolución
- Juegos suma 0 con estrategias mixtas · Equilibrio
- Ejemplo 6. Presentación
- Ejemplo 6. Resolución con estrategias mixtas · Equilibrio PL
- Juegos suma 0 (2x2) Estrategias mixtas · Fórmulas
- Ejemplos 1 y 6. Resolución (2x2) Estrategias mixtas · Fórmulas
- Ejemplo 7. Presentación y resolución gráfica (2x3) Estrategias mixtas
- Ejemplo 8. Presentación y resolución PL

Decisiones en universo hostil · Juego

Esquema: Proceso de un Juego



Utilidad: Información que comunica el desarrollo del juego.

Acciones: Decisiones parciales tomadas por los jugadores.

Estrategia: Regla predeterminada que concreta las acciones ante cada circunstancia.

Análisis: Estudio de la situación.

Elementos de un juego (1)

Jugadores: Dos o más decisores que en sus acciones, bajo una percepción hostil, emplean el criterio de minimizar su máxima pérdida o de maximizar su mínima ganancia.

Acciones: Decisiones tomadas cuando hay que jugar (elegir).

Estrategia: Regla predeterminada que especifica por completo cómo se va a responder a cada circunstancia posible en cada etapa del juego (v.g.- análisis de un movimiento en ajedrez).

Pagos: Utilidades (ganancias) asociadas a cada conjunto de estrategias de los jugadores. Los valores también pueden corresponder a costes (pérdidas) o frustraciones.

Jugada: Acciones simultáneas de los jugadores sin que éstos conozcan las elecciones de sus oponentes, dando como resultado una utilidad para cada jugador.

Supuestos:

- Ambos jugadores son racionales
- Ambos jugadores eligen sus estrategias para su único beneficio, sin compasión hacia el oponente.

Elementos de un juego (2)

Elementos de un juego de 2 personas: (1) Estrategias del jugador_1, (2) Estrategias del jugador_2, y (3) Matrices de pagos de ambos jugadores.

Hipótesis: Al inicio del juego, cada jugador conoce: (1) las estrategias de que dispone, (2) las estrategias de su competidor y (3) las matrices de pagos de ambos jugadores.

1. Conjunto de estrategias de J1:

$$e_i \in E \left(i = 1,..,m\right)$$

2. Conjunto de estrategias de J2:

$$s_j \in S \left(j = 1,..,n\right)$$

3. Matriz de pagos (ganancias) de J1:

$$A = (a_{i,j})_{m\times n}\left[\forall e_i \in E, \forall s_j \in S\right]$$

4. Matriz de pagos (ganancias) para J2:

$$B = (b_{i,j})_{m\times n}\left[\forall e_i \in E, \forall s_j \in S\right]$$

J(1,2): a_{ij}, b_{ij}	s_1	s_2	.	s_n
e_1	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}	.	a_{1n}, b_{1n}
e_2	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}	.	a_{2n}, b_{2n}
.	.	.	.	.
e_m	a_{m1}, b_{m1}	a_{m2}, b_{m2}	.	a_{mn}, b_{mn}

Juego suma 0 $\Rightarrow B = -A : b_{ij} = -a_{ij} \left[\forall e_i \in E, \forall s_j \in S\right]$

Juegos suma 0. Técnicas de resolución

Procedimiento:

1. Interpretar el problema
2. Construir árbol del juego · Forma extendida
3. Determinar matriz de pagos para J1(A) y/o para J2(B) · Forma normal
4. Eliminar estrategias dominadas en J1/ J2 y obtener matriz de pagos reducida $\widehat{A}$ / $\widehat{B}$

$$a.- \text{Si } \dim \widehat{A} = (1\times 1),\ \text{Hacer:}\left\{\begin{array}{l} a^* = \widehat{a}(e^*,s^*) \text{ como valor de juego: } V \\ (e^*,s^*) \text{ como las estrategias óptimas de (J1,J2)} \end{array}\right\},\ \text{FIN}$$

$$b.- \text{Si } \dim \widehat{A} > (1\times 1),\ \text{Continuar}$$

5. Aplicar criterio max min (J1) / min max (J2):

$$a.- \text{Si existe Punto de Silla, Hacer:}\left\{\begin{array}{l} a^* = a(e^*,s^*) \text{ como valor de juego: } V \\ (e^*,s^*) \text{ como las estrategias óptimas de (J1,J2)} \end{array}\right\},\ \text{FIN}$$

$$b.- \text{Si\_no, Hacer:}\left\{\begin{array}{l} - \text{ Si } \dim \widehat{A} = (2\times 2) \rightarrow \text{Resolver mediante fórmulas} \\ - \text{ Si } \dim \widehat{A} = (2\times n') \vee (m'\times 2) \rightarrow \text{Solución gráfica o Sistema\_ecuaciones} \\ - \text{ Si } \dim \widehat{A} = (m'\times n') \rightarrow \text{Solución mediante PL} \end{array}\right\},\ \text{FIN}$$

Juegos suma 0. Criterio max min / min max

Hipótesis:

1. En todo juego, cada jugador (J1, J2) intentará obtener su máxima ganancia.
2. En juego de suma 0, la máxima ganancia de J1 supone la máxima pérdida de J2.
3. Ningún oponente racional estará dispuesto a perder lo máximo.
4. La postura de todo jugador será minimizar su pérdida máxima.
5. Minimizar la pérdida máxima equivale a maximizar la ganancia mínima.

Sean :

E, S Conjunto de estrategias de J1, $E = \{e_1, .., e_n\}$. Conjunto de estrategias de J2, $S = \{s_1, .., s_m\}$

$a_{i,j}, A$ Utilidad obtenida por J1 con las estrategias $e_i \in E$ de J1 y $s_j \in S$ de J2 · A : matriz de utilidad de J1

$b_{i,j}, B$ Utilidad obtenida por J2 con las estrategias $e_i \in E$ de J1 y $s_j \in S$ de J2 · B : matriz de utilidad de J2

Suma 0 $\equiv \left[a_{i,j} + b_{i,j} = 0 \;\forall (i,j)\right] \Rightarrow \max\limits_{s_j \in S}\left\{\min\limits_{e_i \in E}\left(b_{i,j}\right)\right\} = \max\limits_{s_j \in S}\left\{\min\limits_{e_i \in E}\left(-a_{i,j}\right)\right\} = \max\limits_{s_j \in S}\left\{-\max\limits_{e_i \in E}\left(a_{i,j}\right)\right\} = \min\limits_{s_j \in S}\left\{\max\limits_{e_i \in E}\left(a_{i,j}\right)\right\}$

Percepción	Decisor	Criterio	Función	Estrategia pura óptima
Hostilidad	Jugador 1	maxmin	$f\left(A, \vec{e}, \vec{s}\right) = \max\limits_{e_i \in E}\left\{\min\limits_{s_j \in S}\left(a_{i,j}\right)\right\}$	$e^* = \operatorname{argmax}\limits_{e_i \in E}\left\{\min\limits_{s_j \in S}\left(a_{i,j}\right)\right\}$
Hostilidad	Jugador 2	minmax	$f\left(A, \vec{s}, \vec{e}\right) = \min\limits_{s_j \in S}\left\{\max\limits_{e_i \in E}\left(a_{i,j}\right)\right\}$	$s^* = \operatorname{argmin}\limits_{s_j \in S}\left\{\max\limits_{e_i \in E}\left(a_{i,j}\right)\right\}$

Ejemplo 1. Resolución · Criterio max min / min max

Ejemplo 1 · Pares o Nones · Resolución · Criterio max min J1

Estrategias J1:

e_1 : Mostrar 1 dedo

e_2 : Mostrar 2 dedos

Estrategias J2:

s_1 : Mostrar 1 dedo

s_2 : Mostrar 2 dedos

Tabla-1: Tabla de pagos (euros que J1 gana a J2) "Pares o Nones".
No se alcanza el equilibrio con estrategias puras.

J1: a_{ij}	s1	s2	Min	
e1	10	-10	**-10**	← max min
e2	-10	10	**-10**	← max min
Max	**10**	**10**		
	↑ min max	↑ min max		

$$\text{Si J1} \rightarrow e_1 \Rightarrow \text{ J2 } \rightarrow s_2 : \text{ J1}\left[(e_1,s_2),-10\right], \text{ Si J1} \rightarrow e_2 \Rightarrow \text{ J2 } \rightarrow s_1 : \text{ J1}\left[(e_2,s_1),-10\right]$$

$$\text{Si J2} \rightarrow s_1 \Rightarrow \text{ J1 } \rightarrow e_1 : \text{ J1}\left[(e_1,s_1),+10\right], \text{ Si J2} \rightarrow s_2 \Rightarrow \text{ J1 } \rightarrow e_2 : \text{ J1}\left[(e_2,s_2),+10\right]$$

Valor del Juego (V) indefinido: $-10 \leq V \leq +10$: (Sin ganador. Equilibrio entre -10 y +10)

PROTHIUS
Càtedra Organització Industrial

Ejemplo 2. Resolución · Criterio max min / min max

Ejemplo 2 · Campaña política 2x3 · Resolución · Criterio max min J1

Estrategias J1:

e_1 : Ir a B y M

e_2 : Ir solo a B

e_3 : Ir solo a M

e_4 : Ir solo a S

Estrategias J2:

s_1 : Ir a M y S

s_2 : Ir solo a B

s_3 : Ir solo a M

s_4 : Ir solo a S

Tabla-2.0: Tabla de pagos (miles de votos que J1 gana a J2)
Campaña política 2x3.

J1: a_{ij}	s1	s2	s3	s4	Min	
e1	1	2	4	1	**1**	← maxmin
e2	-1	0	5	1	-1	
e3	0	1	-1	0	-1	
e4	-2	0	-1	1	-2	
Max	**1**	2	5	**1**		
	↑ min max			↑ min max		

$\text{Si J1} \rightarrow e_1 \Rightarrow \text{ J2 } \rightarrow s_1 \vee s_4 : \text{ J1}\left[(e_1,s_1),+1000\right] \vee \text{J1}\left[(e_1,s_4),+1000\right]$

$\text{Si J2} \rightarrow s_1 \Rightarrow \text{ J1 } \rightarrow e_1 : \text{ J1}\left[(e_1,s_1),+1000\right], \text{ Si J2} \rightarrow s_4 \Rightarrow \text{ J1 } \rightarrow e_1 : \text{ J1}\left[(e_1,s_4),+1000\right]$

Valor del Juego: $V = 1000$ (J1 gana 1000 votos a J2)

Ejemplo 3. Resolución · Criterio max min / min max

Ejemplo 3 · Reina versus Rey · Q vs K · Resolución · Criterio max min J1

Estrategias J1:

e_1 : Apostar

e_2 : Apostar solo con Q

e_3 : Apostar solo con K

e_4 : Pasar

Estrategias J2:

s_1 : Apostar

s_2 : Apostar solo con Q

s_3 : Apostar solo con K

s_4 : Pasar

Tabla-3.0: Tabla de pagos (euros/partida que J1 gana a J2) en el problema Q vs K.

J1: a_{ij}	s1	s2	s3	s4	Min	
e1	0	-25	125	100	**-25**	← max min
e2	25	-25	50	0	**-25**	← max min
e3	-125	-100	-25	0	-125	
e4	-100	-100	-100	-100	-100	
Max	25	**-25** ↑ min max	125	100		

$$\text{Si J1} \rightarrow e_1 \Rightarrow \text{ J2 } \rightarrow s_2 : \text{ J1}\left[(e_1,s_2),-25\right], \text{ Si J1} \rightarrow e_2 \Rightarrow \text{ J2 } \rightarrow s_2 : \text{J1}\left[(e_2,s_2),-25\right]$$

$$\text{Si J2} \rightarrow s_2 \Rightarrow \text{ J1 } \rightarrow e_1 \vee e_2 : \text{ J1}\left[(e_1,s_2),-25\right], \text{ J1}\left[(e_2,s_2),-25\right]$$

Valor del Juego: $V = -25$ (J2 gana 25 euros/partida a J1)

Ejemplo 4. Presentación

Ejemplo 4 · Campaña política autonómica 1día y 4 ciudades (1x4) · Enunciado:

Dos fuerzas políticas (J1 y J2) diseñan un plan de campaña poco antes de la fecha de consulta de las elecciones autonómicas. Ambas fuerzas quieren emplear un último día de campaña en alguna de las ciudades de la Comunidad (B, G, LL y T). Los miles de votos (suma 0) que J1 ganará a J2, en función de las estrategias de ambos jugadores, se recogen en la Tabla-4.0

Estrategias J1:

e_1 : Campaña en B
e_2 : Campaña en G
e_3 : Campaña en LL
e_4 : Campaña en T

Estrategias J2:

s_1 : Campaña en B
s_2 : Campaña en G
s_3 : Campaña en LL
s_4 : Campaña en T

J1: a_{ij} : A	s1	s2	s3	s4
e1	1	-2	-1	-1
e2	-1	-3	-2	3
e3	1	2	0	2
e4	-1	3	-2	-3

Tabla-4.0: Tabla de pagos (ganancias). Miles de votos ganados por J1 a J2 en el problema de la Campaña política 1x4.

Ejemplo 4. Resolución · Criterio max min / min max

Ejemplo 4 · Campaña política 1x4 · Resolución · Criterio max min J1 · Punto de silla

Estrategias J1:

e_1 : Campaña en B

e_2 : Campaña en G

e_3 : Campaña en LL

e_4 : Campaña en T

Estrategias J2:

s_1 : Campaña en B

s_2 : Campaña en G

s_3 : Campaña en LL

s_4 : Campaña en T

Tabla-4: Tabla de pagos (miles de votos que J1 gana a J2) Campaña 1x4.
Punto de silla: J1 y J2 pierden si abandonan su estrategia óptima.

J1: a_{ij}	s1	s2	s3	s4	Min	
e1	1	-2	-1	-1	-2	
e2	-1	-3	-2	3	-3	
e3	1	2	0	2	**0**	maxmin ←
e4	-1	3	-2	-3	-3	
Max	1	3	**0**	3		
			↑ minmax			

$\text{Si J1} \downarrow e_3 \Rightarrow \text{ J2 } \rightarrow s_3 : \text{ J1}\left[(e_1,s_3),-1000\right], \text{ J1}\left[(e_2,s_3),-2000\right], \text{ J1}\left[(e_4,s_3),-2000\right] \Rightarrow \text{ J1 no abandona } e_3$

$\text{Si J2} \downarrow s_3 \Rightarrow \text{ J1 } \rightarrow e_3 : \text{ J2}\left[(e_3,s_1),-1000\right], \text{ J2}\left[(e_3,s_2),-2000\right], \text{ J2}\left[(e_3,s_4),-2000\right] \Rightarrow \text{ J2 no abandona } s_3$

Valor del Juego: $V = 0$ (Ex aequo) · Punto de silla: $(\text{J1}, \text{J2}) \rightarrow (e_3, s_3)$

Ejemplo 5. Presentación

Ejemplo 5 · Negociación convenio colectivo · Enunciado:

Patronal (P) y Sindicatos (S) de una Compañía están negociando el nuevo convenio colectivo. La negociación está congelada: P ofrece a S un aumento salarial de 10 euros/turno, mientras que S pide a P un aumento de 15 euros/turno. P y S acuerdan que aceptarán la resolución de un árbitro imparcial (A). El arbitraje pide tanto a P como a S una propuesta confidencial redondeada al euro. Por experiencias anteriores, P y S saben que A acepta la propuesta del lado que cede más en su cifra final, y si ningún lado cede o si ambos ceden en la misma cantidad, A suele establecer la cifra media.

Estrategias J1 (P):

e_1 : Ofrecer 10 euros/turno

e_2 : Ofrecer 11 euros/turno

e_3 : Ofrecer 12 euros/turno

Estrategias J2 (S):

s_1 : Pedir 15 euros/turno

s_2 : Pedir 14 euros/turno

s_3 : Pedir 13 euros/turno

ΔS NCC	s1	s2	s3
e1	12.5	14	13
e2	11	12.5	13
e3	12	12	12.5

Tabla-5.0: Tabla de incrementos salariales establecidas por el Arbitraje. Aumento (euros/turno) en el problema NCC.

Ejemplo 5. Resolución · Criterio max min / min max

Ejemplo 5 · Negociación convenio colectivo · Resolución · Criterio max min J1 · Punto de silla

Estrategias J1 (P):

e_1 : Ofrecer 10 euros/turno

e_2 : Ofrecer 11 euros/turno

e_3 : Ofrecer 12 euros/turno

Estrategias J2 (S):

s_1 : Pedir 15 euros/turno

s_2 : Pedir 14 euros/turno

s_3 : Pedir 13 euros/turno

Tabla-5.1: Tabla de pagos. Ahorro (euros/turno) de la Patronal respecto a 12.5 €/turno. Punto de silla: J1 y J2 pierden si abandonan su estrategia óptima.

J1: a_{ij}	s1	s2	s3	Min	
e1	0	-1.5	-0.5	-1.5	
e2	1.5	0	-0.5	-0.5	
e3	0.5	0.5	0	**0**	maxmin ←
Max	1.5	0.5	**0**		
			↑ minmax		

$$\text{Si J1}\downarrow e_3 \Rightarrow \text{ J2 } \rightarrow s_3: \text{ J1}\left[(e_1,s_3),-0.5\right], \text{ J1}\left[(e_2,s_3),-0.5\right] \Rightarrow \text{ J1 no abandona } e_3 \text{ pues J1}\left[(e_3,s_3),0\right]$$

$$\text{Si J2}\downarrow s_3 \Rightarrow \text{ J1 } \rightarrow e_3: \text{ J2}\left[(e_3,s_1),-0.5\right], \text{ J2}\left[(e_3,s_2),-0.5\right] \Rightarrow \text{ J2 no abandona } s_3 \text{ pues J2}\left[(e_3,s_3),0\right]$$

Valor del Juego: $V = 0$ (Ex aequo) · Punto de silla: (J1, J2) $\rightarrow (e_3, s_3)$

Juegos suma 0 con estrategias mixtas · Equilibrio (1)

Nomenclatura:

E,S	Conjunto de estrategias de J1, $E=\{e_1,..,e_m\}$. Conjunto de estrategias de J2, $S=\{s_1,..,s_n\}$
$a_{i,j}$	Utilidad obtenida por J1 ante la estrategia de J1 $e_i \in E$ y la estrategia de J2 $s_j \in S$
$b_{i,j}$	Utilidad obtenida por J2 ante la estrategia de J1 $e_i \in E$ y la estrategia de J2 $s_j \in S$
x_i, y_j	Probabilidad (x_i) de que J1 use la estrategia $e_i \in E$ · Probabilidad (y_j) de que J2 use la estrategia $s_j \in S$
v_j, V	Ganancia (v_j) de J1 ante la estrategia de J2 $s_j \in S$ · Ganancia mínima de J1: $V = f(\vec{x}, A)$
$\breve{v}_i, \breve{V}$	Pérdida $(\breve{v}_i)$ de J2 ante la estrategia de J1 $e_i \in E$ · Pérdida máxima de J2: $\breve{V} = f(\vec{y}, A)$

Formulación compacta:

$$\text{PL-J1: } \max V = \min_{1\le j\le n}\{v_j\} \qquad (0)$$

s.a:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j}x_i = v_j \qquad \forall j=1,..,n \qquad (1)$$

$$v_j \ge V \qquad \forall j=1,..,n \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad (3)$$

$$x_i \ge 0 \qquad \forall i=1,..,m \qquad (4)$$

$$(1)\wedge(2) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}x_i \ge V \qquad \forall j=1,..,n$$

$$\text{PL-J2: } \min \breve{V} = \max_{1\le i\le m}\{\breve{v}_i\} \qquad (0')$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}y_j = \breve{v}_i \qquad \forall i=1,..,m \qquad (1')$$

$$\breve{v}_i \le \breve{V} \qquad \forall i=1,..,m \qquad (2')$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \qquad (3')$$

$$y_j \ge 0 \qquad \forall j=1,..,n \qquad (4')$$

$$(1')\wedge(2') \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}y_j \le \breve{V} \qquad \forall i=1,..,m$$

Juegos suma 0 con estrategias mixtas · Equilibrio (2)

Nomenclatura:

E, S	Conjunto de estrategias de J1, $E=\{e_1,..,e_m\}$. Conjunto de estrategias de J2, $S=\{s_1,..,s_n\}$
$a_{i,j}, b_{i,j}$	Utilidades obtenidas por J1 y J2 ante la estrategia de J1 $e_i \in E$ y la estrategia de J2 $s_j \in S$
x_i, y_j	Probabilidad (x_i) de que J1 use la estrategia $e_i \in E$ · Probabilidad (y_j) de que J2 use la estrategia $s_j \in S$
$V, \breve{V}$	Ganancia mínima de J1: $V = f(\vec{x}, A)$ · Pérdida máxima de J2: $\breve{V} = f(\vec{y}, A)$

Formulación extendida:

PL-J1: $\max V = \min_{1 \le j \le n} \{v_j\}$

s.a:

$$a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots + a_{m-1,1}x_{m-1} + a_{m,1}x_m \ge V$$
$$a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{m-1,2}x_{m-1} + a_{m,2}x_m \ge V$$
$$\ldots$$
$$a_{1,j}x_1 + a_{2,j}x_2 + \ldots + a_{m-1,j}x_{m-1} + a_{m,j}x_m \ge V$$
$$\ldots$$
$$a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots + a_{m-1,n}x_{m-1} + a_{m,n}x_m \ge V$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} + x_m = 1$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m \ge 0$$

PL-J2: $\min \breve{V} = \max_{1 \le i \le m} \{\breve{v}_i\}$

s.a:

$$a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots + a_{1,n-1}y_{n-1} + a_{1,n}y_n \le \breve{V}$$
$$a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \ldots + a_{2,n-1}y_{n-1} + a_{2,n}y_n \le \breve{V}$$
$$\ldots$$
$$a_{i,1}y_1 + a_{i,2}y_2 + \ldots + a_{i,n-1}y_{n-1} + a_{i,n}y_n \le \breve{V}$$
$$\ldots$$
$$a_{m,1}y_1 + a_{m,2}y_2 + \ldots + a_{m,n-1}y_{n-1} + a_{m,n}y_n \le \breve{V}$$
$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n = 1$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n \ge 0$$

Ejemplo 6. Presentación

Ejemplo 6 · Campaña cosmética promoción perfume 2x2 · Enunciado:

Dos compañías de cosmética (J1 y J2) diseñan un plan para promover sus nuevas líneas de perfume. Las compañías ofrecerán muestras gratuitas a los clientes de 2 prestigiosos grandes almacenes (GLF, PT) durante 33 días. Los cientos de clientes (suma 0) que J1 puede ganar a J2, en función de las estrategias de ambos jugadores, se recogen en la Tabla-6.0

Estrategias J1:

e_1 : Promoción en GLF

e_2 : Promoción en PT

Estrategias J2:

s_1 : Promoción en GLF

s_2 : Promoción en PT

J1: $a_{ij} \in A$	s1	s2
e1	-2	2
e2	4	-3

Tabla-6.0: Tabla de pagos. Cientos de clientes que J1 puede ganar a J2 en el problema de la Campaña Cosmética 2x2.

Ejemplo 6. Resolución con estrategias mixtas · Equilibrio PL

Ejemplo 6 · Campaña cosmética promoción perfume 2x2 · Resolución:

Estrategias J1:

e_1 : Promoción en GLF

e_2 : Promoción en PT

Estrategias J2:

s_1 : Promoción en GLF

s_2 : Promoción en PT

Tabla-6.0: Tabla de pagos. Cientos de clientes que J1 puede ganar a J2 en el problema de la Campaña Cosmética 2x2. Sin punto de silla · Valor (-2,2)

J1: a_{ij}	s1	s2	Min
e1	-2	2	**-2** ← maxmin
e2	4	-3	-3
Max	4	**2** ↑ minmax	

PL-J1: $\max V \quad (0)$

s.a:

$$-2x_1 + 4x_2 \geq V \quad (1)$$
$$2x_1 - 3x_2 \geq V \quad (2)$$
$$x_1 + x_2 = 1 \quad (3)$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1,2 \quad (4)$$

Resultado:

$$x_1^* = 7/11$$
$$x_2^* = 4/11$$
$$V^* = 2 \cdot \frac{7}{11} - 3 \cdot \frac{4}{11} = \frac{2}{11}$$

PL-J2: $\min \breve{V} \quad (0')$

s.a:

$$-2y_1 + 2y_2 \leq \breve{V} \quad (1')$$
$$4y_1 - 3y_2 \leq \breve{V} \quad (2')$$
$$y_1 + y_2 = 1 \quad (3')$$
$$y_j \geq 0 \quad j = 1,2 \quad (4')$$

Resultado:

$$y_1^* = 5/11$$
$$y_2^* = 6/11$$
$$\breve{V}^* = -2 \cdot \frac{5}{11} + 2 \cdot \frac{6}{11} = \frac{2}{11}$$

Valor del Juego J1: $V = 2/11$ · J1 ganará a J2 18 clientes (al menos) con la estrategia mixta.

Juegos suma 0 (2x2) Estrategias mixtas · Fórmulas

Programas lineales J1, J2 · Sistemas de ecuaciones J1, J2:

$$\text{PL-J1: } \left\{ \begin{array}{l} \max V \\ \text{s.a:} \\ a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \geq V \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \geq V \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = V \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = V \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1,2 \end{array} \right\}$$

$$\text{PL-J2: } \left\{ \begin{array}{l} \min \breve{V} \\ \text{s.a:} \\ a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \leq \breve{V} \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq \breve{V} \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_j \geq 0 \quad j = 1,2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = \breve{V} \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = \breve{V} \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_j \geq 0 \quad j = 1,2 \end{array} \right\}$$

Resultados:

Estrategias mixtas óptimas J1:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$V^* = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Estrategias mixtas óptimas J2:

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$y_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$\breve{V}^* = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Ejemplo 6. Resolución (2x2) Estrategias mixtas · Fórmulas

Ejemplo 6 · Campaña cosmética promoción perfume 2x2 · Resolución fórmulas:

Estrategias J1:

e_1 : Promoción en GLF

e_2 : Promoción en PT

Estrategias J2:

s_1 : Promoción en GLF

s_2 : Promoción en PT

Tabla-6.0: Cientos de clientes que J1 gana a J2 en Campaña Cosmética 2x2. Valor (-2,2)

J1: a_{ij}	s1	s2	Min	
e1	-2	2	**-2**	← maxmin
e2	4	-3	-3	
Max	4	**2**		
		↑ minmax		

J1:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-3-4}{-2-3-2-4} = \frac{7}{11}$$

$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-2-2}{-2-3-2-4} = \frac{4}{11}$$

$$V^* = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{6-8}{-2-3-2-4} = \frac{2}{11}$$

J2:

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-3-2}{-2-3-2-4} = \frac{5}{11}$$

$$y_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-2-4}{-2-3-2-4} = \frac{6}{11}$$

$$\breve{V}^* = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{6-8}{-2-3-2-4} = \frac{2}{11}$$

Valor del Juego J1: $V = 2/11$ · J1 ganará a J2 18 clientes (al menos) con la estrategia mixta.

Ejemplo 1. Resolución (2x2) Estrategias mixtas · Fórmulas

Ejemplo 1 · Pares o Nones · Resolución fórmulas:

Estrategias J1:

e_1 : Mostrar 1 dedo

e_2 : Mostrar 2 dedos

Estrategias J2:

s_1 : Mostrar 1 dedo

s_2 : Mostrar 2 dedos

Tabla-1: Euros/partida que J1 gana a J2 en el juego "Pares o Nones". Valor (-10,10).

J1: a_{ij}	s1	s2	Min	
e1	10	-10	**-10**	← maxmin
e2	-10	10	**-10**	
Max	10	**10** ↑ minmax		

J1:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{10 + 10}{10 + 10 + 10 + 10} = \frac{1}{2}$$

$$x_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{10 + 10}{10 + 10 + 10 + 10} = \frac{1}{2}$$

$$V^* = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{100 - 100}{10 + 10 + 10 + 10} = 0$$

J2:

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{10 + 10}{10 + 10 + 10 + 10} = \frac{1}{2}$$

$$y_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{10 + 10}{10 + 10 + 10 + 10} = \frac{1}{2}$$

$$\breve{V}^* = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{100 - 100}{10 + 10 + 10 + 10} = 0$$

Valor del Juego J1: $V = 0$ · J1 y J2 empatarán si emplean sus estrategias mixtas óptimas.

Ejemplo 7. Presentación

Ejemplo 7 · Campaña publicitaria-digital Fragancias Tres60 multimedia · Enunciado:

Dos compañías de cosmética (J1 y J2) diseñan un plan para promover sus nuevas gamas de fragancias. Ambas harán publicidad digital videowall, a través de Tres60-m, dirigida a viajeros del AVE en 3 ciudades (B, M, S) durante 60 días. Los cientos de clientes (suma 0) que J1 puede ganar a J2, en función de las estrategias de ambos jugadores, se recogen en la Tabla-7.0

Estrategias J1:

e_1 : Promoción en B.S

e_2 : Promoción en M.PA

e_3 : Promoción en S.SJ

Estrategias J2:

s_1 : Promoción en B.S

s_2 : Promoción en M.PA

s_3 : Promoción en S.SJ

J1: $a_{ij} \in A$	s1	s2	s3
e1	-1	1	2
e2	3	2	-2
e3	1	0	-2

Tabla-7.0: Tabla de pagos. Cientos de clientes que J1 puede ganar a J2 en el problema de la Campaña Tres60-m.

Ejemplo 7. Resolución gráfica (2x3) Estrategias mixtas (1)

Ejemplo 7 · Campaña publicitaria-digital Fragancias Tres60 multimedia · Resolución:

$$\text{Estrategias J1:}\begin{Bmatrix} e_1: \text{ Promoción en B.S} \\ e_2: \text{ Promoción en M.PA} \\ e_3: \text{ Promoción en S.SJ} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Estrategias J2:}\begin{Bmatrix} s_1: \text{ Promoción en B.S} \\ s_2: \text{ Promoción en M.PA} \\ s_3: \text{ Promoción en S.SJ} \end{Bmatrix}$$

J1: a_{ij}	s1	s2	s3
e1	-1	1	2
e2	3	2	-2
e3	1	0	-2

Tabla-7.0: Cientos de clientes que J1 puede ganar a J2 en el problema de la Campaña Tres60-m.

J1: a_{ij}	s1	s2	s3
e1	-1	1	2
e2	3	2	-2
~~e3~~	~~1~~	~~0~~	~~-2~~

Tabla-7.1: Tabla de pagos. Dominancias J1: estrategia e_2 domina a estrategia e_3. Se suprime e_3.

Ejemplo 7. Resolución gráfica (2x3) Estrategias mixtas (2)

Ejemplo 7 · Campaña publicitaria-digital Fragancias Tres60 multimedia · Resolución:

$$\text{Estrategias J1:}\begin{Bmatrix} e_1: \text{ Promoción en B.S} \\ e_2: \text{ Promoción en M.PA} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Estrategias J2:}\begin{Bmatrix} s_1: \text{ Promoción en B.S} \\ s_2: \text{ Promoción en M.PA} \\ s_3: \text{ Promoción en S.SJ} \end{Bmatrix}$$

Tabla-7.2: Cientos de clientes que J1 puede ganar a J2 en el problema de la Campaña Tres60-m (A reducida).

J1: a_{ij}	s1	s2	s3	Min
e1	-1	1	2	**-1** ← maxmin
e2	3	2	-2	-2
Max	3	2	**2** ↑ minmax	

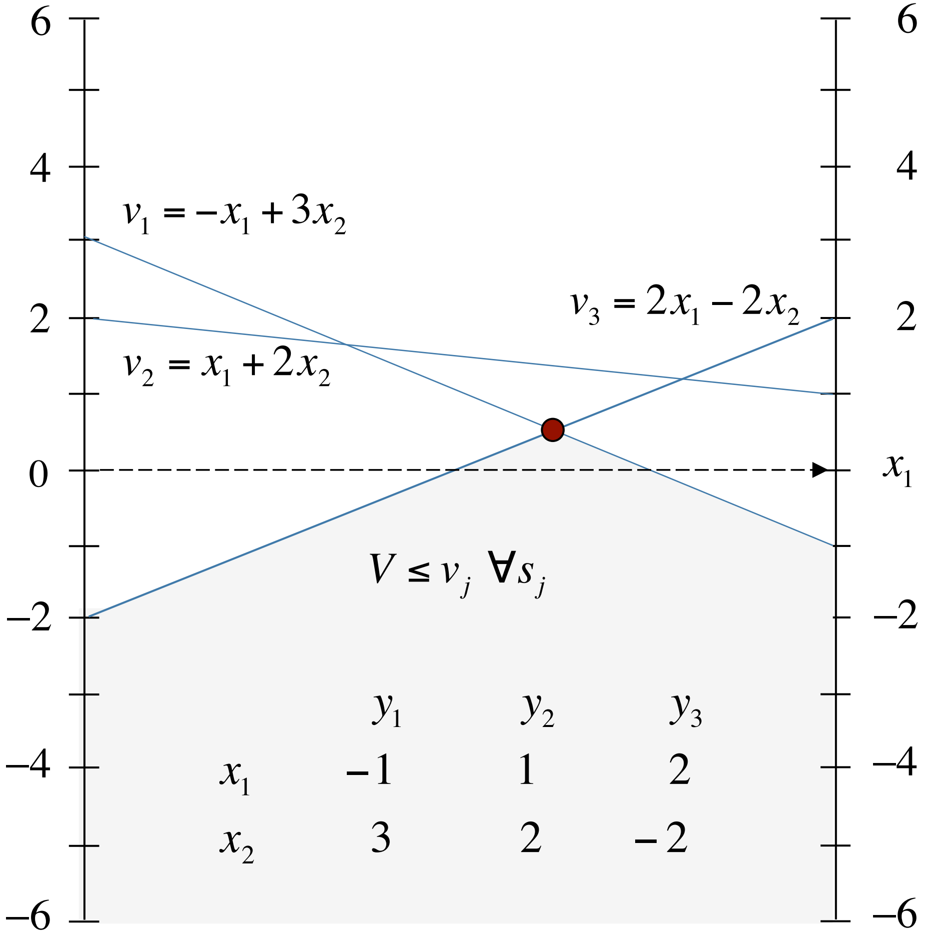
$$\begin{aligned}
&\text{PL-J1:}\quad \max V && (0)\\
&\text{s.a:} && \\
&-x_1 + 3x_2 \geq V && (1)\\
&\ \ x_1 + 2x_2 \geq V && (2)\\
&2x_1 - 2x_2 \geq V && (3)\\
&x_1 + x_2 = 1 && (4)\\
&x_i \geq 0 \quad i = 1,2 && (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{PL-J2:}\quad \min \breve{V} && (0')\\
&\text{s.a:} && \\
&-y_1 + y_2 + 2y_3 \leq \breve{V} && (1')\\
&3y_1 + 2y_2 - 2y_3 \leq \breve{V} && (2')\\
&y_1 + y_2 + y_3 = 1 && (3')\\
&y_j \geq 0 \quad j = 1,2,3 && (4')
\end{aligned}$$

Sin punto de silla · Valor del juego (-1,2) · J1 y J2 recurrirán a estrategias mixtas.

Ejemplo 7. Resolución gráfica (2x3) Estrategias mixtas (3)

Ejemplo 7 · Campaña publicitaria-digital Fragancias Tres60 multimedia · Resolución:



$$
\begin{array}{lll}
\text{PL-J1:} & \max V & (0) \\
\text{s.a:} & & \\
-x_1 + 3x_2 \ge V & & (1) \\
x_1 + 2x_2 \ge V & & (2) \\
2x_1 - 2x_2 \ge V & & (3) \\
x_1 + x_2 = 1 & & (4) \\
x_i \ge 0 & i = 1,2 & (5)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{PL-J2:} & \min \breve{V} & (0') \\
\text{s.a:} & & \\
-y_1 + y_2 + 2y_3 \le \breve{V} & & (1') \\
3y_1 + 2y_2 - 2y_3 \le \breve{V} & & (2') \\
y_1 + y_2 + y_3 = 1 & & (3') \\
y_j \ge 0 & j = 1,2,3 & (4')
\end{array}
$$

$$v_1 = v_3 = V \Rightarrow -4x_1 + 3 = 4x_1 - 2$$

$$x_1^* = \frac{5}{8} \quad x_2^* = \frac{3}{8} \quad V^* = \left(-1 \times \frac{5}{8} + 3 \times \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \breve{v}_1 = \breve{v}_2 = \breve{V} \\ v_2^* = \dfrac{11}{8} > V^* \Rightarrow y_2^* = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -3y_1 + 2 = 5y_1 - 2$$

$$y_1^* = \frac{1}{2} \quad y_3^* = \frac{1}{2} \quad \breve{V}^* = \left(-1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Valor del Juego J1: $V = 1/2$ · J1 ganará a J2 50 clientes (al menos) con la estrategia mixta.

Ejemplo 8. Presentación

Ejemplo 8 · Piedra – Papel - Tijera · Enunciado:

Dos jugadores (J1 y J2) muestran al mismo tiempo sus manos en una de las 3 posiciones siguientes: (1) puño cerrado -PIEDRA-, los 5 dedos extendidos (PAPEL), índice y corazón en V de victoria (TIJERA). Las reglas son simples: PIEDRA gana a TIJERA, TIJERA gana a PAPEL y PAPEL gana a PIEDRA; el perdedor paga 10 € al ganador; los jugadores empatan si muestran lo mismo. Las ganancias de J1 frente a J2 se recogen en la Tabla-8.0

Estrategias J1:

e_1 : Mostrar mano PIEDRA

e_2 : Mostrar mano PAPEL

e_3 : Mostrar mano TIJERA

Estrategias J2:

s_1 : Mostrar mano PIEDRA

s_2 : Mostrar mano PAPEL

s_3 : Mostrar mano TIJERA

J1: $a_{ij} \in A$	s1	s2	s3
e1	0	-10	10
e2	10	0	-10
e3	-10	10	0

Tabla-8.0: Tabla de pagos. Euros que gana J1 a J2 en cada partida del juego PIEDRA · PAPEL · TIJERA.

Ejemplo 8. Resolución con estrategias mixtas · Equilibrio PLs

Ejemplo 8 · Piedra – Papel - Tijera · Resolución:

$$\text{Estrategias J1:}\begin{Bmatrix} e_1: \text{ Mostrar Piedra} \\ e_2: \text{ Mostrar Papel} \\ e_3: \text{ Mostrar Tijera} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Estrategias J2:}\begin{Bmatrix} s_1: \text{ Mostrar Piedra} \\ s_2: \text{ Mostrar Papel} \\ s_3: \text{ Mostrar Tijera} \end{Bmatrix}$$

Tabla-8.1: Ganancias de J1 frente a J2 en el juego Piedra · Papel · Tijera. No hay punto de silla. Valor (-10,10).

J1: a_{ij}	s1	s2	s3	Min	
e1	0	-10	10	-10	
e2	10	0	-10	-10	maxmin
e3	-10	10	0	**-10**	←
Max	10	10	**10**		
			↑ minmax		

PL-J1: $\max V$ (0)

s.a:

$10x_2 - 10x_3 \geq V$ (1)

$-10x_1 + 10x_3 \geq V$ (2)

$10x_1 - 10x_2 \geq V$ (3)

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ (4)

$x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3$ (5)

Resultado:

$x_1^* = 1/3$

$x_2^* = 1/3$

$x_3^* = 1/3$

$V^* = 0$

PL-J2: $\min \breve{V}$ (0′)

s.a:

$-10y_2 + 10y_3 \leq \breve{V}$ (1′)

$10y_1 - 10y_3 \leq \breve{V}$ (2′)

$-10y_1 + 10y_2 \leq \breve{V}$ (3′)

$y_1 + y_2 + y_3 = 1$ (4′)

$y_j \geq 0 \quad j = 1,2,3$ (5′)

Resultado:

$y_1^* = 1/3$

$y_2^* = 1/3$

$y_3^* = 1/3$

$\breve{V}^* = 0$

Valor del Juego J1: $V = 0$ · J1 y J2 empatarán (largo plazo) si emplean sus estrategias mixtas óptimas.