Una Revisión de Modelos para el Problema de Multi-Localización en Redes.

Joaquín Bautista Valhondo[1], Jordi Pereira Gude[2]
[1] Laboratorio de Organización Industrial, Departamento de Organización de Empresas, UPC. Doctor Ingeniero Industrial, Avda. Diagonal 647, 7ª. joaquín.bautista@upc.es)
[2] Laboratorio de Organización Industrial, Departamento de Organización de Empresas, UPC. Ingeniero en Organización Industrial, Avda. Diagonal 647, 7ª. jorge.pereira@upc.es)

RESUMEN

Los problemas de localización en redes conforman una tipología de problemas extensamente tratados en la literatura desde el trabajo doctoral de Hakimi [3]. No obstante, se ha prestado poca atención a los problemas localización múltiple en ciudades, donde los posibles emplazamientos pueden estar en cualquier punto de la red. En el presente estudio se investigan los modelos y procedimientos existentes en la literatura para la resolución de estos problemas y se comparan con la más extensa bibliografía sobre problemas generales de localización en redes.

1. Introducción.

La teoría de localización se preocupa por los problemas cuyo objetivo es seleccionar la mejor localización de uno o más servicios en una región concreta, tales como centros de compra, estaciones de bomberos, fábricas, centros de recogida, aeropuertos, almacenes, etc. Aspectos fundamentales cuando se pretende solucionar un problema de localización son el modelo de la región en la que se pretende localizar, que influye en la estructura matemática que tendrá el problema, y el objetivo del problema. Es por ello que la literatura es dispersa y dependiente de dónde (en el plano, en una red, en una vía de comunicación, etc.) y cómo se pretende localizar (establecer un centro o varios, cubrir la demanda de servicio, etc.)

El presente trabajo se centra en los problemas de localización en que la región donde localizar un servicio puede ser representada como una red (ciudades, vías de transporte, etc.)

2. Clasificación de problemas de localización en redes.

Clasificaremos los problemas de localización en redes mediante tres características:

- La localización potencial de los centros está restringida a los vértices, o bien también puede localizarse en cualquier punto de la red.
- La demanda está localizada en puntos discretos, los vértices, o bien se encuentra distribuida en los arcos.
- La función objetivo que se pretende optimizar; puede ser: (a) minimizar el coste total de servicio a todos los puntos de demanda, (b) minimizar el coste máximo de servicio del punto de demanda máximo o bien (c) el cobertura de todos los puntos de demanda con coste mínimo.

Una combinación de las características del problema dará lugar a un tipo de problema, por ejemplo en el caso de minimizar el coste máximo, distancia, de servicio al punto más desfavorecido de demanda, nos aparecen cuatro tipos de problemas:

- Problema de localización de un centro (en inglés *center*) o más de un centro (*p-center*) consistente en encontrar un vértice, o vértices, que minimice la distancia entre el vértice más alejado de su localización más cercana. En este caso tanto el conjunto de posibles localizaciones, como el conjunto de puntos de demanda está confinado a los vértices de la red.
- El problema de localizar el centro general (en inglés *general-center*), en que se busca un vértice, o vértices, de la red cuyo punto más lejano de la red sea lo más cercano posible. En este caso, aunque los posibles emplazamientos están limitados a los vértices, la demanda está distribuida entre los arcos.
- El problema de localizar el centro absoluto (en inglés *absolute-center*) de una red, consistente en buscar cualquier punto, o puntos, cuyo vértice más alejado esté tan cerca como sea posible del punto escogido más cercano a él. En este caso, los emplazamientos pueden ser localizados en cualquier punto de la red, pero la demanda está asociada a un vértice.
- Y finalmente, el problema de localizar el centro general absoluto (en inglés *general-absolute-center*) en una red, consistente en buscar un punto, o puntos, cuyo punto más alejado en la red esté tan cerca como sea posible. En este caso, tanto la demanda como los posibles emplazamientos pueden encontrarse a lo largo de todos los arcos de la red.

Análogamente, pueden definirse los mismos problemas (simple, general, absoluto y general absoluto) para otras funciones objetivos como la minimización del coste total con todos los puntos de demanda, denominado mediana (en inglés *median*) y de cubrimiento, o cubrimiento máximo, de la demanda (en inglés *covering*).

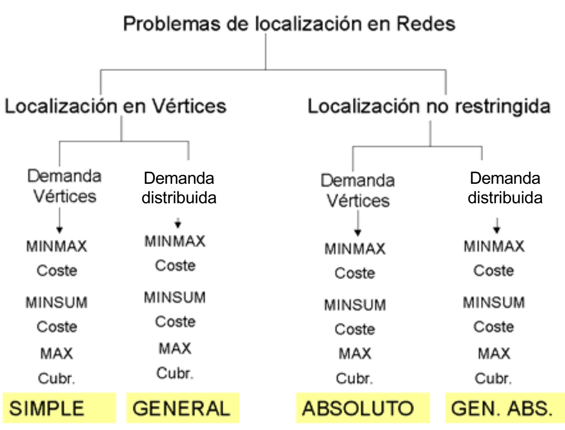

Figura 1: Esquema de la clasificación de los problemas de localización

Otras clasificaciones más completas expuestas para problemas de localización en redes, que incluye otras características como condiciones competitivas o localizaciones sujetas a colas en el servicio a los clientes, pueden encontrarse en [16] y [17]. Para una clasificación completa que incluye problemas en el plano o discretos ver [6].

2.1 Conceptos matemáticos de localización en redes.

Antes de entrar en un estudio riguroso de los diferentes tipos de problemas a considerar, son necesarias algunas definiciones sobre puntos y arcos y las diversas distancias en una red.

Una red *N* (de network en inglés) estará formada por un conjunto finito de vértices (*1*,.., *n*) y un conjunto de arcos que unen dos vértices, denotado por la pareja de vértices que une *(i,j)*, con una longitud asociada *a(i,j)>0* y cardinalidad *m*. El f-punto de un arco *(i,j)* denota el punto del arco *(i,j)* separada *f·a(i,j)* unidades de distancia del vértice *i* y *(1-f)·a(i,j)* del vértice *j*. El *0-punto* de *(i,j)* es el vértice *i* y el *1-punto* de *(i,j)* es el vértice *j*.

Los puntos que no son vértices son denominados puntos interiores. Si *X* denota el conjunto de todos los vértices y *P* el conjunto de todos los puntos del grafo, *P-X* es el conjunto de puntos interiores.

Se define *d(i,j)* como la longitud del camino más corto a través de los arcos del grafo entre el vértice *i* y el vértice *j* y a *D* como la matriz, de dimensión *n·n*, de distancias entre parejas de vértices, denominada matriz de distancias vértice-vértice, y calculable a partir de las longitudes de los arcos *a(i,j)* y un algoritmo para el cálculo de caminos mínimos entre parejas de vértices, tales como el algoritmo de Floyd o de Dantzig.

De forma paralela, se define *d(f-(r,s),j)* como la longitud del camino más corto entre un *f-punto* en el arco *(r,s)* al vértice *j*, denominada distancia punto-vértice. Si el arco *(r,s)* es un arco no dirigido, esta distancia es la menor de las dos siguientes:

- La distancia entre el *f-punto* al vértice *r* más la distancia entre el vértice *r* y el vértice *j*.
- La distancia entre el *f-punto* al vértice *s* más la distancia entre el vértice *s* y el vértice *j*.

Otra métrica interesante es la distancia del camino mínimo entre un vértice *j* y cualquier punto del arco *(r,s)*. Para un punto del arco *(r,s)* esta distancia tiene un máximo. Esta distancia máxima desde un vértice *j* a cualquier punto del arco *(r,s)* se denota como *d'(j,(r,s))* y se denomina distancia vértice-arco. Se puede definir una matriz *D'* de dimensión *n·m*, cuyo *j*,*k-ésimo* elemento es la distancia vértice-arco entre el vértice *j* y el arco *k*.

La distancia punto-arco *d'(f-(r,s),(t,u))* equivale a la distancia entre el *f-punto* de un arco *(r,s)* y el punto más lejano del arco *(t,u)*.

En el cuadro siguiente se muestra un resumen de las medidas explicadas anteriormente:

Símbolo	Nombre
a(i,j)	Longitud arco
d(i,j)	Distancia vértice-vértice VV
d(f-(r,s),j)	Distancia punto-vértice PV
d'(j,(r,s))	Distancia vértice-arco VA
d'(f-(r,s),(t,u))	Distancia punto-arco PA

Tabla 1: Resumen de medidas de distancia

Adicionalmente, es posible definir una serie de distancias adicionales, utilizadas en la función objetivo de los problemas:

Símbolo	Nombre
MVV(i)	Distancia máxima entre un vértice i y cualquier vértice
SVV(i)	Distancia total entre un vértice y todos los demás vértices
MPV(f-(r,s))	Distancia máxima entre cualquier vértice desde un f-punto del arco (r,s)
SPV(f-(r,s))	Distancia entre todos los vértices y un f-punto

Tabla 2: Resumen de las medidas de distancia utilizadas como función objetivo

De forma similar puede definirse *MVA(i)*, *SVA(i)*, *MPA(f-(r,s))* y *SPA(f-(r,s))* tomando el máximo o la suma de todos los arcos, en vez de todos los vértices.

Dadas todas las definiciones de distancia, máxima y suma, podemos definir los problemas en consideración, excepto los problemas de cubrimiento.

El centro (center) de una red *N* es el vértice *x* con MVV(*x*) mínima.

El centro general (general-center) de una red *N* es el vértice *x* con MVA(*x*) mínima

El centro absoluto de una red *N* es un *f-punto* de cualquier arco *(r,s)* de la red tal que *MPV(f-(r,s)) sea mínimo.*

El centro general absoluto de una red *N* es un *f-punto* de cualquier arco *(r,s)* de la red tal que MPA sea mínimo.

Las definiciones de mediana, mediana general, mediana absoluta y mediana general absoluta son análogas a las anteriores excepto que las operaciones de maximización [esto es, *MVV(i)*, *MVA(i)*, *MPV(f-(t,u)) y MPA(f-(t,u))*] son substituidas por las operaciones de sumatorio [esto es, *SVV(i)*, *SVA(i)*, *SPV(f-(t,u))* y *SPA(f-(t,u))*].

Análogamente, se define un problema de cubrimiento máximo como dada una red y una distancia máxima de cubrimiento, encontrar un emplazamiento que maximice el número de unidades que puedan ser servidas. También puede plantearse el problema de cubrimiento, aunque en el caso de una instalación no tiene sentido y por tanto será tratado en la sección siguiente.

2.2 Procedimientos de resolución.

Para la localización de una única instalación en una red, la resolución se basa en procedimientos enumerativos. Para los problemas de centro, mediana, centro general y mediana general, es suficiente con evaluar el conjunto de vértices con su función asociada. Para los problemas de centro absoluto, centro general absoluto, mediana absoluta y mediana general absoluta, se debe encontrar el *f-punto* para cada arco óptimo local en ese arco y escoger entre los óptimos locales el óptimo global.

3. Problemas de localización de más de una instalación.

Los problemas anteriormente tratados pueden ampliarse al caso general en que no es necesario encontrar el emplazamiento sino más de uno de ellos. Adicionalmente, aparecerá otro problema lateral que es el de asignación, consistente en repartir la demanda entre las diferentes instalaciones ampliadas, aunque este problema bajo la hipótesis de no-congestión de las instalaciones por parte de los demandantes de servicio, como sería el caso por ejemplo de un buzón pero no de una oficina de correo, se limita a asignar la demanda a la instalación más cercana según la medida de distancia utilizada. En estos problemas, la distancia con los centros de servicio de un demandante se considera como la distancia con la instalación más cercana.

Para denominar a un problema aparece un parámetro adicional; así el problema de localizar dos vértices que minimicen la distancia del vértice más alejado de ellos es conocido como el problema *2-centro*, y genéricamente se denominan problemas *p-centro*. Análogamente se define el problema, *p-centro general*, *p-centro absoluto* y *p-centro general absoluto*, y sus equivalentes mediana.

En algunos casos, pero, los problemas no consistirán en encontrar un número definido de localizaciones que minimicen las distancias máximas o la suma de distancias, ponderadas o no, sino que se presentarán problemas dónde se pretende maximizar el número de clientes que son servidos desde un número de emplazamientos definido o bien encontrar el número mínimo de emplazamientos y su localización para cubrir el servicio requerido por todos los clientes. Estos problemas son conocidos como el problema de cubrimiento máximo, en inglés *maximal covering*, y de cubrimiento, en inglés *covering*. Las instancias de ambos problemas quedan definidas mediante los datos necesarios para un problema de localización de un centro o una mediana en el caso ampliado de ponderación de la demanda y una distancia máxima de cubrimiento.

Por tanto un problema de *p-cubrimiento máximo* se define como dada una distancia *r* de cubrimiento; hallar *p* emplazamientos maximizando la demanda que se encuentra a menos de una distancia *r* de las *p* localizaciones, mientras que el problema de cubrimiento se define como dada una distancia *r* de cubrimiento, hallar el mínimo número de emplazamientos y su localización tal que el punto de demanda más alejado de su instalación más próxima no supere la distancia *r*.

En los siguientes apartados se presentará la formulación matemática* de los problemas p-centro, p-mediana, de cubrimiento y de cubrimiento máximo, para mostrar finalmente los procedimientos utilizados para su resolución.

Bibliografías más extensas pueden encontrarse en el libro de Handler y Mirchandani [7] y los estados del arte presentados [1], [5], [16] y [17]. A nivel computacional los trabajos de Kariv y Hakimi [10] y [11] continúan siendo una buena referencia para muchos de los problemas.

3.1 Formulación matemática.

Un problema *p-center* puede formularse mediante:

$$\begin{array}{lll} [MIN] \ F(X), & & (I) \\ sujeto \ \ a: \quad |X| = p, & X \subseteq posibles\, emplazamietos & (II) \end{array}$$

Dónde *F(X)* es el mínimo de la función de distancia ponderada utilizadas entre los

* La formulación que se utiliza es general y aplicable para todos los casos, tanto el simple como el general, el absoluto y general absoluto.

demandantes y cualquiera de las localizaciones medidas con una distancia vértice-vértice, punto-vértice, vértice-arco ó punto-arco; siendo X el conjunto de posibles emplazamientos es cualquier vértice ($X \subseteq V$) ó cualquier punto del grafo ($X \subseteq P$)†.

Un problema de cubrimiento puede formularse como:

$$[MIN] \quad |X| \qquad (III)$$
$$sujeto\ a: \quad F(X) \leq r \qquad (IV)$$
$$X \subseteq posibles\ emplazamietos \qquad (V)$$

Y un problema de cubrimiento máximo como:

$$[MAX] \quad \sum_{d(y,X) \leq r} w_x \qquad (VI)$$
$$sujeto\ a: \quad X \subseteq posibles\ emplazamietos \qquad (VII)$$

Dónde *d(y,X)* es la métrica de distancia utilizada y w_x el peso ponderado equivalente a la parte del arco cubierto o bien al peso poderado del vértice.

Dadas las formulaciones del problema *p-centro* y el problema de cubrimiento puede verse la relación entre ambos problemas. Dada la solución óptima de un problema de *p-centro* cuyo valor de función objetivo es *r*, la solución óptima del cubrimiento cuya distancia de servicio es *r* es la misma. Algunos procedimientos de resolución del problema de *p-centros* utilizan un procedimiento iterativo de resolución de problemas de cubrimiento con valores de *r* cada vez más acotados [13], [14] y [15].

La formulación matemática de un problema p-mediana es:

$$[MIN] \max_{\forall X} F(X) \qquad (VIII)$$
$$sujeto\ \ a: \quad |X| = p \qquad X \subseteq posibles\ emplazamietos \quad (IX)$$

Dónde *F(X)* vuelve a equivaler a la distancia del problema utilizada y los posibles emplazamientos a la definición del problema.

3.2 Procedimientos de resolución.

Los procedimientos más usuales de resolución de localización múltiple en redes se basan en dos enfoques:

- Basados en la discretización del problema y su resolución en su vertiente discreta.
- Basados en la utilización de propiedades geométricas del problema.

Los procedimientos de discretización se basan en hallar un conjunto mínimo de puntos en el grafo (tanto vértices como puntos interiores) que incluyen las localizaciones de una solución óptima. Por ejemplo, en el caso de localizar p centros en vértices con demanda asociada a los

† Recordamos que V es el conjunto de todos los vértices y A es el conjunto de todos los puntos del grafo, incluyendo vértices.

vértices, el conjunto finito dominante‡ de puntos donde se pueden hallar las *p* localizaciones es precisamente los vértices del problema y se puede formular un problema discreto análogo al de la red, un ejemplo de conjunto finito dominante se puede ver en [2] y [4] para el problema p-mediana absoluto.

La teoría sobre conjuntos finitos dominantes es extensa y particular para cada uno de los problemas a tratar. Revisiones generales de conjuntos finitos dominantes pueden verse en [8], [9] y [18].

En el caso de procedimientos geométricos, se basan en diferentes procedimientos provenientes de la geometría computacional. Un ejemplo es el uso de diagramas de Voronoi, un superconjunto de diagramas que permiten describir "zonas de influencia" y delimitación entre diversos elementos geométricos, como puntos y rectas, dada una función de distancia, ver [12]. Otro procedimiento es la subdivisión del problema en problemas más sencillos de tratar. Por ejemplo en el caso 2-centro, el procedimiento consistiría en encontrar las m^2 soluciones óptimas localmente que se concluyen de la resolución de m^2 problemas donde se limita los emplazamientos a un único emplazamiento en cada pareja de arcos (siendo una de ellas solución óptima ya que en caso que los dos emplazamientos estuvieran situados en el mismo vértice, éstos corresponderían a los dos vértices, siendo uno de ellos representable como el *0-punto* o *1-punto* de uno de los arcos incidentes en este vértice común).

Finalmente citar que las redes con forma de árboles, aquellas redes sin ciclos, tienen procedimientos distintos y más eficientes de resolución.

A continuación se hace una breve descripción de la aplicabilidad de los modelos presentados en el caso de la localización de áreas de aportación en la recogida de residuos urbanos.

4. Problemas de localización de más de una instalación.

El caso en que se encuadra la localización de áreas de aportación es del tipo continuo absoluto en grafos donde el grafo queda definido como un conjunto de arcos, los tramos de calle entre dos cruces, y un conjunto de vértices, los cruces entre los tramos de calle.

La demanda, en este caso equivale a la población se encuentra distribuida entre los arcos, mientras que los posibles emplazamientos pueden ser tanto puntos interiores del grafo como vértices.

Las clases de problemas encontrados en la localización de áreas de aportación se dividen en dos. En el primer caso, el problema consiste en localizar un número de áreas de aportación fijo optimizando un criterio. Este problema equivale a los problemas p-centro y p-mediana si se pretende minimizar al usuario más desfavorecido o la suma de distancias ponderadas entre todos los individuos. En un segundo caso y dado un factor de calidad de servicio, normalmente presentado en metros, se pretende minimizar el número de áreas de aportación necesarias para que ningún ciudadano tenga que recorrer más distancia que la fijada por la calidad de servicio. Este problema es equivalente al problema de cubrimiento.

Los procedimientos de resolución de problemas multi-localización para los casos citados (p-centro general absoluto, p-mediana general absoluta y cubrimiento general absoluto), han sido

‡ Del Inglés "finite dominating set"

poco tratados en la literatura, donde cabe resaltar los trabajos de Tamir [13], [14] y [15].

Referencias

[1] Dearing, P.M. (1985) "Review of Recent Developments-Location Problems", *Operations Research Letters* 4(3), 99, 95-98

[2] Goldman A.J., (1969). "Optimum Locations for centers in a network", *Transportation Science* 4 pp.352-360

[3] Hakimi S.L., (1964). "Optimum Locations of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph", *Operations Research*, 12, pp. 450-459

[4] Hakimi S.L. (1965). "Optimum Distribution of Switching Centers in Communication Network and some graph theoretic problems", *ORSA*, 13, pp. 462-475

[5] Halpern J. y O. Maimon (1982). "Algorithms for the m-center problems: A survey", *European Journal Operational Research*, 10, pp. 90-99

[6] Hamacher H. W., Nickel S., Schneider A., (1996) "Classification of Location Problems", *Technical Paper*, University of Kaiserlautern.

[7] Handler G. y P. Mirchandani (1979). "Location on Networks: Theory and algorithms", *MIT Press*, Cambridge, Massachusetts.

[8] Hansen P., Thiosse, J-F, Wendell R.E., (1986) "Efficient points of a network". *Networks*, Vol. 16 357-368

[9] Hooker J.N., Garfinkel R.S., Chen C.K. (1991) "Finite dominating sets for network location problems" *Operations Research*, Vol. 39, No. 1

[10] Kariv, O. Hakimi S.L. (1979) . "An algorithmic approach to network location problems, I: The p-centers", *SIAM Journal of Applied Mathematics* Vol 37(3), pp 513-538

[11] Kariv, O. Hakimi S.L. (1979) . "An algorithmic approach to network location problems, II: The p-medians", *SIAM Journal of Applied Mathematics*. Vol 37(3), pp 539-560

[12] Okabe A. y A. Suzuki (1997). "Locational optimization problems solved through Voronoi diagrams", *European Journal Operational Research* Vol 98, pp 445-456

[13] Tamir A. (1985) "A finite algorithm for the continuous p-center location problem on a graph", *Mathematical programming* 31, pp. 298-306

[14] Tamir A. (1987) "On the solution value of the continuous p-center location problem on a graph", *Mathematics of Operations Research* vol. 12(2), pp 340-349.

[15] Tamir A. (1988) "Improved complexity bounds for center location problems on networks by using dynamic data structures", *SIAM Journal of Discrete Mathematics*. Vol 1(3), pp. 377-396

[16] Tansel B.C., R.L.Francis y T.J.Lowe, (1983). "Location on networks: A survey. Part I: The p-center and p-median problems", *Management Science*, 29(4), pp. 482-497.

[17] Tansel B.C., R.L.Francis y T.J.Lowe, (1983) "Location on networks: A survey. Part II: Exploiting tree network structure", *Management Science*, 29(4), pp. 498-511.

[18] Tansel, B.C. Francis R.L, Lowe T.J. (1990) "Duality: Covering and Constraining p-Center problems on trees". en *Discrete Location Theory, P.B. Mirchandani and R.L. Francis, eds., John Wiley*, New York, pp. 1-54.