Cátedra Nissan

-PROTHIUS-

CMB-T: Models de distribució del temps d'espera de taxi. Corporació metropolitana de Barcelona. Resumen para la dirección

Albert Corominas Subias y Joaquín Bautista Valhondo

R-01/2011
(Rec. Report CB-1985)

Departamento de Organización de Empresas

Universidad Politécnica de Cataluña

Publica:

Universitat Politècnica de Catalunya
www.upc.edu

Edita:

Cátedra Nissan
www.nissanchair.com
director@nissanchair.com

MODELS DE DISTRIBUCIÓ DEL TEMPS D'ESPERA DE TAXI.

Albert Corominas, Joaquín Bautista.
Dpt. de Tècniques Quantitatives de Gestió.
E.T.S.E.I.B., Universitat Politècnica de Catalunya.
Setembre de 1985.

INDEX.

1.- OBJECTE I MÈTODE DE L'ESTUDI.

En relació a la possible implantació de torns horaris en el servei metropolità del taxi, es tracta de determinar el nombre mínim de taxis en circulació que garanteixi un un nivell de servei suficient perquè la demanda no es desviï, apreciablement, cap a d'altres modes de transport.

Evidentment, aquesta qüestió no admet una resposta precisa, encara que només sigui per la gran quantitat de dades de què caldria disposar i per la variabilitat (temporal i espacial) inherent a aquestes dades.

Aleshores, el que es pretén és obtenir uns instruments, uns models matemàtics, que calculin la distribució del temps d'espera del taxi d'un usuari, en determinades hipòtesis. De fet no cal determinar tota la distribució sinó només alguns valors que siguin significatius, com la mitjana i les probabilitats que el temps d'espera sigui superior a cada un d'una certa llista de valors (hom ha adoptat, concretament, d'acord amb els responsables del servei a la CMB, els valors: 2, 4, 6, 8 i 10 minuts).

Les hipòtesis generals són les següents:

i) Es mantenen les actuals modalitats d'utilització del taxi.

ii) La demanda es manté com en l'actualitat, és a dir, la variació del nombre de taxis al carrer no produeix variació de la demanda.

iii) es considera el cas d'un usuari que agafa el taxi a la via pública (82% en la realitat[1]).

iv) Per a un cert període i un cert punt de la xarxa viària es considera una certa taxa d'ocupació, w, constant, i que la probabilitat que un taxi vagi ocupat és independent que en vagi o no qualsevol altre.

v) Els taxis desfilen, a una certa taxa mitjana de c cotxes/minut (constant per a un cert període i un cert punt), per davant de l'usuari i aquest agafa el primer taxi lliure que passa.

vi) L'inici de l'espera es produeix en un instant qualsevol, a l'atzar.

vii) Hom negligeix la probabilitat que un taxi ocupat quedi lliure a un punt pròxim a la persona que en busca (això tendeix a sobreestimar el temps d'espera, especialment quan la proporció de taxis lliures és baixa).

viii) No es considera la presència de possibles competidors en la recerca de taxi (els efectes d'aquesta hipòtesi són oposts als de la vii).

En aquestes condicions, la distribució del temps que ha d'esperar l'usuari per trobar taxi depèn dels valors inicials de w i c (w_0 i c_0) i del nombre de taxis que es mantingui al carrer (que s'expressarà com a proporció, ¶, dels que hi ha actualment) i de la distribució dels intervals de separació entre els taxis que desfilen davant d'ell. Pel que fa a aquesta distribució hom ha considerat tres hipòtesis:

I.- Interval constant i igual, per tant, a 1/c.

II.- Interval amb una distribució exponencial, de paràmetre c i de mitjana, per tant, igual a 1/c. La densitat de probabilitat que l'interval sigui t és exp(-ct).

III.- Interval constant, s, entre grups de taxis, considerant que la distribució del nombre de taxis en cada grup segueix una llei de Poisson de mitjana c.s.

La hipòtesi I és la que admet, almenys a priori, un tractament matemàtic més senzill. La II correspon al supòsit que la probabilitat que en un instant donat arribi un taxi és independent del temps que fa que no en passa cap (procés sense memòria); en principi, ha de tendir a donar probabilitats més altes als temps d'espera grans. La III podria reflectir l'efecte regulador d'un sistema de semàfors i fa disminuir la dispersió dels temps d'espera, sobre tot per a valors alts de s.

Així doncs les tres hipòtesis constitueixen, en principi, un ventall en què la hipòtesi I ocupa la posició intermèdia.

Amb cada una d'aquestes hipòtesis s'ha elaborat un model (models I, II i III) que permet el càlcul de la mitjana del temps d'espera i de la probabilitat que aquesta espera ultrapassi un valor donat, t_i, per a cada terna (w, c, ¶). Aquesta probabilitat es pot interpretar també com a proporció d'usuaris que esperen més de t_i.

Els càlculs han estat realitzats, amb cada un dels tres models, per als 5 valors esmentats de t_i i per a 9 parells de valors (w_o, c_o), les combinacions que es poden formar amb 3 valors de w i 3 valors de c, en tota la gama admissible de valors de ¶ (w_o <= ¶ <= 1). Els 3 valors esmentats de w_o i c_o són els valors extrems, inferior i superior, i el valor mitjà observats[2]). Per tal de facilitar la consulta i interpretació dels resultats, hom ha representat gràficament, per a cada parell (w_o, c_o) la mitjana del temps d'espera en funció de ¶, d'una banda i, d'una altra, en una sola figura, la probabilitat que l'espera superi t_i (per als valors 2, 4, 6, 8 i 10 minuts), també en funció de ¶.

Finalment, i per tal de comparar més fàcilment els resultats fornits pels tres models, s'ha fet, per a cada terna (w_o, c_o, t_i) un gràfic amb les proporcions d'espera superior a t_i, segons cada un dels tres models, en funció de ¶ i, per a cada parell (w_o, c_o) la mitjana del temps d'espera (segons els tres models) així mateix en funció de ¶.

En un annex s'explora la incidència de la hipòtesi d'independència entre el fet que un taxi vagi lliure i el que hi vagin els que el precedeixen i segueixen.

2.- MODEL I: INTERVAL CONSTANT ENTRE TAXIS.

Siguin:

c_o la taxa vehicles/minut en la situació actual

w_o l'actual proporció de taxis ocupats

L'interval, si és constant és igual a $1/c_o$.

Si la proporció de cotxes que surt al carrer és ¶, aleshores la taxa de vehicles minut, c, i la proporció de taxis ocupats, w, seran:

$$c = c_o ¶$$

$$w = w_o / ¶$$

I l'interval: $1/c = 1/(c_o ¶)$

La probabilitat d'agafar el n-èsim taxi que passi és:

$$w^{n-1}(1-w)$$

(ja que han de passar n-1 taxis ocupats i el n-èsim ha d'anar lliure).

El temps d'espera serà la suma del temps fins que passi el primer taxi, u (se suposarà una distribució uniforme a l'interval [0,1/c]), i n-1 intervals de magnitud 1/c:

$$u + (n-1)/c$$

Per tant, el temps mitjà d'espera serà:

$$t = u + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)w^{n-1}(1-w)/c =$$

$$= 1/(2c) + (1-w)c^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} nw^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} w^{n-1}\right) .$$

$$= 1/(2c) + (1-w)c^{-1}(S_1 - S_2).$$

Amb $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} nw^{n-1} = (1-w)^{-2}$

i $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} w^{n-1} = (1-w)^{-1}$

Per tant:

$$t = 1/(2c) + (1-w)c^{-1}[(1-w)^{-2}-(1-w)^{-1}] =$$
$$= c^{-1}(1-w^{-1}) - 1/(2c) =$$
$$= (1+w)/[2c(1-w)] =$$
$$= (\P+w_o)/[2c_o\P(\P-w_o)]$$

La probabilitat que el temps d'espera, t, sigui igual o més gran que un valor donat t_i és:

$$p(t>=t_i) = \sum_{n=1}^{\infty} w^{n-1}(1-w)p(u>=t_i-(n-1)/c)$$

Si $t_i - (n-1)/c > 1/c$, és a dir, si $n<ct_i$, aleshores $p(u>=t_i-(n-1)/c)=0$.

Si $0 <= t_i -(n-1)/c <= 1/c$, és a dir, $ct_i <= n <= ct_i+1$ aleshores $p(u>=t_i-(n-1)/c)=\{1/c - [t_i - (n-1)/c]\}/(1/c) =$ $= n - ct_i$

Si $t_i - (n-1)/c < 0$, és a dir, $ct_i + 1 < n$, aleshores $p(u>=t_i-(n-1)/c) = 1$

El valor de n tal que

$$ct_i <= n <= ct_i + 1$$

és únic si ct_i no és enter, però hi ha dos valors que cumpleixen la condició (ct_i i ct_i+1) si ct_i és enter. Mes en aquest darrer cas la probabilitat $p(u>=...)$ és nul.la per a $n = ct_i$. Per la qual cosa si designem per n^* l'únic valor que compleix la condició o el valor superior si n'hi ha dos , o sigui:

$$ct_i < n^* <= ct_i + 1$$

es pot escriure:

$$p(t>=t_i) = (n^* - ct_i)w^{n^*-1}(1-w) + (1-w)\sum_{n=n^*+1}^{\infty} w^{n-1} =$$
$$= (n^* - ct_i)w^{n^*-1}(1-w) + (1-w)w^{n^*}/(1-w) =$$
$$= w^{n^*} + w^{n^*-1}(1-w)(n^* - ct_i) =$$
$$= w^{n^*}[1 + (1-w)(n^*-ct_i)/w] =$$
$$= (w_o/\P)^{n^*}[1+(\P-w_o)(n^*-c_ot_i\P)/w_o]$$

amb $ct_i < n^* <= ct_i + 1$

o sigui:

$$c_o t_i ¶ < n^* <= c_o t_i ¶ + 1$$

3.- MODEL II: INTERVAL ENTRE TAXIS DISTRIBUÏT EXPONENCIALMENT AMB MITJANA 1/c.

En aquest cas el pas de taxis per davant d'un punt donat és més irregular que en el model anterior. La hipòtesi de distribució exponencial és equivalent a la de procés sense memòria: la densitat de probabilitat que en un instant donat passi un taxi és independent del temps que fa que n'ha passat un altre. Per tant, és com si cada vehicle es comportés amb total independència de tots els altres. Això produeix una major dispersió del temps d'espera. Àdhuc en el cas que tots els taxis vagin lliures la mitjana del temps d'espera és superior a la que correspon en el model I, ja que no és 1/(2c) sinó justament el doble: 1/c (paradoxalment, i a causa de la "manca de memòria" del procés, la mitjana del temps d'espera és igual a la mitjana de l'interval de pas dels vehicles[3]).

Els temps d'espera, segons que s'agafi el primer taxi, el segon, etc. es distribueixen segons lleis Erlang-1, Erlang-2, etc. de mitjanes 1/c, 2/c,..., perquè aquests temps són suma de 1,2,.. intervals distribuïts exponencialment. A partir d'aquesta consideració i després d'un tractament matemàtic una mica llarg hom pot trobar expressions per al càlcul de la mitjana i de $p(t \geq t_i)$.

Però es pot arribar al mateix resultat amb un tractament molt més senzill si hom té en compte les consideracions que segueixen.

La distribució exponencial dels intervals de pas dels taxis correspon a un procés de Poisson; la probabilitat que passi un taxi en un interval dt és c.dt. Si la probabilitat que un taxi vagi ocupat és w, aleshores la probabilitat que passi un taxi <u>lliure</u> a l'interval dt és c(1-w)dt, és a dir, el procés de pas de taxis <u>lliures</u> és un procés de Poisson de taxa c(1-w), que correspon a una distribució dels intervals entre taxis lliures exponencial, de mitjana $[c(1-w)]^{-1}$, i, per tant, de paràmetre $c(1-w) = c_o(\P-w_o)$. Dit d'una altra manera, quan un flux poissonià és bifurca a l'atzar els fluxos sortints són poissonians amb taxes iguals a la taxa del flux entrant multiplicat per la probabilitat respectiva.

Per tant, la mitjana és:

$$t = [c_o(\P-w_o)]^{-1}$$

Pel que fa a $p(t>=t_i)$ és igual a $F(t_i)$ on F és la funció de distribució de la llei exponencial que s'obté molt senzillament, per integració de la funció de densitat de probabilitat $f(t) = c_o(\P-w_o)\exp[-c_o t(\P-w_o)]$:

$$p(t>=t_i) = F(t_i) = \exp[-c_o t_i(\P-w_o)]$$

4.- MODEL III: INTERVAL CONSTANT ENTRE GRUPS DE TAXIS.

Si l'interval entre grups de taxis, s, és constant i la taxa mitjana de cotxes/minut ès c, aleshores el nombre mitjà de taxis a cada grup és sc.

La hipòtesi adoptada és que el nombre de taxis a cada grup es distribueix segons una llei de Poisson. Per tant, la probabilitat que el nombre de taxis en un grup sigui k és:

$$p_k = \exp(-sc)(sc)^k/k!$$

Amb aquest model hom pretén tenir en compte el fenòmen d'agrupament dels vehicles que es produeix a causa d'un semàfor o, senzillament, a causa del creuament d'un altre carrer. Les hipòtesis adoptades corresponen al cas en què cada s minuts hom retingués i després deixés passar de cop tots els taxis que haurien arribat segons un procés poissonià, ès a dir, amb intervals distribuïts exponencialment, com en el model II. Això fa disminuir la dispersió del temps d'espera, més com més gran sigui el valor de s (el que s'ha adoptat per fer els càlculs és de 45 segons, 0'75 minuts).

La probabilitat que tots els taxis d'un grup vagin ocupats és w^k i per tant la probabilitat que en un grup qualsevol no hi hagi cap taxi lliure és:

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k w^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-sc)(sc)^k w^k/k! = \\ &= \exp(-sc) \sum_{k=0}^{\infty} (scw)^k/k! = \\ &= \exp(-sc)\exp(scw) = \exp[-sc(1-w)] \end{aligned}$$

per tant, la probabilitat d'agafar un taxi en el grup n-èsim (la probabilitat que el primer taxi lliure sigui del grup n-èsim) és:

$$\beta^{n-1}(1-\beta)$$

I el temps d'espera, si el primer taxi lliure és del grup n-èsim és:

$$u + (n-1)s$$

on u és el temps fins que passa el primer taxi (distribució uniforme en l'interval [0,s]).

El temps mitjà d'espera és, doncs:

$$t = u + \sum_{n=1}^{\infty} s(n-1)(1-\beta)\beta^{n-1} =$$
$$= s/2 + s(1-\beta)(\sum_{n=1}^{\infty} n\beta^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1}) =$$
$$= s/2 + s(1-\beta)[(1-\beta)^{-2}-(1-\beta)^{-1}) =$$
$$= s[2^{-1} + \beta(1-\beta)^{-1}) =$$
$$= s(1+\beta)/[2(1-\beta)] =$$
$$= s[1+\exp[-sc(1-w)]]/(2[1-\exp[-sc(1-w)]])$$

Però $-sc(1-w) = -sc_o(\P-w_o)$ i, per tant:

$$t = (s/2)\{1+\exp[-sc_o(\P-w_o)]\}/\{1-\exp[-sc_o(\P-w_o)]\}$$

La probabilitat que el temps d'espera sigui igual o més gran que t_i és:

$$p(t>=t_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1}(1-\beta)p(u>=t_i-(n-1)s)$$

Si $t_i-(n-1)s > s$, o sigui si $n < t_i/s$, $p(u>=\ldots) = 0$.

Si $0 <= t_i-(n-1)s <= s$, és a dir, si

$$t_i/s <= n <= 1+t_i/s$$

aleshores $p(u>=\ldots) =\{s-[t_i-(n-1)s]\}/s = n - t_i/s$.

Finalment, si $t_i-(n-1)s<0$, o sigui si $n> 1+t_i/s$, aleshores $p(u>=\ldots) = 1$.

El valor de n que compleix

$$t_i/s <= n <= 1 + t_i/s$$

és únic si t_i/s no és enter; si ho és, hi ha dos valors:

$n=t_i/s$ i $n=1+t_i/s$; però per al primer d'aquests dos valors $p(u>=\ldots)=0$, per la qual cosa si hom designa per n^* el valor únic que compleix la condició:

$$t_i/s < n^* <= 1 + t_i/s$$

es pot escriure:

$$p(t>=t_i) = (n^* - t_i/s)\beta^{n^*-1}(1-\beta) + (1-\beta)\sum_{n=n^*+1}^{\infty}\beta^{n^*-1} =$$
$$= (n^* - t_i/s)\beta^{n^*-1}(1-\beta) + \beta^{n^*} =$$
$$= \beta^{n^*}[1 + (1-\beta)(sn^*-t_i)/(\beta s)]$$

Amb $\beta = \exp[-sc_o(\P-w_o)]$ i amb $t_i < n^* < 1 + t_i/s$

5.- CONCLUSIONS.

Els resultats fornits pels tres models concorden notablement, tant pel que fa a la mitjana del temps d'espera com quant a les proporcions d'usuaris que han d'esperar més d'un cert temps t. Aquesta concordància indica que la influència de la distribució dels intervals entre taxis no és important.

En canvi, (vegeu ANNEX, pp. 16 i ss.) el fet que la probabilitat que un taxi vagi ocupat sigui o no independent de la probabilitat que hi vagi el que el precedeix resulta ésser molt rellevant. Però la hipòtesi adoptada, de independència, sembla prou raonable.

En definitiva sembla que els models emprats donen bones indicacions sobre el comportament del sistema.

Per als valors mitjans de la taxa vehicles/minut i de la proporció de taxis ocupats el nivell actual de servei és molt alt i no es deteriora sensiblement per a valors de la proporció de cotxes que surt al carrer (en relació a la situació actual) del 75%. En canvi si aquesta proporció descendeix al 62'5%, la disminució de la qualitat de servei (mesurada segons els paràmetres que hom ha fet servir en aquest estudi) es fa ja notable.

6.- NOTES.

1.- La industria del taxi hacia el futuro. Corporació Metropolitana de Barcelona, 1984, p. 60.

2.- Segons Estudio de Ocupación de los Auto-taxis, Mayo 1985.

3.- Hom pot trobar una discussió sobre aquest punt a Leonard Kleinrock.- Queueing Systems. Volume I: Theory. John Wiley & Sons, 1975, pp. 169 i ss.

ANNEX.

Impacte de la no independència de les probabilitats que cada un dels taxis vagi ocupat.

En tots els models s'ha fet el supòsit que la probabilitat que un taxi anés lliure era independent que hi anessin els altres.

Hom pot considerar que aquesta probabilitat depèn de si el taxi anterior va ocupat o va lliure. Aquesta és la hipòtesi markoviana. Concretament, hom pot considerar dos estats (O i L, ocupat i lliure) i designar per <u>a</u> la probabilitat que si un taxi va ocupat hi vagi el següent i per <u>b</u> la probabilitat que si un taxi va lliure hi vagi el següent.

Aleshores la matriu de transició entre estats és:

	O	L
O	a	1-a
L	1-b	b

En els models I, II i II: a=w i b=1-w.

Els valors d'<u>a</u> i de <u>b</u> no poden ésser qualssevol. D'una banda, evidentment, cal que:

$$0 <= a <= 1$$

$$0 <= b <= 1$$

Però a més han d'ésser tals que les proporcions de taxis ocupats i lliures siguin precisament w i 1-w.

Per tant:

$$aw + (1-b)(1-w) = w$$

$$a = 2-b+(b-1)/w$$

$da/db = -1 + 1/w > 0$ ja que $w<1$; és a dir, <u>a</u> creix quan ho fa <u>b</u> El mínim valor de <u>a</u> és el que correspon a $b=0$, o sigui:

$$a = 2 - 1/w$$

(vàlid per a $w>=1/2$).

Hom pot adoptar, a tall d'exemple, $w_0=0'574$, $b=0$ i aleshores $a=0'258$.

Amb aquests valors la probabilitat que un taxi vagi ocupat si hi anava l'anterior és més baixa que la considerada fins a aquí, en els tres models. També és més baixa la probabilitat que un taxi vagi lliure si hi anava l'anterior.

La matriu, en aquest exemple és

$$\begin{matrix} 0'258 & 0'742 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

i a partir d'ella és possible calcular les probabilitats que, si un taxi va ocupat, el primer que vagi lliure sigui el primer, segon, etc. dels que el segueixen. Aproximadament aquestes probabilitats són:

$$f_1 = 0'742$$

$$f_2 = 0'191$$

$$f_3 = 0'049$$

$$f_4 = 0'014$$

$$f_5 = 0'004$$

Quan un usuari decideix buscar un taxi pot agafar el primer (la probabilitat coincideix amb la probabilitat que un taxi qualsevol vagi lliure: $1-w=0'426$ en l'exemple): si <u>no</u> agafa el primer (probabilitat $w=0'574$) agafarà el i-èsim amb probabilitat $w.f_{i-1}$.

En definitiva, les probabilitats d'agafar el 1er, 2on,.. taxi són, respectivament:

0'426

0'426

0'110

0'028

0'008

0'002

Força diferents, per cert, de les corresponents a la hipòtesi d'independència ($w^{n-1}(1-w)$):

0'426

0'245

0'140

0'081

0'046

0'027

0'015

0'009

0'005

0'003

0'002

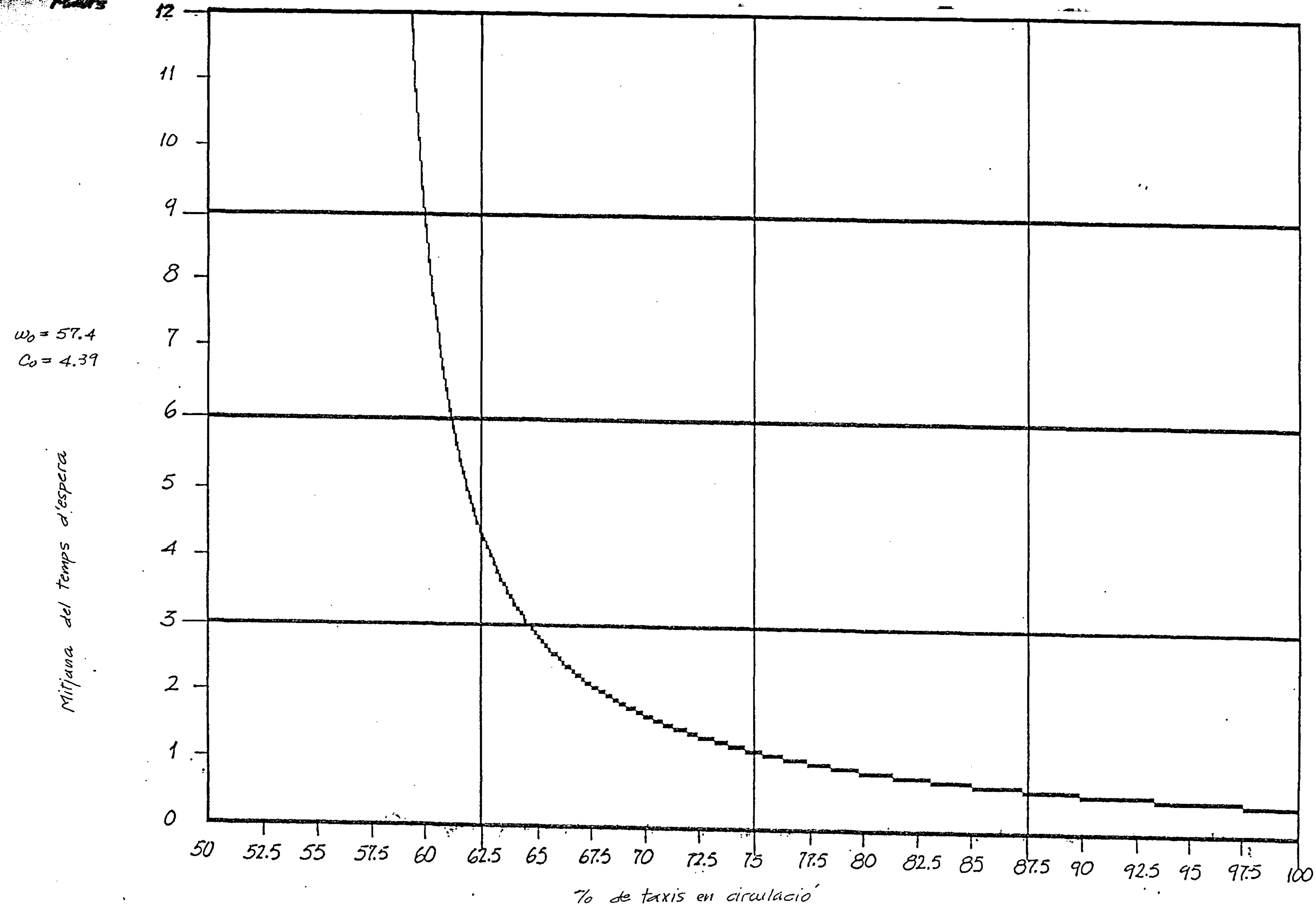
0'001

En la hipòtesi d'interval constant de 1 minut el temps mitjà és de 1'85 minuts (model I) front a 1'27 minuts en la hipòtesi ara considerada.

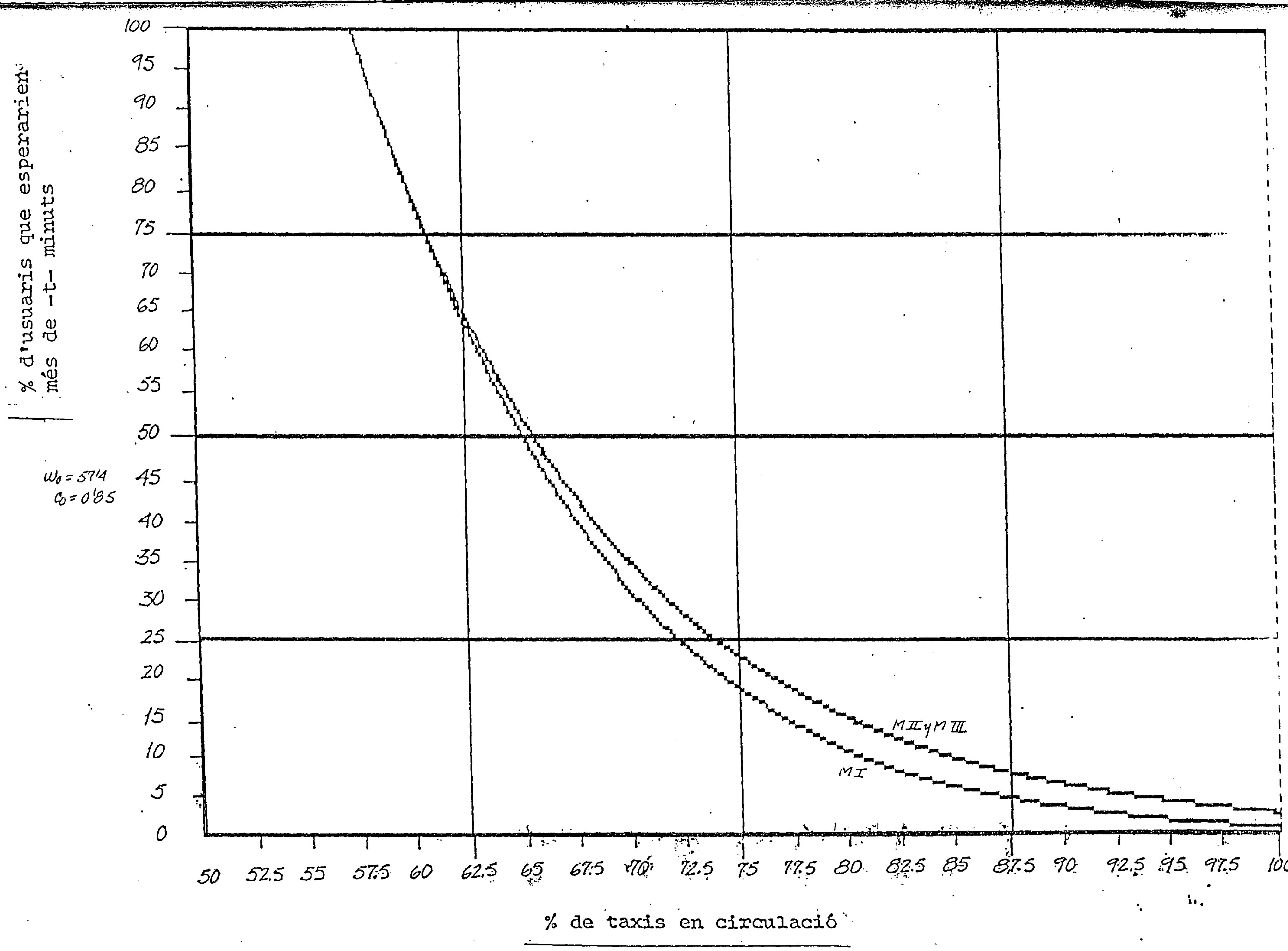
Les probabilitats de temps d'espera superiors a uns certs valors prefixats resulten també apreciablement diferents:

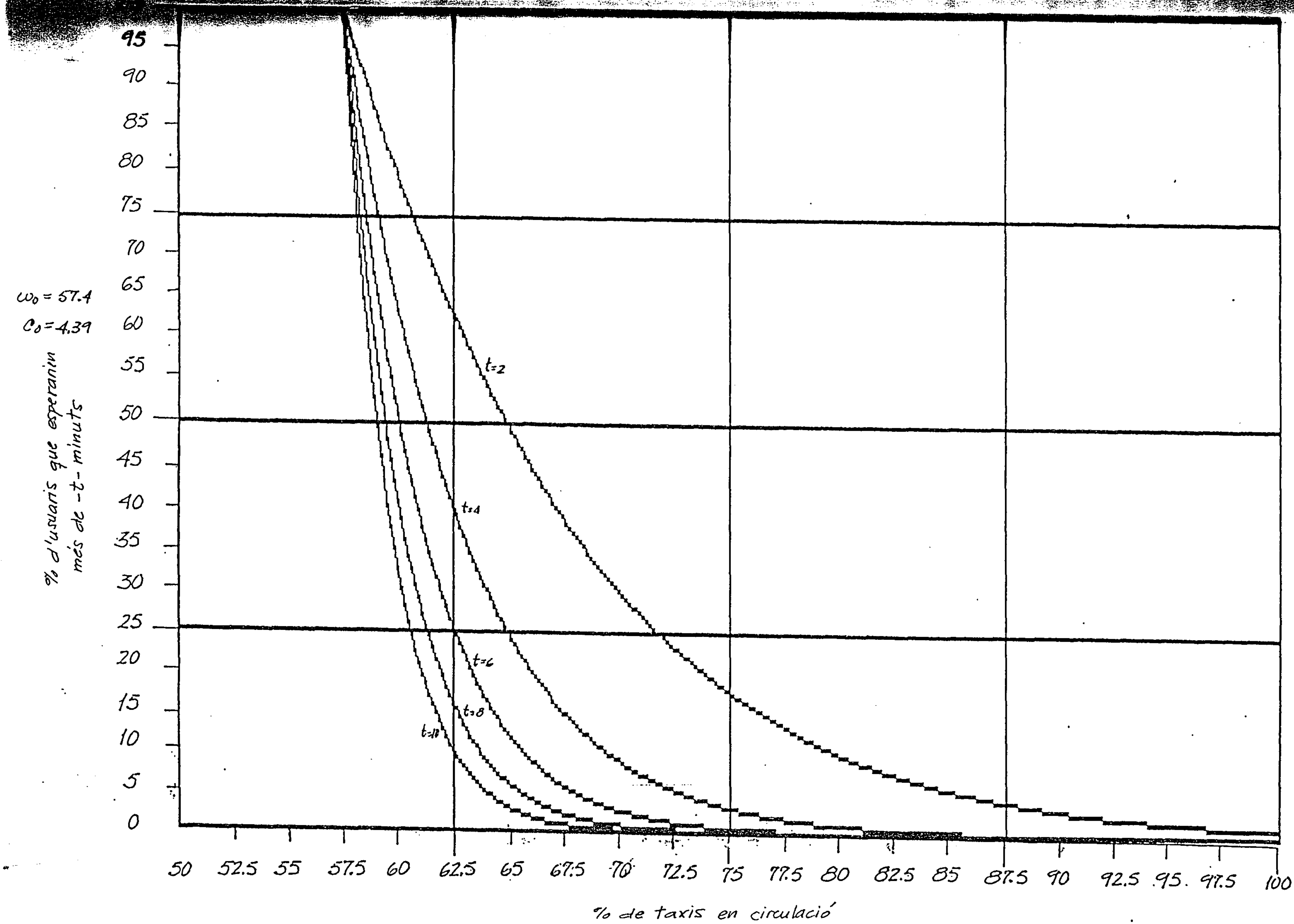
	Model I	Markov
p(t>=2)	0'148	0'329
p(t>=4)	0'010	0'108
p(t>=6)	0	0'035
p(t>=8)	0	0'011
p(t>=10)	0	0'003

Per tant les desviacions en la hipòtesi adoptada en els models I, II i III (d'independència) tenen un impacte considerable sobre els resultats. Les dades disponibles no permeten la verificació de si la realitat es comporta d'acord amb la hipòtesi; tanmateix aquesta sembla prou raonable perquè els resultats obtinguts a partir d'ella es puguin prendre com a base de conclusions.



$w_0 = 57.4$
$C_0 = 4.39$
Mitjana del temps d'espera
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
50
52.5
55
57.5
60
62.5
65
67.5
70
72.5
75
77.5
80
82.5
85
87.5
90
92.5
95
97.5
100
% de taxis en circulació


% d'usuaris que esperarien més de -t- minuts
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
$w_0 = 57'4$
$c_0 = 0'85$
M II y M III
M I
50
52.5
55
57.5
60
62.5
65
67.5
70
72.5
75
77.5
80
82.5
85
87.5
90
92.5
95
97.5
100
% de taxis en circulació



$\omega_0 = 57.4$
$C_0 = 4.39$
% d'usuaris que esperaran més de -t- minuts
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
t=2
t=4
t=6
t=8
t=10
50
52.5
55
57.5
60
62.5
65
67.5
70
72.5
75
77.5
80
82.5
85
87.5
90
92.5
95
97.5
100
% de taxis en circulació